Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes

Departamento de Física y Química

Curso de Nivelación

Módulo Matemática

Carreras:

- Profesorado en Física
- Profesorado en Química
- Profesorado en Tecnología

Profesor responsable: Lic. Jonathan Sarmiento

2017

Contenidos

1. Números reales

En este capítulo nos proponemos dar una construcción intuitiva de conjuntos numéricos ya conocidos y manejar con fluidez las operaciones con números reales y sus propiedades más utilizadas.

1.1. Conjuntos numéricos

1.1.1. Números naturales

La noción de número es utilizada para resolver situaciones de la vida diaria, la utilización de los números naturales es tan antigua como el hombre mismo. Usamos números para contar elementos, para establecer un orden entre ciertas cosas, para establecer medidas, etc.
El conjunto de los **números naturales** está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se lo designa con la letra $\mathbb{N}$ y se representan por:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Propiedades:

- El conjunto de los números naturales posee un primer elemento 1.
- Entre dos naturales hay un número finito de naturales, esto es, el conjunto de los números naturales es un conjunto discreto.
- Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene un elemento mínimo.
- El conjunto de los naturales es un conjunto totalmente ordenado, es decir que, dados dos elementos cualesquiera pueden ser siempre comparados entre sí.
- Todo número natural n posee su sucesor $n + 1$.
- Todo número natural n se puede expresar como producto de números naturales, llamados factores de n.
- La suma y el producto de números naturales es un número natural.

Los números naturales son el instrumento adecuado para contar, sin embargo no bastan para resolver otros problemas tales como expresar con números la altura y la profundidad, la temperatura por encima o por debajo del punto de congelación del agua, etc. Así también no podemos resolver ecuaciones del tipo $3 - x = 3$ o $5 - x = 8$.
Por ello se necesita ampliar este conjunto de números.

1.1.2. Números enteros

El conjunto de los **números enteros**, se lo designa con la letra $\mathbb{Z}$ y es una ampliación del conjunto $\mathbb{N}$. Está formado por los números naturales, sus correspondientes opuestos y el cero. Se representan por:
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
En forma conjuntista $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Propiedades:

- $\mathbb{Z}$ es un conjunto discreto.
- $\mathbb{Z}$ no tiene primer ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto totalmente ordenado.
- Todo número entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
  Dos números opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia (en unidades) del cero. Uno positivo y uno negativo.
- La suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre es un número entero.

Nos preguntamos ahora: ¿Cuál será el resultado de 7 : 2?, esto es, ¿existe algún número entero tal que al multiplicarlo por 2 dé como resultado 7?
La respuesta es NO, esto es, nos es imposible encontrar un número entero que cumpla con esta condición. Para resolver éste problema hay que introducir un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números racionales.

1.1.3. Números racionales

Cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, aparece la necesidad de crear los números fraccionarios. Simbolizaremos al conjunto de las fracciones con la letra $\mathbb{F}$ y dicho conjunto está definido por:
$\mathbb{F} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
El conjunto de los **números racionales**, se lo designa con la letra $\mathbb{Q}$ y está definido como la union de el conjunto de números enteros y el conjunto de las fracciones.
Esto es $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}$

Propiedades

- $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, esto es, entre dos números racionales existen infinitos racionales. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- $\mathbb{Q}$ no tiene primero ni último elemento.
- $\mathbb{Q}$ es un conjunto totalmente ordenado.
- Todo número racional puede escribirse como cociente de dos números enteros: $\dfrac{a}{b}$, tal que $b \neq 0$
  Donde a es el numerador y b el denominador.

Los números racionales se pueden expresar de dos formas: mediante una fracción o por medio de un número decimal de cifras decimales finitas o periódicas (cifras decimales que se repiten). La expresión decimal es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.
Veamos algunos ejemplos:

- $-\dfrac{15}{3} = -5$
- $\dfrac{1}{8} = 0,125$ (expresión decimal exacta)
- $\dfrac{3}{24} = 0,125$ (expresión decimal exacta)
- $\dfrac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$ (epresión decimal periódica pura)
- $\dfrac{223}{90} = 2,4\overset{\frown}{7}$ (expresión decimal periódica mixta)

Un número racional puede ser representado por más de una fracción. En el ejemplo anterior se observa que el número $0,125$ está representado por las fracciones $\frac{1}{8}$ y $\frac{3}{24}$ éstas reciben el nombre de fracciones equivalentes entre sí.
De acuerdo a lo anterior tenemos dos tipos de expresiones decimales, las exactas y las periódicas.

$$\text{Expresiones decimales}\begin{cases}\text{exactas}\\ \\ \text{periódicas} & \begin{cases}\text{puras}\\ \\ \text{mixtas}\end{cases}\end{cases}$$

Recíprocamente, dada una expresión decimal exacta o periódica, puede encontrarse una fracción, como se describe a continuación.

• Si la expresión es exacta, se coloca como numerador el número entero que resulta de suprimir el punto decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras se encontraran a la derecha del punto decimal en la expresión decimal original.
Ejemplo:

- $0,7 = \frac{7}{10}$
- $0,205 = \frac{205}{1000}$
- $3,12 = \frac{312}{100}$

• Si la expresión es periódica, se coloca como numerador el resultado de restar al número entero formado por parte entera, seguida del anteperíodo y de la primera repetición del período, el entero formado por la parte entera con el anteperíodo. Como denominador tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

$$\frac{\text{(todas las cifras de la expresión)-(las cifras no períodicas de la expresión)}}{\text{tantos 9 como cifras dec. períodicas y tantos 0 como cifras dec. no períodicas}}$$

Ejemplo:

- $8,\overset{\frown}{37} = \dfrac{837-8}{99}$
- $2,3\ \overset{\frown}{4} = \dfrac{234-23}{90}$
- $31,4\ \overset{\frown}{72} = \dfrac{31472-314}{990}$

1.1.4. Números irracionales

Si pudiéramos marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales.

Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que si tomamos al lado del cuadrado como unidad de medida, no es posible fraccionarlo de tal manera que estas fracciones de unidad entren un número entero de veces en la diagonal. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama raíz cuadrada de 2 y se lo denota $\sqrt{2}$.

Aquellos números que no es posible expresarlos como una razón entre enteros (no admiten una representación racional) se los llama **números irracionales**. Al conjunto de los números irracionales se los designa con la letra $\mathbb{I}$.

Los números irracionales tienen en su expresión decimal infinitas cifras decimales no periódicas.

Son ejemplos de números irracionales:

- Un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:
  235, 1011011101111011111011111101111111011...
  representa un número irracional porque no puede identificarse un período en la parte decimal del mismo.

- Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural.
  $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt{6}$.

- Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero.
  $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[7]{13}$.

- El número π, utilizado para calcular la longitud de la circunferencia
  $\pi \approx 3,14159265358979323846...$

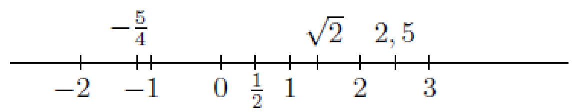
- El número e, base de los logaritmos naturales
  $e \approx 2,718281828459045235360287471352662497757247093699 95...$

1.1.5. Números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los **números reales** y se lo simboliza con $I\!R$.
Es decir, $I\!R = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$$I\!R \begin{cases} \mathbb{I} : irracionales \\ \\ \mathbb{Q} : racionales \begin{cases} I\!F : fracciones \\ \\ Z\!\!Z : enteros \begin{cases} I\!N : naturales \\ 0 : cero \\ I\!N^{-} : negativos \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

El conjunto de los números reales se representa sobre una recta llamada recta numérica o recta real.
Cada punto de la recta numérica representa a un único número real y recíprocamente a cada número real le corresponde un único punto de la recta.
Se fija un origen que representa al número cero, se considera un segmento unidad, a la derecha del cero se representan los reales positivos y a la izquierda los reales negativos.



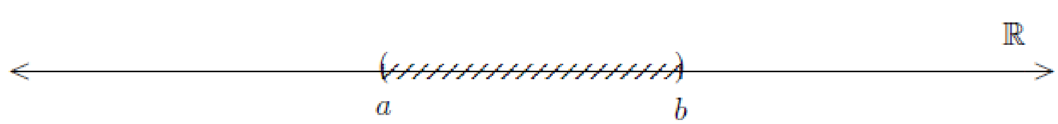
Para comparar dos números reales a y b. Si $b - a$ es positivo, entonces $a < b$ y el punto asociado a b esta a la derecha del punto asociado a a. Si $b - a$ es negativo, entonces $b < a$ y el punto asociado a b esta a la izquierda del punto asociado a a.

1.1.6. Intervalos de números reales

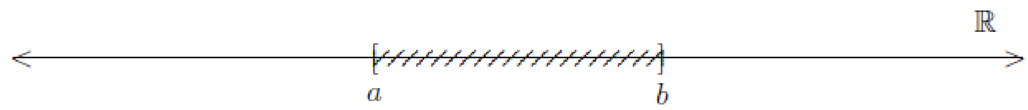
Los subconjuntos más frecuentes en el cálculo o análisis matemático son los intervalos de la recta real.
Veamos las definiciones de los distintos tipos de intervalos utilizando la notación conjuntista y, además, su representación gráfica.
Dados $a, b \in I\!R$ definimos:

(I) **Intervalos acotados**

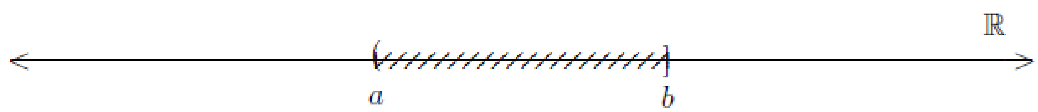
- $(a, b) = \{x \in I\!R : a < x < b\}$, llamado *intervalo abierto* de extremo inferior a y extremo superior b. El intervalo no incluye a los extremos a y b.
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



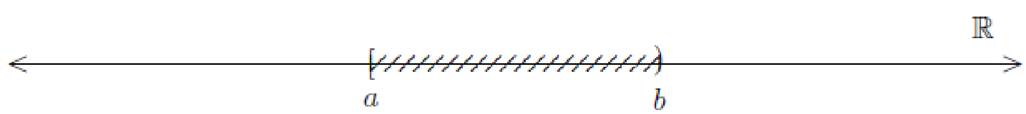
- $[a, b] = \{x \in I\!R : a \leq x \leq b\}$, llamado *intervalo cerrado* de extremo inferior a y de extremo superior b. El intervalo incluye a los extremos a y b.
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



- $(a, b] = \{x \in I\!R : a < x \leq b\}$, llamado *intervalo semiabierto* de extremo abierto a y cerrado en b. El intervalo no incluye el extremo a y si incluye el extremo b.
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



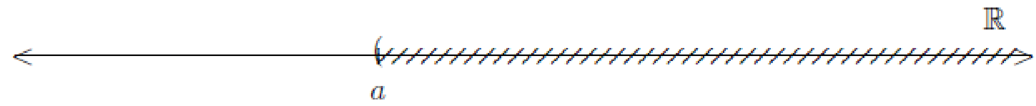
- $[a, b) = \{x \in I\!R : a \leq x < b\}$, llamado *intervalo semicerrado* de extremo cerrado a y abierto en b. El intervalo incluye el extremo a y no incluye el extremo b.
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



(II) **Intervalos no acotados**

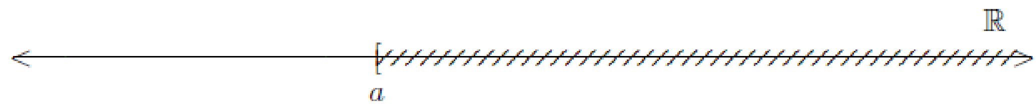
En lo que sigue interpretaremos a los símbolos ∞ y $-\infty$ como *infinito* y *menos infinito*, respectivamente. Es claro que, para cualquier número real a se verifica que: $-\infty < a < \infty$

- $(a, \infty) = \{x \in I\!R : a < x\}$, llamado *intervalo infinito abierto de extremo inferior a*.
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



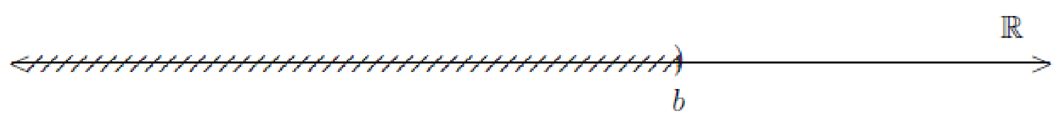
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, llamado *intervalo infinito cerrado de extremo inferior a.*

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



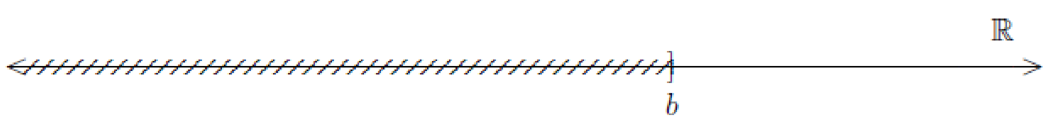
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, llamado *intervalo infinito abierto de extremo superior b.*

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



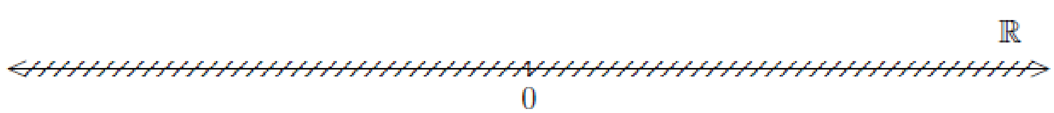
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, llamado *intervalo infinito cerrado de extremo superior b.*

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



- $(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\}$, es decir $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



1.2. Operaciones con números reales

Para trabajar con los conjuntos numéricos recordaremos las operaciones y algunas de sus propiedades básicas.

1.2.1. Suma

• Con igual denominador:

$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}}$ donde $b \neq 0$.

Ejemplo: $\frac{3}{4}-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3-9+1}{4}=-\frac{5}{4}$

• Con distinto denominador:

$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(m:b)\cdot a+(m:d)\cdot c}{m}}$ donde m es el múltiplo común menor.

Ejemplo: $\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+2=$

Se calcula el mcm(4,3,6)=12

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+2=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{2}{1}=\frac{1\cdot\mathbf{3}-2\cdot\mathbf{4}+5\cdot\mathbf{2}+2\cdot\mathbf{12}}{12}=\frac{29}{12}$$

Propiedades de la suma:

- Conmutativa: $a+b=b+a$
- Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Elemento neutro: existe 0 (cero) tal que $a+0=a$
- Opuesto aditivo: para cada número real a existe su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a+(-a)=0$
- Cancelativa: Si $a+c=b+c$ entonces $a=b$

1.2.2. Producto

$\boxed{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}}$ donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Siempre hay que tener en cuenta la regla de los signos para la multiplicación de números reales:

$$\begin{cases} (+)\cdot(+) & = & (+) \\ (-)\cdot(-) & = & (+) \end{cases} \qquad \begin{cases} (+)\cdot(-) & = & (-) \\ (-)\cdot(+) & = & (-) \end{cases}$$

Ejemplo: $\dfrac{2}{3} \cdot \left(-\dfrac{4}{7}\right) \cdot 2 = \dfrac{2 \cdot (-4) \cdot 2}{3 \cdot 7} = -\dfrac{16}{21}$

Propiedades del producto

- Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Elemento neutro: existe 1 (uno) tal que $a \cdot 1 = a$
- Inverso multiplicativo: para cada número real $a \neq 0$ existe su inverso multiplicativo $\dfrac{1}{a}$ tal que $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$
- Cancelatva: Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$
- Distributivas:
    - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
    - $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
    - $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$
    - $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$

1.2.3. Cociente

Todo cociente de números fraccionarios puede transformarse en producto.

$\boxed{\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}}$ donde $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $c \neq 0$

La regla de los signos del cociente es la misma que para el producto.

Ejemplo: $-\frac{5}{2} : \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{15}{14}$

Propiedades del cociente

- $(a + b) : c = a : c + b : c$
- $(a - b) : c = a : c - b : c$

1.2.4. Potenciación

$\boxed{a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}^{n-veces}}$ donde $a \in I\!R$ y $n \in I\!N$

a recibe el nombre de base, y n de exponente.

Regla de los signos en la potenciación:

- Si la base es positiva (+), entonces la potencia es positiva (+)
- Si la base es negativa (-), entonces $\begin{cases} \text{si el exponente es } \textit{par}\text{, la potencia es positiva (+)} \\ \text{si el exponente es } \textit{impar}\text{, la potencia es negativa (-)} \end{cases}$

Propiedades de la potenciación

- Todo número distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1.
  $a^0 = 1 \qquad \text{con } a \neq 0$
- Potencia de exponente negativo.
  $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad \text{con } a \neq 0$
- Producto de potencias de igual base.
  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base.
  $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Potencia de potencia.
  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- Distributiva respecto al producto y al cociente.
  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
  $(a : b)^n = a^n : b^n \quad$ con $b \neq 0$

1.2.5. Radicación

$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \text{ si y solo si } b^n = a}$

Donde a es el radicando, n el índice y b la raíz n-ésima de a. Al simbolo $(\sqrt{\ })$ se le llama radical.
Si n es impar entonces el radicando puede ser cualquier valor real.
Si n es par entonces el radicando debe ser $a \geq 0$, en caso contrario el resultado no es un número real.

Regla de los signos en la radicación:

- Si el radicando es positivo y el índice es *par*, entonces la raíz es positiva o negativa.
  Si $a \geq 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a} = (\pm)$
- Si el radicando es positivo y el índice es *impar*, entonces la raíz es positiva.
  Si $a \geq 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a} = (+)$
- Si el radicando es negativo y el índice es *par*, entonces no posee solución real.
  Si $a \leq 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real
- Si el radicando es negativo y el índice es *impar*, entonces la raíz es negativa
  Si $a \leq 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a} = (-)$

Observación:
Para conservar la unicidad en los resultados de ejercicios combinados, convendremos en considerar que la radicación de índice par de un radicando real positivo da como resultado el valor absoluto de su raíz.
Si $a \geq 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a} = \mid b \mid$, ejemplo: $\sqrt[4]{16} = \mid \pm 2 \mid = 2$

Propiedades de la radicación

- Toda raíz puede expresarse como potencia de exponente fraccionario.
  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
  en particular $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

- Raíz de una potencia es la potencia de la raíz.
  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

- Si n es par, entonces $\sqrt[n]{a^n} = \mid a \mid$
  Si n es impar, entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$

- Distributiva respecto al producto y al cociente.
  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
  $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad$ con $b \neq 0$

- Raíz de una raíz.
  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

1.3. Radicales

1.3.1. Extracción de factores fuera del signo radical

Se pueden extraer factores fuera del signo radical cuando el exponente de dichos factores sea mayor o igual que el índice .

- Ejemplo 1:
  Consideremos $\sqrt{8}$
  Podemos expresar 8 como potencia, $8 = 2^3$.
  $\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$
  Podemos descomponer el radicando como un producto de potencias de igual base, de modo que el exponente de una de ellas sea múltiplo del índice, y el otro de exponente menor que el índice.
  $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2}$
  $\sqrt{8} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2}$ (Distribuyendo)
  $\boxed{\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}}$ (Simplificando)
  Hemos extraído el factor 2 y el radical ha quedado simplificado.

- Ejemplo 2:
  Consideremos el radical $\sqrt[3]{a^{14}}$
  Podemos descomponer el radicando como un producto de potencias de igual base, de modo que uno de los exponentes sea múltiplo de 3 y el otro exponente menor que 3.
  $\sqrt[3]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^{12} \cdot a^2}$
  $\sqrt[3]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^{12}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ (Distribuyendo)
  $\sqrt[3]{a^{14}} = a^{\frac{12}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ (Transformando en potencia de exponente racional)
  $\boxed{\sqrt[3]{a^{14}} = a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$ (Simplificando)

- Ejemplo 3:
  Consideremos $\sqrt[3]{324}$
  Descomponemos el radical en factores primos
  $$\begin{array}{l|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
  $324 = 2^2 \cdot 3^4$
  $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4}$
  Se procede como en el caso anterior.
  $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^4}$
  $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot 3}$
  $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}$
  $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3}$
  $\sqrt[3]{324} = 3 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3}$
  $\sqrt[3]{324} = 3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3}$
  $\boxed{\sqrt[3]{324} = 3 \cdot \sqrt[3]{12}}$

1.3.2. Operaciones con radicales

Para facilitar las operaciones que se definen a continuación consideramos solamente los radicales de radicando positivo.

Los radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando se llaman **radicales semejantes**.
Ejemplos de radicales semejantes son los siguientes:

(a) $3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$; donde 3 y -5 son los coeficientes.

(b) $-\dfrac{3}{2}a\sqrt[3]{b^2}$ y $-4\sqrt[3]{b^2}$; donde $-\dfrac{3}{2}a$ y -4 son los coeficientes.

Los radicales semejantes difieren únicamente por sus coeficientes.

Adición y sustracción de radicales

La suma o diferencia de dos radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes de los radicales dados.

• Ejemplo 1:

$$3\sqrt{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}=\left(3+\frac{5}{4}\right)\sqrt{2}=\boxed{\frac{17}{4}\sqrt{2}}$$

Si los radicales no son semejantes la suma o resta se resuelve teniendo en cuenta los siguientes pasos:

- Factorizar los radicandos.
- Extraer factores fuera del radical.
- Identificar términos semejantes.
- Operar

• Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{81}-4\sqrt[3]{24} &= 2\sqrt[3]{3^4}-4\sqrt[3]{2^3\cdot 3}\\ &= 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}-4\cdot 2\cdot\sqrt[3]{3}\\ &= (6-8)\sqrt[3]{3}\\ &= \boxed{-2\sqrt[3]{3}}\end{aligned}$$

- Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+2\sqrt[4]{36}-\sqrt{8}+\sqrt{54} &= \sqrt{2}+2\sqrt[4]{6^2}-\sqrt{2^3}+\sqrt{3^3\cdot 2}\\ &= \sqrt{2}+2\cdot 6^{\frac{2}{4}}-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3\cdot 2}\\ &= \sqrt{2}+2\cdot 6^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6}\\ &= \sqrt{2}+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6}\\ &= (1-2)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{6}\\ &= \boxed{-\sqrt{2}+5\sqrt{6}}\end{aligned}$$

Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar y dividir radicales del mismo índice aplicamos la propiedad distributiva:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{a^9}\cdot\sqrt[12]{a^{10}} &= \sqrt[12]{a^9\cdot a^{10}}\\ &= \sqrt[12]{a^{19}}\\ &= \sqrt[12]{a^{12}\cdot a^7}\\ &= a\sqrt[12]{a^7}\end{aligned}$$

- Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{125}\cdot\left(-3\sqrt[3]{5}\right)\cdot\sqrt[3]{2} &= 1\cdot(-3)\cdot 1\sqrt[3]{125\cdot 5\cdot 2}\\ &= -3\sqrt[3]{1250}\\ &= -3\sqrt[3]{5^4\cdot 2}\\ &= -3\sqrt[3]{5^3\cdot 5\cdot 2}\\ &= -3\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{10}\\ &= -3\cdot 5\sqrt[3]{10}\\ &= -15\sqrt[3]{10}\end{aligned}$$

• Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}\frac{1}{28}\sqrt[4]{324} : \frac{1}{7}\sqrt[4]{4} &= \frac{1}{28} : \frac{1}{7}\sqrt[4]{324 : 4}\\ &= \frac{7}{28}\sqrt[4]{81}\\ &= \frac{1}{4}\cdot 3\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

• Ejemplo 4:

$$\begin{aligned}a\sqrt[3]{a^5\cdot b^2} : \sqrt[3]{a^2\cdot b} &= a\sqrt[3]{a^5\cdot b^2 : a^2\cdot b}\\ &= a\sqrt[3]{a^3\cdot b}\\ &= a\cdot a\sqrt[3]{b}\\ &= a^2\sqrt[3]{b}\end{aligned}$$

1.3.3. Racionalización de denominadores

La racionalización de denominadores es un procedimiento en el que se transforma una fracción que tiene en el denominador un número irracional en otra equivalente cuyo denominador sea un número racional.
Se considerarán los siguientes casos:

(a) **El denominador es un radical único irreducible de índice 2.**
En general este caso corresponde a fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$ y se resuelve multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{b}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b\cdot b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{b}$$

Ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7\cdot 7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}$

(b) **El denominador es un radical único irreducible de índice distinto de 2.**
En general este caso corresponde a fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}}$ y se resuelven multiplicando numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-p}}$.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p} \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p \cdot b^{n-p}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{b}$$

Ejemplo: $\dfrac{6}{\sqrt[7]{2^4}}$, en este caso $n - p = 7 - 4 = 3$, luego

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^4} \cdot \sqrt[7]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^4 \cdot 2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{2} = 3\sqrt[7]{2^3}$$

(c) **El denominador es un binomio de la forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$; $a \pm \sqrt{b}$; $\sqrt{a} \pm b$**

Para comprender el procedimiento a usar en este caso, nos apoyamos en la siguiente propiedad:

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, con $a, b \in I\!R$

El procedimiento consiste en multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 1:

$$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (3 + \sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2 \cdot (3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

1.4. Ejercitación

Ejercicio 1 *Resolver las siguientes operaciones combinadas.*

a) $[5 - 15 \cdot (-2)] : (-4 - 3) =$ Rta: -5

b) $16 : (-8) - \{-[2 - 3 \cdot (-1)] + 5\} - (-2) =$ Rta: 0

c) $[3 \cdot (-5) + 36] : [(3 - 38) : (-5)] =$ Rta: 3

d) $(2 - \sqrt{3^2 + 4^2})^3 =$ Rta: -27

e) $\{[\sqrt{4^3} - (3 - 4)^2]^2 - (-3)^2\} : 10 - \sqrt{9} =$ Rta: 1

f) $\sqrt{(3^2 - 2^2) : [(3 + 2)^2 + \sqrt{(5^2 - 1^2) : 6} + 11 \cdot (-2)]}$ Rta: 1

Ejercicio 2 *Resolver e indicar a que conjuntos numéricos pertenece el resultado.*

a) $2 - \left(-3 + \dfrac{4}{3}\right) =$ Rta: $\frac{11}{3}$

b) $\left(\dfrac{3}{2} - 2\right) : \dfrac{1}{6} =$ Rta: -3

c) $\left\{-\dfrac{1}{2} + \left[2 - \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6}\right)\right]\right\} - 1$ Rta: $-\frac{13}{12}$

d) $\dfrac{\dfrac{2}{7} + \dfrac{1}{13} \cdot \left(-\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{2}\right)}{(-2) \cdot \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}} =$ Rta: $\frac{27}{14}$

e) $\dfrac{-3}{\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right)} - \dfrac{\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \left(-3 + \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{12}} =$ Rta: $\frac{13}{5}$

f) $\left(\dfrac{2}{3} + 1\right) \cdot \dfrac{12}{5} + \dfrac{8}{27} \cdot \left(-\dfrac{1}{4} + 7\right)$ Rta: 6

Ejercicio 3 *Pasar las expresiones decimales a fracción y resolver.*

a) $\dfrac{(0,3-0,11)\cdot(0,14+0,06)}{-1+0,62}=$ Rta: $-\frac{1}{10}$

b) $\sqrt{\left[\left(\dfrac{0,34}{2}\right)^{-1}-\dfrac{1,15}{0,34}\right]\cdot 0,9}=$ Rta: $\frac{3}{2}$

c) $\dfrac{0,5-0,\overset{\frown}{3}}{0,\overset{\frown}{5}}=$ Rta: $\frac{3}{10}$

d) $\left[\dfrac{(0,5+0,\overset{\frown}{3})\cdot 1,4\overset{\frown}{6}}{2,\overset{\frown}{4}}\right]^{-1}=$ Rta: $\frac{25}{44}$

e) $[(0,3\overset{\frown}{7}-0,1)-(3,1+2,\overset{\frown}{1})]:\dfrac{1}{3}=$ Rta: $-\frac{74}{5}$

Ejercicio 4 *Resolver aplicando propiedades.*

a) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-8}\right]^{2}=$ Rta: $\frac{16}{81}$

b) $\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}\right]^{2}:\left(\dfrac{4}{3}\right)^{8}=$ Rta: $\frac{16}{9}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}=$ Rta: $\frac{2}{3}$

d) $8^{-\frac{2}{3}}=$ Rta: $\frac{1}{4}$

e) $32^{0,4}=$ Rta: 4

f) $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{1}{729}}}=$ Rta: $\frac{1}{3}$

g) $(8^{2})^{-\frac{2}{3}}\cdot(4^{3})^{\frac{1}{2}}=$ Rta: $\frac{1}{2}$

Ejercicio 5 *Indicar si las siguientes igualdades son correctas.*

a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$

b) $(2+5)^2 = 2^2 + 5^2$

c) $\sqrt{(-4)^2} = -4$

d) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$

e) $2^3 \cdot 3^2 = 6^5$

f) $\frac{8}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9}$

g) $\pi^0 = 1$

h) $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$

Ejercicio 6 *Resolver e indicar a que conjuntos numéricos pertenece el resultado.*

a) $\left(2 - \frac{175}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} + (20,25)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$ Rta: 4

b) $\left[\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{17}{12}\right)^{-2} : (0,02)^0}{0,\widehat{6} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) : (-0,1)^{-1}}\right]^{-2} \cdot \left(-\frac{14400}{2401}\right) =$ Rta: -1

c) $\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} =$ Rta: $\frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{64}{125}\right)^{-1} - 2,125=$ Rta 1

e) $\sqrt{\left(\frac{2}{3} + 1\right)^{-3} \cdot 2,\widehat{7} + \frac{7}{5}} =$ Rta: $\sqrt{2}$

Ejercicio 7 *Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes.*

a) $(\sqrt{2}-3)^2+(\sqrt{2}+3)^2$ es un número irracional.

b) $(\sqrt{5}+3)^2+(\sqrt{5}-3)^2$ es un número entero.

c) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$ es un número racional.

d) $(2^4)^2=(0,5)^{-8}$

Ejercicio 8 *Resolver.*

a) $\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^{-1}+0,7:2,\overset{\frown}{3}-0,25:0,\overset{\frown}{6}}{\sqrt{0,\overset{\frown}{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{7}}-\left(1-0,\overset{\frown}{3}\right)^{-2}+1,5}\right]=$ Rta: $-\frac{87}{10}$

b) $\left(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}+3^2+(0,5)^{-1}}-0,1\overset{\frown}{6}=$ Rta: $-\frac{7}{6}$

c) $\dfrac{\left(0,\overset{\frown}{4}+\dfrac{7}{5}\right):0,\overset{\frown}{2}-5\cdot\sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)^2}}{0,0\overset{\frown}{8}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt{\dfrac{25}{64}}\right]-0,2\overset{\frown}{6}}=$ Rta: $\frac{59}{4}$

d) $\dfrac{(4^{-2})^{\frac{1}{2}}+(2^{-4})^{\frac{1}{4}}}{0,3\overset{\frown}{2}\cdot\dfrac{45}{29}-\dfrac{1}{3}}-\sqrt[3]{\dfrac{-3-4-20}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}}=$ Rta: 6

e) $\dfrac{(0,125)^{-\frac{1}{3}}+(0,\overset{\frown}{2})^8\cdot(0,\overset{\frown}{2})^{-6}}{49^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{2}{343}+\sqrt{(-4)^2}}=$ Rta: $\frac{83}{243}$

Ejercicio 9 *Extraer factores fuera del radical.*

a) $\sqrt{27} =$ Rta: $3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{432} =$ Rta: $6\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{ab^5} =$ Rta: $b^2\sqrt{ab}$

d) $\sqrt{8x^4} =$ Rta: $2x^2\sqrt{2}$

e) $\sqrt[5]{15552}$ Rta: $6\sqrt[5]{2}$

f) $\sqrt{20x^6y^{15}}$ Rta: $2x^3y^7\sqrt{5y}$

g) $\sqrt[4]{4x^5}$ Rta: $x\sqrt[4]{4x}$

Ejercicio 10 *Resolver las siguientes sumas de radicales.*

a) $-11\sqrt{3} + \left(3 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{3} - \sqrt{3} =$ Rta: $-\frac{35}{4}\sqrt{3}$

b) $-2\sqrt{700} + \dfrac{3}{2}\sqrt{7} - \dfrac{1}{4}\sqrt{28} =$ Rta: $-19\sqrt{7}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54}$ Rta: $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

d) $2\sqrt{24} + \sqrt{54} + 2\sqrt{18} - 5\sqrt{6}$ Rta: $2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$

e) $\dfrac{1}{12}\sqrt{12} - \dfrac{1}{3}\sqrt{18} + \sqrt{2} + \sqrt{27} + 5\sqrt{0,02} =$ Rta: $\frac{19\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

Ejercicio 11 *Resolver y simplificar.*

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^4} =$ Rta: $xy\sqrt[5]{x}$

b) $\sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3y} \cdot \sqrt[4]{27x^3y^2} =$ Rta: $3x^2\sqrt[4]{y^3}$

c) $\sqrt{3x} : \sqrt{x} =$ Rta: $\sqrt{3}$, $x \neq 0$

d) $\sqrt[12]{8z^{13}} : \sqrt[12]{8z^9} =$ Rta: $\sqrt[12]{z^4}$

Ejercicio 12 *Aplicar propiedades y resolver.*

a) $\dfrac{(2^3)^{-2} \cdot (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}}{(2^{10})^{\frac{1}{2}} \cdot (3)^{\frac{1}{3}}} =$ Rta: 2^{-11}

b) $\sqrt{2z} \cdot \sqrt[6]{8z} =$ Rta: $2z^{\frac{2}{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5x} \cdot \sqrt[3]{x5^2}}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[6]{5^5 x}} =$ Rta: $5^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{5}{6}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[6]{x^2 y}} =$ Rta: $\sqrt{y}$

Ejercicio 13 *Racionalizar denominadores.*

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ Rta: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[7]{3^4}} =$ Rta: $\frac{2\sqrt[7]{27}}{3}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}} =$ Rta: $\frac{5\sqrt[4]{8}}{2}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$ Rta: $5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$ Rta: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} =$ Rta: $\sqrt{2}$

g) $\dfrac{\sqrt{6} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} =$ Rta: $\sqrt{3}$

Ejercicio 14 *Resolver las siguientes operaciones combinadas*

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{4}=$ Rta: 0

b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}-3\sqrt{\dfrac{1}{27}}+\sqrt{\dfrac{1}{3}}-3\sqrt{\dfrac{1}{8}}=$ Rta: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{-1}=$ Rta: $-1+\sqrt{5}$

d) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}=$ Rta: $\sqrt[4]{2}$

2. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

2.1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en las que figuran una o varias letras llamadas incógnitas.
Los números que al sustituir a las incógnitas hacen verdadera la igualdad forman el **conjunto solución** de la ecuación, pudiendo este ser vacío.
Resolver una ecuación, consiste en hallar su conjunto solución.
Las **ecuaciones lineales con una incógnita** son aquéllas que pueden escribirse de la forma: $\boxed{ax + b = 0 \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \ y \ a \neq 0}$
Llamaremos ecuaciones equivalentes a dos o más ecuaciones cuyas soluciones sean las mismas.
Por ejemplo: $2x = 8$ y $\frac{3}{2}x = 6$ son equivalentes, ya que su conjunto solución es $S = \{4\}$.
Para resolver una ecuación lineal de una incógnita, lo que haremos será hallar ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas, hasta llegar a un punto en el que la solución sea trivial. Para obtener ecuaciones equivalentes, utilizaremos las siguientes propiedades de la relación de igualdad:

- Si se suma a ambos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.
- Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.

Además, en ambos miembros de la igualdad, asumiremos que las letras representan números reales y usaremos todas las propiedades vistas en el primer capítulo.
La solución general de una ecuacion lineal con una incógnita viene dada por: $S = \{-\frac{b}{a}\}$
En efecto:
Consideramos la ecuación lineal con una incógnita $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
ax + b &= 0 && \\
ax + b - b &= 0 - b && \text{restamos m.a.m -b} \\
ax &= -b && \\
\frac{ax}{a} &= -\frac{b}{a} && \text{multiplicamos m.a.m por } \frac{1}{a} \ (a \neq 0) \\
x &= -\frac{b}{a} &&
\end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

- **Ejemplo 1:**

$$-3(x-2) = 2x + 11$$

Aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro

$$-3x + 6 = 2x + 11$$

Sumamos m.a.m la expresión -2x-6

$$-3x + 6 - 2x - 6 = 2x + 11 - 2x - 6$$
$$-3x - 2x = 11 - 6$$
$$-5x = 5$$

Multiplicamos m.a.m por $-\frac{1}{5}$

$$(-\frac{1}{5}) \cdot -5x = -\frac{1}{5} \cdot 5$$
$$x = -1$$

Luego el conjunto solución de la ecuación $-3(x-2) = 2x + 11$ es $S = \{-1\}$

Comprobemos que -1 satisface la ecuación, para ello reemplazamos el valor -1 en cada aparición de x

$$-3 \cdot (-1 - 2) = 2 \cdot (-1) + 11$$

Resolvemos por separado cada miembro de la igualdad

$$-3 \cdot (-3) = -2 + 11$$
$$9 = 9$$

Como la última igualdad es válida, $S = \{-1\}$ es el conjunto solución.

- **Ejemplo 2:**

$$\frac{2x-2}{3} = \frac{x+5}{2}$$

Multiplicamos m.a.m por 6 que es el mcm(2,3)

$$6\left(\frac{2x-2}{3}\right) = 6\left(\frac{x+5}{2}\right)$$
$$2(2x-2) = 3(x+5)$$

Aplicamos la propiedad distributiva en ambos miembros

$$4x-4 = 3x+15$$

Sumamos m.a.m la expresión $-3x+4$

$$4x-4-3x+4 = 3x+15-3x+4$$
$$4x-3x = 15+4$$
$$x = 19$$

Luego el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{2x-2}{3} = \dfrac{x+5}{2}$ es $S = \{19\}$

Comprobemos que 19 es solución:

$$\frac{2\cdot 19-2}{3} = \frac{19+5}{2}$$
$$\frac{38-2}{3} = \frac{24}{2}$$
$$\frac{36}{3} = 12$$
$$12 = 12$$

- **Ejemplo 3:**

$$2\left(\frac{1}{3}x-2\right) - \frac{1}{4}x = -2x + \frac{x-2}{3} + 5$$

Aplicamos la propiedad distributiva en ambos miembros

$$\frac{2}{3}x - 4 - \frac{1}{4}x = -2x + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 5$$

Sumamos m.a.m la expresión $2x - \frac{1}{3}x + 4$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 4 - \frac{1}{4}x + 2x - \frac{1}{3}x + 4 &= -2x + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 5 + 2x - \frac{1}{3}x + 4 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x + 2x - \frac{1}{3}x &= -\frac{2}{3} + 5 + 4 \end{aligned}$$

Aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro y resolviendo el segundo miembro

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{3}\right)x = \frac{25}{3}$$

Resolvemos el paréntesis del primer término

$$\frac{25}{12}x = \frac{25}{3}$$

Multiplicamos m.a.m por $\frac{12}{25}$

$$\begin{aligned} \frac{12}{25} \cdot \frac{25}{12}x &= \frac{12}{25} \cdot \frac{25}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación $2\left(\frac{1}{3}x - 2\right) - \frac{1}{4}x = -2x + \frac{x-2}{3} + 5$ es $S = \{4\}$

Comprobemos que 4 es solución:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{3} \cdot 4 - 2\right) - \frac{1}{4} \cdot 4 &= -2 \cdot 4 + \frac{4-2}{3} + 5 \\ 2\left(\frac{4}{3} - 2\right) - 1 &= -8 + \frac{2}{3} + 5 \\ 2\left(-\frac{2}{3}\right) - 1 &= -\frac{7}{3} \\ -\frac{4}{3} - 1 &= -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ocasionalmente nos encontramos con expresiones que aparentan ser ecuaciones lineales con una incógnita y que sin embargo no tienen solución o tienen infinitas soluciones.

- **Ejemplo 4:**

$$
\begin{aligned}
2x+7 &= 2(x+4) \\
2x+7 &= 2x+8 \\
2x+7-2x-7 &= 2x+8-2x-7 \\
2x-2x &= 8-7 \\
0x &= 1
\end{aligned}
$$

La última ecuación **no tiene solución** pues no existe ningún número real que multiplicado por 0 de por resultado 1. En general las ecuaciones de la forma $0x = b$ con $b \neq 0$ no tienen solución. Su conjunto solución es $S = \emptyset$

- **Ejemplo 5:**

$$
\begin{aligned}
3x+5 &= 3(x+2)-1 \\
3x+5 &= 3x+6-1 \\
3x+5-3x-5 &= 3x+6-1-5 \\
3x-3x &= 6-1-5 \\
0x &= 0
\end{aligned}
$$

La última ecuación **tiene infinitas soluciones** pues todo número real multiplicado por 0 da por resultado 0. Su conjunto solución es $S = \mathbb{R}$

Problemas que se resuelven mediante ecuaciones lineales

Plantear una o más ecuaciones a partir de un problema, consiste en traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer.
Es fundamental leer con atención y releer el enunciado del problema, hasta entender perfectamente su significado. Después es conveniente seguir estas etapas:

1) Identificación de datos conocidos e incógnita: se detalla todo lo que se sabe (datos conocidos) y lo que deseamos conocer (las incógnitas).

2) Planteo de las ecuaciones: se relaciona con igualdades (ecuaciones) los datos con las incógnitas.

3) Resolución de las ecuaciones: se transforma cada ecuación planteada en otras equivalentes y más sencillas de resolver.

4) Comprobación de resultados: se verifica que las soluciones encontradas satisfacen la ecuación original.

5) Discusión de las soluciones: se trata de ver si las soluciones obtenidas son aceptables para el problema propuesto.

Recuerde que la tarea matemática consiste en gran medida en resolver problemas. Hay algunos aparentemente sencillos que le pueden llevar mucho tiempo, incluso aunque tenga a su disposición todas las herramientas necesarias.

Problema 1:
Al sumar un mismo número a los dos términos de la fracción $\frac{8}{3}$ obtenemos otra equivalente a $\frac{4}{5}$ ¿Cuál es el número que se ha sumado?

Resolvamos el problema siguiendo las etapas propuestas:

1) *Identificación de datos conocidos e incógnita:* llamamos x al número que se le suma al numerador y denominador. Debe ocurrir que $\frac{8+x}{3+x}$ sea equivalente a $\frac{4}{5}$.

2) *Planteo de la ecuación:* Por ser fracciones equivalentes debe verificarse que:

$$\frac{8+x}{3+x} = \frac{4}{5}$$

3) *Resolución de la ecuación:*

$$\frac{8+x}{3+x} = \frac{4}{5}$$
$$5(8+x) = 4(3+x)$$
$$40+5x = 12+4x$$
$$5x-4x = 12-40$$
$$x = -28$$

4) *Comprobación de resultados:* Debemos comprobar que $\dfrac{8+(-28)}{3+(-28)}$ es equivalente a $\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{8+(-28)}{3+(-28)} = \dfrac{-20}{-25} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$

5) *Discusión de las soluciones:* El número que se ha sumado es -28.

Problema 2:

En el curso de 2º A hay cierto número de alumnos. El curso 2º B tiene la mitad de los de 2º A más 10 alumnos y 2º C tiene la mitad de 2º A más 8 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo si hay 92 alumnos que cursan 2º?

1) *Identificación de datos conocidos e incógnita:* llamamos x al número de alumnos de la clase de 2º A

Curso	2º A	2º B	2º C
Alumnos	x	$\frac{x}{2}+10$	$\frac{x}{2}+8$

2) *Planteo de la ecuación:* Para expresar que entre los tres cursos hay 92 alumnos escribimos:

$$x + \left(\frac{x}{2}+10\right) + \left(\frac{x}{2}+8\right) = 92$$

3) *Resolución de la ecuación:*

$$
\begin{aligned}
x + \left(\frac{x}{2} + 10\right) + \left(\frac{x}{2} + 8\right) &= 92 \\
x + \frac{x}{2} + 10 + \frac{x}{2} + 8 &= 92 \\
x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} &= 92 - 10 - 8 \\
\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) x &= 74 \\
2x &= 74 \\
x &= \frac{74}{2} \\
x &= 37
\end{aligned}
$$

4) *Comprobación de resultados:* Comprobamos que el valor hallado de x satisface la ecuación:

$$
\begin{aligned}
37 + \left(\frac{37}{2} + 10\right) + \left(\frac{37}{2} + 8\right) &= 92 \\
37 + \frac{57}{2} + \frac{53}{2} &= 92 \\
92 &= 92
\end{aligned}
$$

5) *Discusión de las soluciones:* Si en 2º A hay 37 alumnos, en 2º B son $\frac{37}{2} + 10 = \frac{57}{2}$ y en 2º C son $\frac{37}{2} + 8 = \frac{53}{2}$. Esta solución satisface la ecuación, pero como no puede haber, por ejemplo $\frac{57}{2}$ de alumnos en 2º B, la situación descrita en el problema es imposible.

Por ejemplo el problema tendría solución si la cantidad total de alumnos en 2º año fuese 94.

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es de la forma: $\boxed{ax + by = c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}}$ y a y b no simultáneamente nulos.
Como veremos en el próximo capítulo este tipo de ecuaciones representan rectas del plano xy.
La diferencia con las ecuaciones lineales con una incógnita es que el conjunto solución es un conjunto infinito de pares de valores (uno correspondiente a x y otro a y), por ejemplo; consideremos la ecuación: $2x - y = 3$ (1)
Despejando la variable y, obtenemos: $y = 2x - 3$ Entonces para cada valor de x que demos, tendremos un valor de y y este par de números será una solución de la ecuacion (1). Así los pares (2,1); (0,-3) y (4,5) son solución de (1), en efecto:
$2 \cdot 2 - 1 = 3;$ $\quad 2 \cdot 0 - (-3) = 3;$ $\quad 2 \cdot 4 - 5 = 3$

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un conjunto formado por dos ecuaciones con dos incógnitas. Lo que caracteriza al sistema es que se busca una o más soluciones que sean soluciones de todas las ecuaciones planteadas en el sistema. Es decir que verifique simultáneamente ambas ecuaciones.
Indicaremos un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2.2.1. Tipos de solución

Consideremos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Como (1) y (2) representan rectas del plano xy pueden suceder los siguientes casos:

- Las rectas son oblicuas.
  En este caso las rectas se cortan en un único punto $P = (x, y)$, como este punto pertenece a ambas rectas, satisface ambas ecuaciones simultáneamente y será solución del sistema.

- Las rectas son coincidentes.
  En este caso las rectas tienen en común todos sus puntos. Luego todos los puntos son

solución simultanea de ambas ecuaciones y por lo tanto el sistema tendrá infinitas soluciones.

- Las rectas son paralelas.
  En este caso las rectas no se cortan en ningún punto, entonces no existe ningún punto que pertenezca a ambas rectas y por lo tanto sea solución del sistema. Luego el sistema no tendrá solución.

Teniendo en cuenta el análisis anterior de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones, los clasificamos como sigue:

Sistema compatible: Admite solución.
Sistema compatible determinado: Admite una única solución.
Sistema compatible indeterminado: Admite infinitas soluciones.
Sistema incompatible: No admite solución.

$$\text{Tipo de sistemas} \begin{cases} \text{Compatibles} \begin{cases} \text{Determinados} \\ \\ \text{Indeterminados} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatibles} \end{cases}$$

2.3. Métodos de resolución

2.3.1. Método de reducción

El método de reducción consiste en:

(I) Multiplicar cada una de las ecuaciones del sistema por un número no nulo, de forma que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales pero cambiados de signo.

(II) Conseguido esto, se suman las ecuaciones obtenidas para eliminar esa incógnita, dando lugar a una ecuacion con una incógnita, que se resuelve haciendo las operaciones necesarias.

(III) Conocida una de las incógnitas se sustituye su valor en una de las ecuaciones originales y se calcula la segunda.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(I) Multiplicamos la primera ecuación por 3.

$$\begin{cases} 9x - 3y = 21 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(II) Sumamos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{c} 9x - 3y = 21 \\ 2x + 3y = 1 \\ \hline 11x + 0y = 22 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} 11x &= 22 \\ x &= \frac{22}{11} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III) Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones originales y se despeja la otra incógnita.
Por ejemplo en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + 3y &= 1 \\ 4 + 3y &= 1 \\ 3y &= 1 - 4 \\ 3y &= -3 \\ y &= \frac{-3}{3} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(2, -1)\}$

2.3.2. Método de sustitución

El método de sustitución consiste en:

(I) Despejar una de las incognitas de *una* de las ecuaciones.

(II) Sustituir la expresión obtenida en la *otra* ecuación, de donde resultará una ecuación con una incognita y resolver.

(III) Conocida la incógnita del paso (II) se sustituye su valor en la ecuación del paso (I) y se calcula la segunda.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(I) Despejemos y de la primera ecuación.

$y = 3x - 7$

(II) Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos.

$$\begin{aligned} 2x + 3(3x - 7) &= 1 \\ 2x + 9x - 21 &= 1 \\ 2x + 9x &= 1 + 21 \\ 11x &= 22 \\ x &= \frac{22}{11} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III) Reemplazamos en la ecuación del paso (I).

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2 - 7 \\ y &= 6 - 7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(2, -1)\}$

2.3.3. Método de igualación

El método de igualación consiste en:

(I) Despejar una de las incognitas de *ambas* ecuaciones.

(II) Igualar las expresiones obtenidas, dedonde resultará una ecuación con una incógnita y resolver.

(III) Conocida la incógnita del paso (II) se sustituye su valor en alguna de las ecuaciones del paso (I) y se calcula la segunda.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(I) Despejemos de ambas ecuaciones la variable y.

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = \dfrac{1-2x}{3} \end{cases}$$

(II) Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos.

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= \frac{1-2x}{3} \\ 3(3x-7) &= 1 - 2x \\ 9x - 21 &= 1 - 2x \\ 9x + 2x &= 1 + 21 \\ 11x &= 22 \\ x &= \frac{22}{11} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III) Reemplazamos en alguna de las ecuaciones de (I), por ejemplo la primera.

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2 - 7 \\ y &= 6 - 7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(2, -1)\}$

2.4. Ecuación de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita**, una vez simplificada y ordenada tiene como expresión canónica: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \ y \ a \neq 0}$
La ecuación cuadrática es de gran importancia en diversos campos, ya que junto con las ecuaciones lineales, permiten modelar un gran número de relaciones y leyes.

2.4.1. Soluciones de una ecuación de segundo grado completa.

Dada una ecuación de segundo grado con una incógnita: $ax^2 + bx + c = 0$ sabemos que $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, decimos que la ecuación es **completa** si además se verifica que $b \neq 0$ y $c \neq 0$
Las soluciones de esta ecuación se calculan mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

conocida como fórmula de Bhaskara.
El doble signo $\pm$ que precede a la raíz indica que puede haber dos soluciones, llamadas también raíces de la ecuación cuadrática:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión subradical $b^2 - 4ac$ se llama discriminante y y lo simbolizamos con Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La ecuación cuadrática puede tener dos, una o ninguna solución real. La cantidad de soluciones depende de que el discriminante sea positivo, cero o negativo.

- $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
  Ejemplo:
  Encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$
  Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$
  Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ \\ x_2 = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

La ecuación tiene dos raíces reales y distintas $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$.

- $\Delta = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y coincidentes. (se le llama raíz doble)
  Ejemplo:
  Encontrar las soluciones de la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$
  Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$
  Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+0}{8} = \dfrac{1}{2} \\ \\ x_2 = \dfrac{4-0}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  En este caso se dice que la ecuación tiene dos raíces reales coincidentes, $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ o que tiene una raíz doble.

- $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.
  Ejemplo:
  Encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$
  Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$
  Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{R}$$

  La ecuación no tiene raíces reales, es decir, no tiene solución en $\mathbb{R}$.

2.4.2. Soluciones de una ecuación de segundo grado incompleta.

En la ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ podemos distinguir tres términos: el término cuadrático ax^2 , el término lineal bx y el término independiente c . Por ser de segundo grado, el término cuadrático siempre aparece ($a \neq 0$), pero puede suceder que falte alguno de los otros dos o ambos. En estos casos se dice que la ecuación es incompleta.

• Si $b = 0$, la ecuación no tiene término lineal: $ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$ y $c \neq 0$.
Se resuelve despejando x:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \text{ entonces } \mid x \mid = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ entonces } \begin{cases} x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $2x^2 - 32 = 0$

$$x^2 = \frac{32}{2} \text{ entonces } \mid x \mid = \sqrt{16} \text{ entonces } \begin{cases} x_1 = \sqrt{16} = 4 \\ \\ x_2 = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$$

• Si $c = 0$, la ecuación no tiene término independiente: $ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
Para resolver sacamos factor común x:
$x(ax + b) = 0$
Teniendo en cuenta que el producto de dos o mas factores es cero, cuando al menos uno de ellos es cero, resulta:

$$\text{Si } x(ax + b) = 0 \text{ entonces } \begin{cases} x = 0 \\ \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 - 2x = 0$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ entonces } x(x - 2) = 0 \text{ entonces } \begin{cases} x = 0 \\ \\ x - 2 = 0 \quad \text{entonces} \quad x = 2 \end{cases}$$

• Si $b = 0$ y $c = 0$ entonces la ecuación se reduce a: $ax^2 = 0$
Para este caso resulta que las soluciones son $x_1 = x_2 = 0$

2.4.3. Soluciones de una ecuación de segundo grado factorizada.

Dada la ecuación cuadrática $3x^2 - 6x - 9 = 0$, es posible expresarla como producto de factores.
Si nos encontramos con una igualdad como por ejemplo:
$3(x-3)(x+1) = 0$
estamos frente a una ecuación de segundo grado donde el primer miembro está expresado como producto de 3 factores.
Para que ese producto sea cero es necesario que alguno de sus factores sea cero.

$$3(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ o \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ o \\ x = -1 \end{cases}$$

Si aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro de la ecuación, podemos obtener la expresión general de la ecuación cuadrática:
$3(x-3)(x+1) = 3(x^2 + x - 3x - 3) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$
cuyas raíces son exactamente $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, en efecto:
Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 144$
Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 12}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6 + 12}{6} = 3 \\ \\ x_2 = \dfrac{6 - 12}{6} = -1 \end{cases}$$

En general la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede expresar como producto de factores de la siguiente manera: $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$
donde a es el coeficiente del término cuadrático y x_1, x_2 son las raíces de la ecuación.

2.4.4. Resolución de ecuaciones de grado 4 con exponentes pares.

Otro conjunto particular de ecuaciones, a las cuales se les puede aplicar la teoría desarrollada en este capítulo, son las ecuaciones polinomiales de grado 4 con exponentes pares. En las mismas, un adecuado cambio de variable permite reducir el cálculo a la resolución de una ecuación de segundo grado. Por ejemplo, sea la siguiente ecuación de cuarto grado:
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
Notemos que esta ecuación puede escribirse de la forma
$(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0 \quad (1)$
es decir, es una ecuación de segundo grado con incógnita x^2. Denotemos provisoriamente a x^2 con la letra u. Entonces, la ecuación (1) se escribe en términos de u como:
$u^2 - 5u + 4 = 0 \quad (2)$
Usamos la fórmula de Bhaskara para encontrar u_1 y u_2:

Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ \\ x_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

Entonces las raíces de (2) son $u_1 = 4$ y $u_2 = 1$, luego las raíces de la ecuación (1) serán:

$$u = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

2.5. Ejercitación

Ejercicio 15 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

a) $2x + 5 = 2$ Rta: $x = -\frac{3}{2}$

b) $2 \cdot (3x - 2) - (x + 3) = 8$ Rta: $x = 3$

c) $4x - 27 = -\frac{1}{2}x$ Rta: $x = 6$

d) $\dfrac{3x - 2}{7} = 4$ Rta: $x = 10$

e) $\dfrac{3}{2} \cdot \left(2x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$ Rta: $x = \frac{3}{5}$

f) $\dfrac{2 - 6x}{4} = \dfrac{1 + x}{2}$ Rta: $x = 0$

g) $\dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{5 - 2x}{3}\right) + 4 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{8 - x}{3}\right)$ Rta: $x = \frac{47}{4}$

h) $\dfrac{8x - 7}{4} + \dfrac{9 - 3x}{2} - 1 = x - \dfrac{5 \cdot (2x - 3)}{2}$ Rta: $x = \frac{23}{18}$

i) $3x + 4 - x = 7 + 2x$ Rta: $S = \emptyset$

j) $6 + (2x - 5) - (3x + 4) = \dfrac{x + 1}{2} + 2$ Rta: $x = -\frac{11}{3}$

Ejercicio 16 *Resolver los siguientes problemas usando ecuaciones.*

1) La suma de tres números consecutivos es 69. ¿Cuáles son dichos números?
Rta: 22, 23, 24.

2) El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y este 3 años más que el menor. Si entre todos tienen la edad del padre que tiene 40 años, ¿que edad tiene cada hermano?
Rta: 10, 13, 17.

3) En una caja hay el doble de caramelos de menta que de fresa y el triple de caramelos de naranja que de menta y fresa juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada clase?
Rta: Menta:24, Fresa:12 y Naranja:108.

4) Dos números pares consecutivos suman 474. ¿Cuáles son esos números? *Rta:* 236, 238.

5) En una biblioteca, la tercera parte de los libros son de música, la cuarta parte del resto de los libros son de ciencias sociales y 60 libros son de idioma extranjero. ¿Cuántos libros hay en total en la biblioteca?
Rta: 120.

6) Una dactilógrafa tiene que hacer un trabajo en varios días. El primer día escribe la mitad, el segundo día escribe un tercio de lo que le queda, el tercer día escribe un cuarto de lo restante y el cuarto día termina el trabajo, para lo cual tiene que escribir 15 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el trabajo?
Rta: 60.

7) El perímetro de un rectángulo es de 46 cm. La altura mide 3 cm más que la base. Calcular las longitudes de la base y altura respectivamente.
Rta: Base:10 cm, Altura:13 cm.

8) Martín gastó \$12 de lo que tenia ahorrado en un regalo para su hermano, luego gastó \$3 en golosinas y más tarde se ganó la misma cantidad que tenia ahorrado al principio en un juego. Despues de todo esto, contó su dinero y tenia \$23. ¿Cuánto tenia ahorrado al principio?
Rta: \$19.

9) Hallar un número cuyo quíntuplo disminuido en 17, sea igual a su triplo aumentado en 41.
Rta: 29.

10) Hallar tres números consecutivos de modo que el primero más 5 veces el segundo más 9 veces el tercero, sea igual a 128.
Rta: 7, 8, 9.

Ejercicio 17 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, usando para cada uno un método distinto.*

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$ S={(4,1)}

b) $\begin{cases} y - 3 = -x \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$ S={(3,0)}

c) $\begin{cases} 4x + \frac{1}{2}y = 13 \\ -\frac{1}{3}x - 3y = -7 \end{cases}$ S={(3,2)}

Ejercicio 18 *La suma de dos números es 123 y uno es el doble del otro. ¿De que números se trata?*

Rta: 41 y 82.

Ejercicio 19 *En una juguetería donde se venden bicicletas y triciclos. Juan Pablo dijo que hay 60 ruedas. Javier agregó que hay 5 bicicletas más que triciclos. ¿Cuántos hay de que uno?*

Rta: bicicletas:15, triciclos:10.

Ejercicio 20 *En un bolso hay 40 monedas, todas ellas de \$0,25 y \$0,50. Si en total hay \$16,50. ¿Cuántas monedas de cada valor hay?*

Rta: 14 monedas de \$0,25 y 26 monedas de \$0,50.

Ejercicio 21 *Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron \$80 por persona sola y \$150 por pareja. Si a la fiesta asistieron en total 144 personas y se recaudaron \$10.980 por venta de entradas. ¿Cuántas parejas y cuántas personas solas asistieron a la fiesta?*

Rta: 36 personas solas y 54 parejas.

Ejercicio 22 *Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas:*

i) Calcular el determinante Δ.

ii) Determinar si tiene dos raíces reales distintas, una raíz real doble o no tiene raíces reales.

iii) En caso de tener raíces reales, calcularlas y escribir cada ecuación en su forma factorizada $a(x-x_1)(x-x_2)$.

a) $x^2+x-2=0$

b) $32x^2-20x+3=0$

c) $2x^2-8x+8=0$

d) $3x^2-5x+2=0$

e) $2x^2-8x+9=0$

f) $6x^2-4x+\frac{2}{3}=0$

g) $x^2+2x+3=0$

h) $8x^2+2x-3=0$

Ejercicio 23 *La ecuación de segundo grado $x^2-3hx+9h=0$ tiene dos raices reales iguales.*

a) Indicar cuál es el valor de h, sabiendo que las raíces son positivas.

b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor h hallado en el inciso anterior.

Ejercicio 24 *La ecuación de segundo grado $px^2+10x+p=0$ tiene dos raices reales iguales.*

a) Indicar cuál es el valor de p, sabiendo que las raíces son negativas.

b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor h hallado en el inciso anterior.

Ejercicio 25 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

c) $x^2 + 4 = 0$

d) $2x^2 + 8x = 0$

e) $3x^2 - 7x = 0$

Ejercicio 26 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

a) $x^2 + 2x(x-2) - 11 = -6x + x^2 + 1$

b) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{x+3}{x}$

c) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

d) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x+\frac{3}{2}}{x}$

e) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

3. Funciones

3.1. Introducción

En términos matemáticos, una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro conjunto. Por ejemplo, al ingresar a la Universidad, a cada estudiante se le otorga un número único de legajo. Luego, podríamos decir que *legajo* es una función que le asigna a cada alumno un número. Otro ejemplo sería asignar a cada alumno su mes de cumpleaños, y así *mes de cuampleaños* es una función del conjunto de alumnos al conjunto meses del año. El hecho que dos alumnos cumplan años en el mismo mes no invalida que sea una función, ya que a cada estudiante es posible asignarle solo un mes de cumpleaños. De este modo, al conjunto de alumnos de un curso en particular se le asigna uno de los 12 elementos del conjunto *meses del año*. Del mismo modo, la función *legajo*, a cada estudiante del conjunto *Alumnos de la facultad* le asigna un único número del conjunto *Números de legajo*.
En este capítulo daremos la definición y ejemplos de funciones en general, pero luego nos concentraremos particularmente con funciones entre conjuntos de números.

3.2. Funciones

Definimos a las funciones de la siguiente manera:

• Dados dos conjuntos A y B, una **función** de A en B es una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.

Para indicar que f es una función del conjunto A en el conjunto B lo simbolizamos: $f : A \to B$

A cada elemento a de A le corresponde un único elemento b de B. A este elemento b lo llamamos imagen de a por f, y lo denotamos $f(a) = b$.

3.3. Dominio, codominio e imagen

Dada una función $f : A \to B$, definimos:

(i) $Dom(f) = \{a \in A : \text{existe } b \in B \text{ tal que } f(a) = b\}$ como el dominio de f.

(ii) El conjunto B es el codominio de f.

(iii) $Im(f) = \{b \in B : \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$ como la imagen de f.

Ejemplo 1:
Sean $A = \{\textit{primavera, verano, otoño, invierno}\}$, $B = \{\textit{meses del año}\}$
y la función h que a cada estación del año le asigna el mes en que comienza. Luego:
$h(primavera) = septiembre$
$h(verano) = diciembre$
$h(\textit{otoño}) = marzo$
$h(invierno) = junio$
$Dom(h) = A$, el codominio es B y $Im(h) = \{\textit{septiembre, diciembre, marzo, junio}\}$

Ejemplo 2:
Sea $A = \{agosto, septiembre, octubre\}$, $B = \{30, 31\}$
Consideramos la función g que a cada mes le asigna su cantidad de días. Luego:
$g(agosto) = 31$
$g(septiembre) = 30$
$g(octubre) = 31$

$Dom(g) = A$, el codominio es B y $Im(g) = B$
Notemos que los elementos *agosto* y *octubre* tienen la misma imagen, y que cada uno tiene una única imagen.

En los casos en que A y B son conjuntos de números, es frecuente que la regla que determina a la función pueda ser expresada como una fórmula o expresión algebraica que indica cuál es la correspondencia. Por ejemplo, si consideramos la función f que a cada número le asigna su cuadrado, la regla se puede escribir:

$$f(x) = x^2$$

En esta fórmula, x representa a cualquier elemento de A. Entonces, la imagen de un número en particular se obtiene aplicando la fórmula:

$f(3) = 9$	dado que	$3^2 = 9$
$f(-3) = 9$	dado que	$(-3)^2 = 9$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$	dado que	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
$f(\sqrt{3}) = 3$	dado que	$(\sqrt{3})^2 = 3$

Ejemplo 3:
Si f es la función que a cada número natural le asigna su siguiente, tenemos que f es una función de $I\!N$ en $I\!N$ ($f : I\!N \rightarrow I\!N$), y la fórmula que define a la función f se puede escribir como:

$$f(x) = x + 1$$

Ejemplo 4:
Si $g : I\!R \rightarrow I\!R$ es la función que a cada número le asigna el doble de su cubo, la fórmula que define a g es:

$$g(x) = 2x^3$$

En los casos en que la función está definida por una fórmula, se suele sobreentender que el dominio está dado por el conjunto de números en el que la fórmula se puede aplicar.

Ejemplo 5:

Consideremos la función f que a cada número real le asigna su raíz cuadrada positiva:

$$f(x) = +\sqrt{x}$$

Como la raíz cuadrada está definida sólo para los números positivos o el 0, entonces el dominio de f está dado por:

$$Dom(f) = \{x \in I\!R : x \geq 0\}$$

Ejemplo 6:

Si g es la función que a cada número le asigna su inverso:

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$g(x)$ se puede calcular siempre que x sea distinto de 0. Recordemos que el 0 es el único número real que no tiene inverso. Entonces el dominio de g está dado por:

$$Dom(g) = \{x \in I\!R : x \neq 0\}$$

3.4. Gráficos de funciones

Si f es una función de A en B, y A y B son subconjuntos de números, entonces podemos representar a la función f con un gráfico en el plano $I\!R \times I\!R$. Para ello consideramos un sistema de ejes coordenados que denominamos *eje x (o eje de las abscisas)* y *eje y (o eje de las ordenadas)*, y por cada punto x del dominio dibujamos el par $(x, f(x))$.

• Si A y B son conjuntos de números, y $f : A \to B$ es una función, el **gráfico de** f está determinado por todos los puntos del plano de la forma $(x, f(x))$, con $x \in A$.

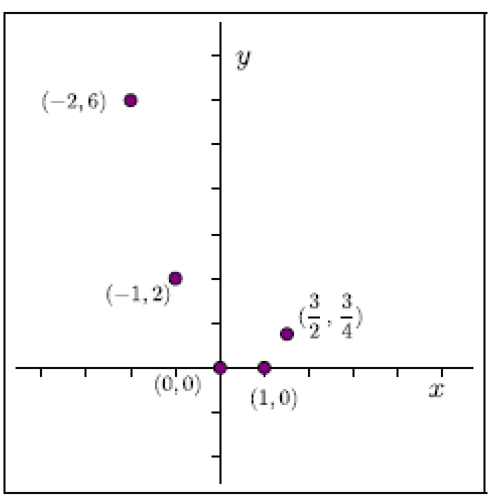
Ejemplo 1:

Si f es la función determinada por la formula $f(x) = x^2 - x$, entonces para encontrar algunos puntos del grafico elegimos puntos del dominio. Por ejemplo, elegimos -2, -1, 0, 1, $\frac{3}{2}$. Con una tabla determinamos los puntos:

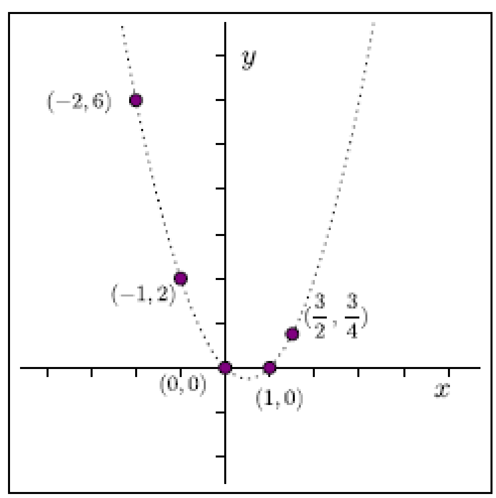
x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	6	$(-2, 6)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	0	$(0, 0)$
1	0	$(1, 0)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

Cuadro 1: Tabla de valores de f

Los valores del Cuadro 1 están representados en la Figura 1 (a).
En la Figura 1 (b) se han representado muchos más puntos del gráfico de f. En general no es fácil determinar el gráfico de una función con sólo marcar algunos puntos, a menos que tengamos otra información sobre la función. Por ejemplo, más adelante veremos que determinadas funciones, llamadas funciones lineales, tienen un grafico en forma de recta. Luego con marcar dos puntos, ya conocemos todo el gráfico.



(a) Puntos de la tabla



(b) Más puntos del gráfico

Figura 1: Gráfico de la función f

El gráfico de una función puede ser una línea curva, una poligonal, una combinación de ambas, o puntos aislados. Pero en ningún caso puede haber dos puntos con la misma coordenada x.
Algunos ejemplos de gráficos de funciones están dados en la Figura 2.

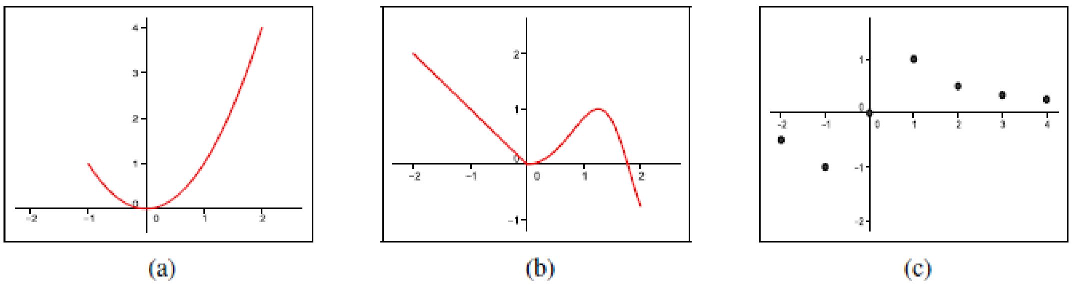


Figura 2: Gráficos de funciones

Notemos que en la Figura 2 (c) el dominio es un conjunto de números $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ que no es un intervalo real, por eso su gráfico es un conjunto de puntos aislados y no una linea continua.
Veamos cómo mejorar esta idea. Si en un gráfico hay dos puntos con la misma coordenada x, entonces no es el gráfico de una función. Esto es así pues si (a, b) y (a, c), con $b \neq c$, pertenecieran al grafico de una función f tendría que ser $f(a) = b$ y $f(a) = c$, y esto no es posible pues, por definición, f le asigna un único valor a a. (Ver Figura 3)

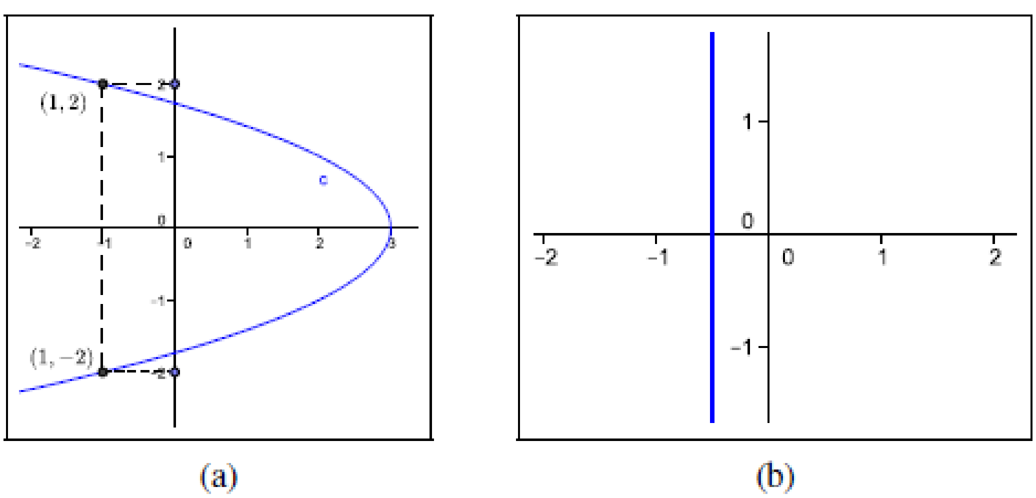


Figura 3: Gráficos que no corresponden a funciones

En general, para determinar si un gráfico no corresponde a una función. Se trazan rectas verticales por los puntos x pertenecientes al dominio de la función, si alguna de estas rectas corta en dos o más puntos al gráfico, este no corresponde a una función.

Ejemplo 2:

Consideremos la función $f : [0, 3] \to I\!R$ dada por:

$$f(x) = 2$$

Entonces el gráfico de f son todos los puntos del plano de la forma $(x, 2)$, con $x \in [0, 3]$. Algunos de estos puntos son:

$$(0, 2); (\frac{3}{2}, 2); (3, 2)$$

y el gráfico es como en la Figura 4:

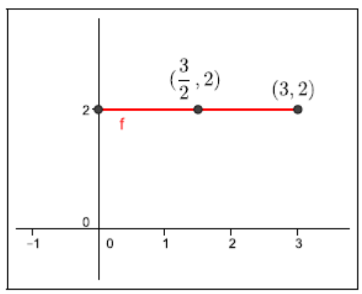


Figura 4: Gráfico de $f(x) = 2$

Ejemplo 3:

Sea $g : I\!R \to I\!R$ dada por $g(x) = x$.

En este caso, no es posible representar a g completamente porque su dominio son todos los números reales. Pero podemos dar el gráfico de g para un intervalo, por ejemplo, para [-1,3].

Su gráfico está conformado por todos los puntos del plano de la forma (x, x), es decir, que tienen las dos coordenadas iguales. Algunos de los puntos del gráfico son:

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (0, 0); (2, 2)$$

(ver Figura 5)

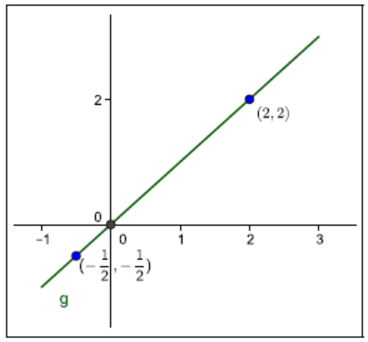


Figura 5: Grafico de $g(x) = x$

• Interpretación de graficos

Más adelante veremos cómo graficar determinadas funciones, como por ejemplo las funciones lineales. En estos casos, la fórmula que define a estas funciones nos da suficiente información para dar un gráfico bastante aproximado.

Ahora bien, ¿por qué querríamos graficar una función? ¿Nos aporta alguna información importante el gráfico o alguna información que no se puede hacer evidente sólo con la fórmula o regla de asignación?

La respuesta es que sí. A partir del gráfico y sin conocer su fórmula, podemos deducir varias propiedades de la función. Por ejemplo, el gráfico nos puede dar información sobre el dominio, la imagen, para qué valores en el dominio la función es positiva, o negativa, o mayor que 1, o igual a -2, o cual es el valor máximo que alcanza la función, o el valor mínimo.

Ejemplo 4:

Consideremos el gráfico de una función f, como se muestra de la Figura 6 a 10:

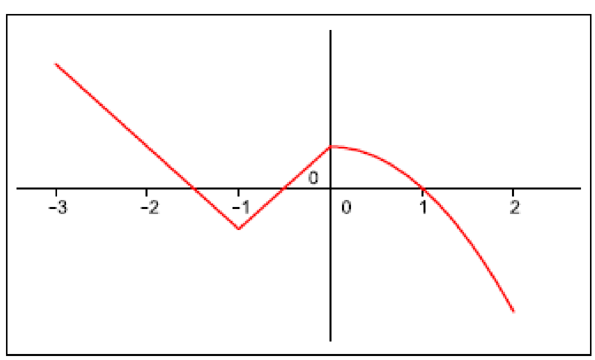


Figura 6: Gráfico de f

Si bien no conocemos la fórmula de la función, observando el gráfico podemos deducir algunas propiedades:

1. *El dominio de f:* es el conjunto de puntos en el eje x que están por debajo o por encima del gráfico. (Ver el trazo grueso sobre el eje x en la Figura 7). Así, el dominio de f se visualiza **sobre el eje x**, y en particular x está en el dominio si la recta vertical que pasa por x corta al gráfico.

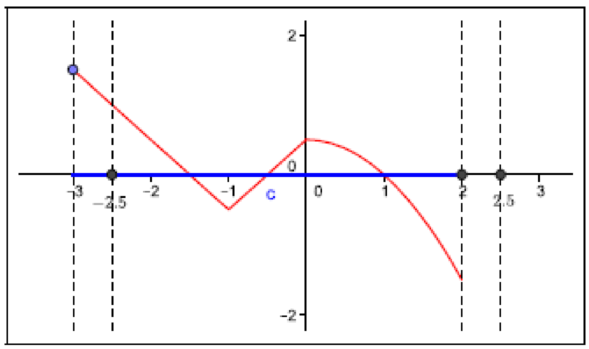


Figura 7: $Dom(f) = [-3, 2]$

Por ejemplo, en la Figura 7 podemos observar que -2,5 pertenece al dominio de la función, y en cambio 2,5 no pertenece.

2. *La imagen de f:* Determinar la imagen de una función a partir de su fórmula no suele ser una tarea sencilla. Pero el gráfico nos permite visualizarlo como aquellos puntos **sobre el eje y** tales que si trazamos una recta horizontal ésta corta al gráfico de la función.

   Si trazamos rectas horizontales por los extremos del gráfico, la imagen de la función quedará encerrada, en el eje y, entre dichas rectas. (Ver Figura 8)

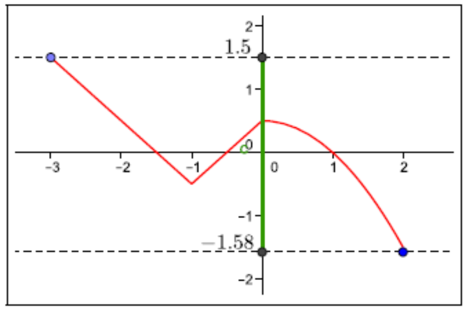


Figura 8: $Im(f) = [-1,5,1,5]$

3. *Los valores de x para los cuales $f(x) \geq 0$:* Para esto observamos las partes del gráfico que corresponden a $f(x) \geq 0$, es decir, la segunda coordenada es positiva o cero. Los valores que estamos buscando son aquellos x que quedan por debajo de esa parte del gráfico:

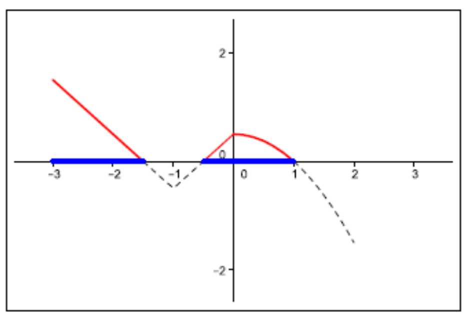


Figura 9: $\{x \in I\!R : f(x) \geq 0\}$

En la Figura 9, vemos que $\{x \in I\!R : f(x) \geq 0\} = [-3,-1,5] \cup [-0,5,1]$.
En caso que quisíeramos determinar para qué valores de x se cumple $f(x) > 0$, tendremos que excluir los puntos donde la función vale 0. Como $f(x) = 0$ para $x = -1,5$, $x = -0;5$ y $x = 1$, resulta $\{x \in I\!R : f(x) > 0\} = [-3,-1,5) \cup (-0,5,1)$

Si ahora queremos ver para qué valores de x se cumple $f(x) = 0,5$, trazamos la recta $y = 0,5$ y marcamos los puntos de intersección con el gráfico de f. En este caso, son los puntos $(0,0,5)$ y $(-2,0,5)$. Luego $f(x) = 0,5$ para $x = -2$ y para $x = 0$. (Ver Figura 10)

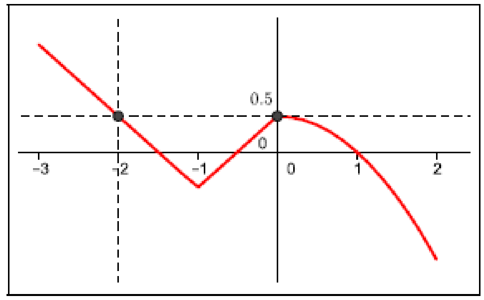


Figura 10: Preimagenes de 0,5

Ejemplo 5: Consideremos una función g con el gráfico de la Figura 11.

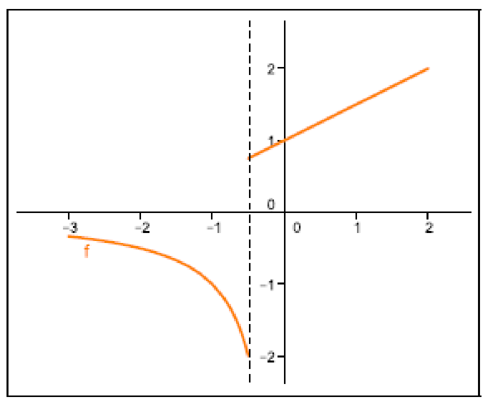
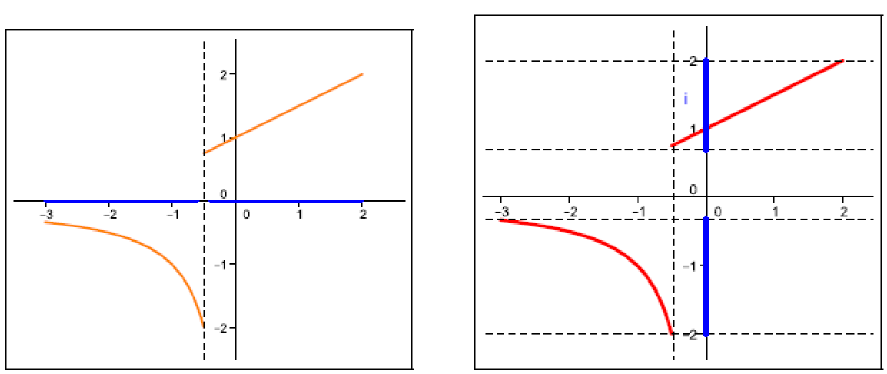


Figura 11: Gráfico de la función g

En este gráfico, la recta vertical $x = -\frac{1}{2}$ no interseca al gráfico de g. Esto nos indica que el punto (-$\frac{1}{2}$) no pertenece al dominio de g.



(a) Dominio de g (b) Imagen de g

Figura 12: Dominio e imagen de g

En la Figura 12 (a) vemos que:

$$Dom(g) = [-3, -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}, 2]$$

Con respecto a la imagen, recordemos que se visualiza sobre el eje y. En este ejemplo, observamos que si bien el gráfico queda encerrado entre las rectas $y = -2$ e $y = 2$, los puntos entre $(-\frac{1}{3})$ y $\frac{3}{4}$ no pertenecen a la imagen de g. La Figura 12 (b) nos muestra que:

$$Im(g) = [-2, -\tfrac{1}{3}) \cup (\tfrac{3}{4}, 2]$$

Por último, si quisiéramos conocer para qué valores de x se cumple que $g(x) = -\frac{1}{2}$, podemos proceder así: trazamos la recta $y = -\frac{1}{2}$, y marcamos todos los puntos de intersección con el gráfico. En este caso hay un solo punto. La coordenada x de dicho punto $(x = -2)$ verifica $g(-2) = -\frac{1}{2}$.

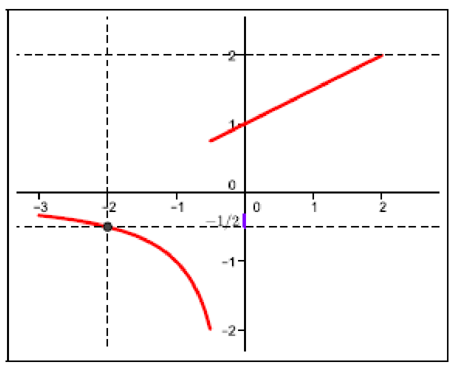


Figura 13: Preimagen de $-\frac{1}{2}$

• **Intersección con el eje x**

Los puntos donde la curva intersecta al eje x son de la forma $(x, 0)$ y se obtienen igualando a cero la expresión de la función, es decir haciendo $f(x) = 0$. A los valores de x para los cuales la función se anula se denominan **ceros de la función.**

• **Intersección con el eje y**

El punto donde la curva intersecta al eje y se obtiene haciendo $x = 0$, siempre que $0 \in Dom(f)$.

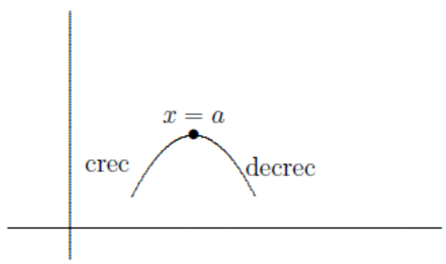
• Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función, $(a, b) \subseteq I\!R$ y $x_1, x_2 \in (a, b)$. Definimos:

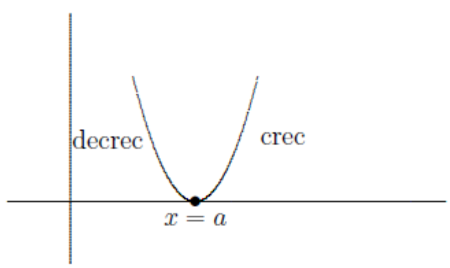
- f es creciente: si $x_1 \leq x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$
- f es estrictamente creciente: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$
- f es decreciente: si $x_1 \leq x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$
- f es estrictamente decreciente: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

• Máximos y mínimos

- Una función $y = f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo cuando a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.



- Una función $y = f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo, si a su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente.



3.5. Función lineal

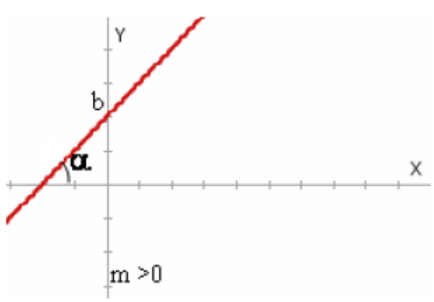
La función $f : I\!R \to I\!R$ es lineal si es de la forma:

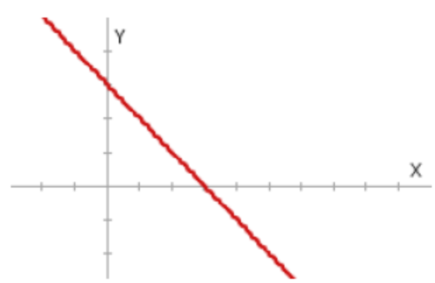
$$f(x) = mx + b$$

con m y b números reales.
La gráfica de la función lineal es una recta. El dominio de la función lineal es el conjunto de los números reales $I\!R$, y la imagen de esta función es $I\!R$ excepto para el caso particular $f(x) = b$, donde la imagen es el conjunto $\{b\}$.

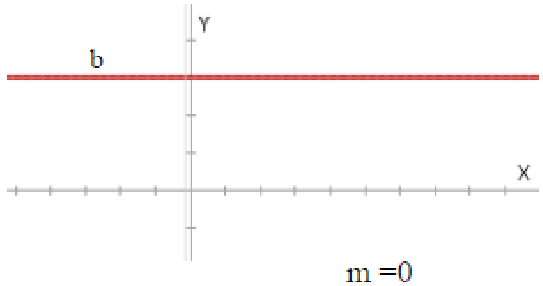
3.5.1. Ecuación explícita de la recta

En la expresión $f(x) = mx + b$, llamada ecuación explícita de la recta, el valor m se denomina la **pendiente** de la recta y está relacionado con la inclinación de la recta del siguiente modo.
Si α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las abscisas, la **pendiente** es la tangente trigonométrica de α: $m = tg\alpha$
Si el ángulo α es agudo, su tangente es positiva, m será positiva, mientras que si α es obtuso, la tangente es negativa por lo tanto tendrá pendiente m negativa. Finalmente $m = 0$ representa a rectas horizontales.
En la expresión $f(x) = mx+b$, a b se le llama **ordenada al origen** por ser el valor donde la recta corta el eje de las ordenadas (eje y).
Gráficamente:





m <0

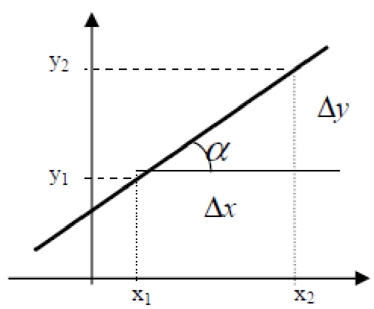


Cálculo de la pendiente de una recta

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ definimos:

Incremento en x: $\Delta x = x_2 - x_1$

Incremento en y: $\Delta y = y_2 - y_1$



La pendiente m de la recta se define como el cociente:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

3.5.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Sean los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, la ecuación de la recta que pasa por ellos queda determinada por la expresión:

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 8)$
Llamemos $P_1 = (-1, 2)$ y $P_2 = (2, 8)$
Luego $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$ e $y_2 = 8$
Reemplazando en la fórmula anterior tenemos:
$y = \dfrac{8 - 2}{2 - (-1)}(x - (-1)) + 2$
Realizando los cálculos necesarios, $y = 2x + 4$

3.5.3. Ecuación de la recta conocidos la pendiente y un punto perteneciente a ella

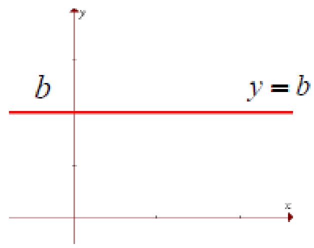
Si se conocen las coordenadas de un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ de la recta y su pendiente m la ecuación de la recta que queda determinada es:

$$\boxed{y = m(x - x_1) + y_1}$$

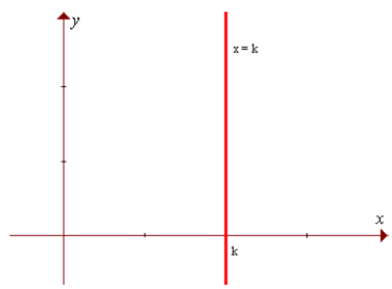
Ejemplo: Sabiendo que una recta pasa por el punto $P = (1, -4)$ y su pendiente es $m = 2$, hallara la ecuación de la recta.
Se reemplaza el la fórmula anterior $x_1 = 1$, $y_1 = -4$ y $m = 2$:
$y = 2(x - 1) + (-4)$
Realizando los cálculos necesarios,
$y = 2x - 6$

3.5.4. Función constante

Una función f es constante si para todo $x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) = k$, con $k = cte$.
Las funciones lineales con pendiente nula son funciones constantes y su ecuación es.
$y = f(x) = b$
Su gráfica es una recta paralela al eje x. El ángulo de inclinación de la recta es de 0°.
El $Dom(f) = \mathbb{R}$ y la $Im(f) = \{b\}$



Además si $b = 0$ entonces $y = 0$, la recta coincide con el eje x.
Las rectas verticales son paralelas al eje y, tienen como ecuación a $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$) y **no son funciones**



3.5.5. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Dadas las rectas $r_1 : y = m_1x + b_1$ y $r_2 : y = m_2x + b_2$, entonces:

- $r_1 \parallel r_2$ si, y sólo si, $m_1 = m_2$
- $r_1 \perp r_2$ si, y sólo si, $m_1 \cdot m_2 = -1$

3.6. Función cuadrática

Se llama función cuadrática a toda función f definida por una expresión de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.
La representación gráfica de una función cuadrática o de segundo grado es una curva llamada parábola.
La expresión $y = ax^2 + bx + c$ recibe el nombre de ecuación explícita de la parábola.

Forma factorizada

Toda función cuadrática se puede factorizar en función de sus raíces.
Dada: $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede factorizar como:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siendo a el coeficiente principal de la función. En el caso de que el discriminante sea igual a 0 entonces $x_1 = x_2$, estamos en presencia de raices dobles, por lo que podemos escribir:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Forma canónica

Toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Llamada forma canónica. Siendo a el coeficiente principal y el par ordenado (x_v, y_v) las coordenadas del vértice de la parábola.

• **Representación gráfica de una función cuadrática.**

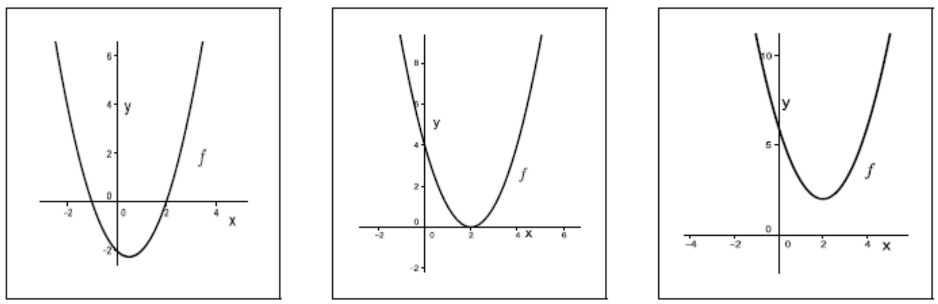
Para realizar la construcción del gráfico de una función cuadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, no es necesario confeccionar una tabla. Sólo es suficiente tener en cuenta las características que posee una parábola: su **eje de simetría**, su **vértice**, los **puntos de intersección con el eje x** (si existen) y el **punto de intersección con el eje y** (ordenada al origen).

- Análisis del coeficiente principal a:
  Si $a > 0$ entonces la ramas de la parábola están dirigidas hacia arriba,
  Si $a < 0$ entonces las ramas de la parábola están dirigidas hacia abajo.

- Intersección con el eje x:
  Si la parábola corta al eje x, los puntos de intersección se hallan haciendo
  $y = f(x) = 0$, esto es resolviendo la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$
  Como ya sabemos se pueden presentar los siguientes casos:
  (a) La ecuación tiene dos raíces reales y distintas, en este caso la curva corta al eje x en dos puntos distintos, $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$
  (b) La ecuación tiene dos raíces reales y coincidentes, en este caso la curva corta al

eje x en un sólo punto, $(x_1, 0)$

(c) La ecuación no tiene raíces reales, en este caso la curva no corta al eje x.



(a) (b) (c)

- Intersección con el eje y:

  Este punto se halla haciendo $x = 0$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$, por lo tanto la curva corta al eje y en el punto $(0, c)$

- Coordenadas del vértice, $V = (x_v, y_v)$:

  Las coordenadas pueden encontrarse por las ecuaciones:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$\boxed{y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c}$$

  otra forma de encontrar la coordenada x_v sin necesidad de hallar previamente las raíces es mediante la ecuación:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

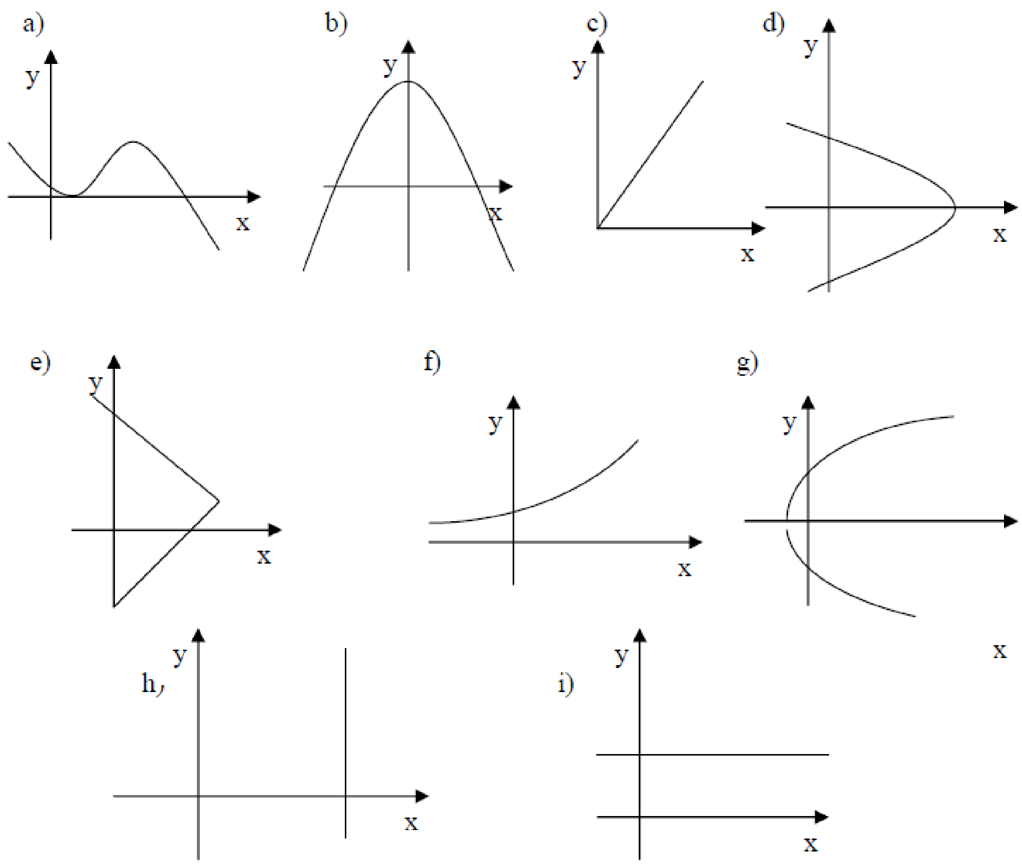
- Eje de simetría:

  El eje de simetría es una recta vertical que pasa por el vértice, entonces tendra por ecuación:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3.7. Ejercitacion

Ejercicio 27 *Indicar si los siguientes gráficos representan funciones.*



Ejercicio 28 *Determinar el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 2x + 7$

b) $g(x) = +\sqrt{x-2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+3}{x+5}$

d) $s(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

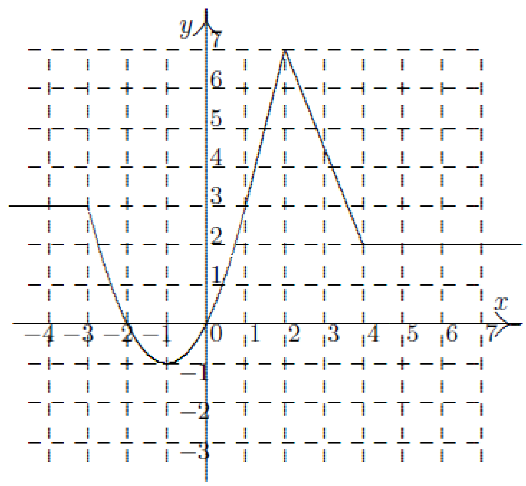
e) $r(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3}$

Ejercicio 29 *En la gráfica de la siguiente función:*

a) Determinar dominio, codominio e imagen.

b) Indicar en que intervalos la función es creciente, en cuáles decreciente y en cuáles constante.

c) Indicar, si existen, los valores de x donde se alcanza un máximo o un mínimo.



Ejercicio 30 *El gráfico muestra las ganancias, en pesos, de una heladería a lo largo de un año.*

a) ¿Cuáles son las variables relacionadas?

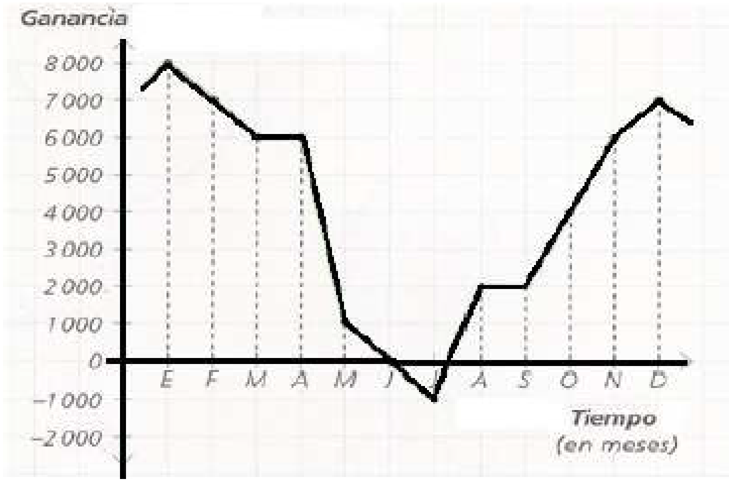
b) Indicar los períodos de crecimientos de las ganancias de la heladería.

c) ¿Hubo períodos en que las ganancias se mantuvieron constantes? ¿Cuáles?

d) ¿Durante que períodos disminuyeron las ganancias de la heladería?

e) ¿Qué sucedió en el mes de Junio?

f) ¿En qué mes las ganancias alcanzaron su valor máximo? ¿Y el mínimo?



Ejercicio 31 *Dada la gráfica de la siguiente función, determinar:*

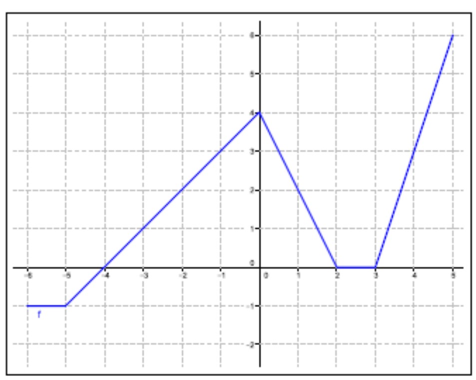
a) *El dominio de* f.

b) *La imagen de* f.

c) *Los valores de* x *donde* $f(x) \leq 3$

d) *Los valores de* x *donde* $f(x) > 3$

e) $f(3)$ *y* $f(-2)$



Ejercicio 32 *Representar gráficamente las siguientes funciones lineales, indicando en cada caso pendiente y ordenada al origen.*

a) $y = 2x$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = \frac{1}{4}x - 1$

d) $y = -\frac{1}{2}$

e) $y = 2x + \frac{3}{2}$

f) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

g) $2(x + y - 5) = 8$

h) $\dfrac{x + 2y - 6}{4} = 4$

Ejercicio 33 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2. Graficar.*

a) $P_1 = (-5, 0)$ y $P_2 = (0, 2)$

b) $P_1 = (2, -1)$ y $P_2 = (3, 2)$

c) $P_1 = (4, 1)$ y $P_2 = (-2, 3)$

d) $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (-2, 4)$

e) $P_1 = (2, -8)$ y $P_2 = (-1, 7)$

Ejercicio 34 *Hallar la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto P. Graficar.*

a) $m = 2,\ P = (-1, 3)$

b) $m = -\frac{4}{3},\ P = (3, -1)$

c) $m = -1,\ P = (-2, -2)$

d) $m = \frac{1}{2},\ P = (1, 4)$

Ejercicio 35 *Dada la recta de ecuación $y = 3x + 1$:*

a) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto $P = (3, -2)$.

b) Hallar la ecuación de la recta paralela a la dada que pasa por el punto $Q = (-2, 1)$.

c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 36 *Dada la recta de ecuación* $y = \frac{2}{3}x + 1$*:*

a) *Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto* $P = (6, -\frac{3}{2})$.

b) *Encontrar el punto intersección de ambas rectas.*

c) *Graficar.*

Ejercicio 37 *Un plomero tiene la tarifa siguiente: por acudir a reparar, $100 y por cada hora de trabajo, $50. En este caso no hay que tener en cuenta el gasto del material utilizado.*

a) *¿Cuánto cuesta una hora de trabajo? ¿Y dos horas?*

b) *Escribir la fórmula de la función que relaciona el costo final de reparación en pesos con el número de horas trabajadas.*

c) *Representar gráficamente el costo en función del tiempo.*

d) *El importe ha resultado ser $350. Calcular el tiempo invertido por el plomero.*

Ejercicio 38 *Por alquilar un auto, una empresa cobra $500 por día más un plus de $5 por cada kilómetro recorrido.*

a) *Hallar la función que representa el precio abonado por día en función de los kilómetros recorridos.*

b) *¿Cuántos Km se han recorrido si se abonan $650?*

c) *¿Cuánto se abona si se recorren 43 km?*

Ejercicio 39 *Dadas las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $y = x^2 + 2x - 3$

b) $y = (x - 1)^2 - 1$

c) $y = x^2 - 4$

d) $y = x^2 + 6x + 9$

e) $y = -2x^2 + 3x + 2$

f) $y = x^2 + 2x + 1$

g) $y = (x - 2)^2 + 3$

h) $y = -x^2 - 2x - 3$

i) $y = 2(x - 4)(x + 2)$

j) $y = -(x - 1)(x + 1)$

(i) Indicar cuáles están en forma polinómica, cuáles en forma canónica y cuáles en forma factorizada.

(ii) Encontrar en cada caso: raíces (si existen), vertice, eje de simetría, ordenada al origen.

(iii) Escribir la forma factorizada de cada función cuadrática.

(iv) Representar gráficamente todas las parábolas

(v) Indicar dominio e imagen en cada caso.

(vi) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Para qué valor de x hay un máximo o un mínimo?

Ejercicio 40 *Completar el cuadro siguiente y graficar.*

función	raíces	vértice	eje de simetría	dominio	Imagen
$y = 2x^2 + 12x + 16$					
$y = -2x^2 + 4x$					
$y = x^2 - 6x + 10$					
$y = x^2 - 8x + 16$					
$y = x^2 + 1$					

Ejercicio 41 *Sea* $f(x) = ax^2 - 4x - 6$*:*

a) ¿Cuánto debe valer a *para que el eje de simetría sea la recta de ecuación* $x = 1$*?*

b) Representar gráficamente la función y dar dominio e imagen.

c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) ¿Para qué valor de x *la función alcanza su máximo o mínimo?*

Ejercicio 42 *Dada la función cuadratica* $y = -x^2 + x + k$*:*

a) Hallar el valor de k *para que la función tenga una raíz doble.*

b) Con el valor de k *encontrado en el inciso anterior, encontar: raíces, vértice, eje de simetría y ordenada al origen.*

c) Representar gráficamente la parábola.

d) Encontrar intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hallar el valor de x *donde la función alcanza su máximo o mínimo.*

e) Dar dominio e imagen.

4. Vectores en el plano

4.1. Escalares y vectores

Muchas magnitudes geométricas o físicas, como área, volumen, temperatura, masa y tiempo, se pueden caracterizar mediante números reales en una escala adecuada de medida. Se les denomina **magnitudes escalares**, y el número real asociado con cada una de ellas se llama un **escalar**.
Otras magnitudes, como fuerza, velocidad y aceleración, involucran un valor numérico y una direción, de modo que no se pueden representar completamente por un número real. Como muestra la Figura 14, para representar tales magnitudes se utiliza un **segmento rectilineo dirigido**. La **longitud** (o **módulo**) del segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, con **punto inicial** P y **punto final** Q, se denota por $|\overrightarrow{PQ}|$.

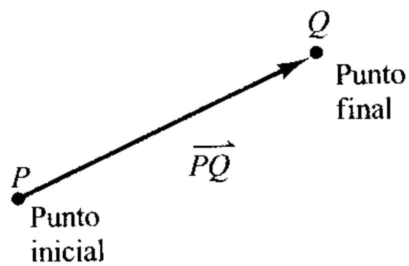


Figura 14: Segmento dirigido

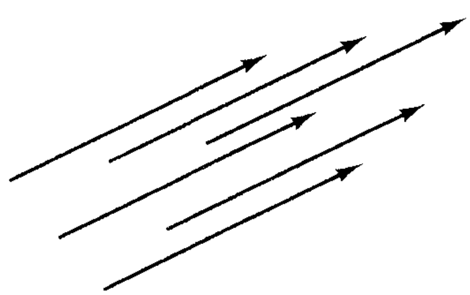


Figura 15: Segmentos dirigidos equivalentes

Segmentos como los de la Figura 15, de igual longitud y dirección, se dice que son **equivalentes**. El conjunto de todos los segmentos dirigidos equivalentes a un segmento dirigido dado $\overrightarrow{PQ}$ es un **vector en el plano** y se denota por $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Es importante tener presente que un vector en el plano admite representación mediante muchos segmentos dirigidos distintos, concretamente todos los que tienen su misma longitud y apuntan en su misma dirección.
El segmento dirigido con punto inicial en el origen suele resultar el representante más conveniente de un conjunto de segmentos dirigidos equivalentes. Este representante de $\boldsymbol{v}$ se dice que está en **posición canónica**. Un segmento dirigido cuyo punto inicial es el origen puede caracterizarse dando sólo las coordenadas de su punto final $Q = (v_1, v_2)$, como indica la Figura 16.

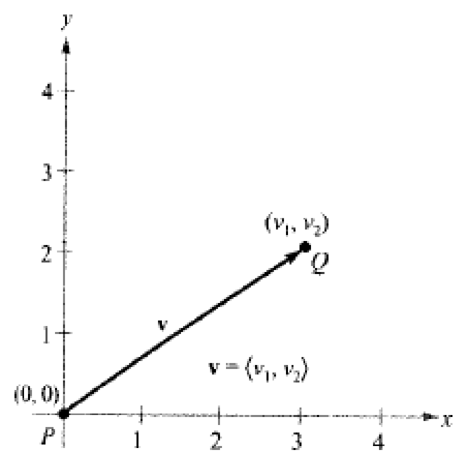


Figura 16: Posición canónica de un vector

4.2. Componentes de un vector

Si $\boldsymbol{v}$ es un vector en el plano con punto inicial en el origen y punto final (v_1, v_2), la **expresion en componentes** de $\boldsymbol{v}$ viene dada por:

$$\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Las coordenadas v_1 y v_2 se llaman las **componentes de $\boldsymbol{v}$**. Si tanto el punto inicial como el final son el origen, $\boldsymbol{v}$ se llama el **vector cero** (o **vector nulo**) y se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$. Esta definición implica que dos vectores $\boldsymbol{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son iguales si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$

Dado un vector $\boldsymbol{v}$, con punto inicial $P = (p_1, p_2)$ y punto final $Q = (q_1, q_2)$, esto es $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$

Las componentes de $\boldsymbol{v}$ vienen dadas por:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \langle (q_1 - p_1), (q_2 - p_2) \rangle}$$

• **Cálculo del módulo y dirección de un vector, conocidas sus componentes:**

Sea el vector $\boldsymbol{v} = \langle v_x, v_y \rangle$ cuyas componentes en x e y son respectivamente v_x y v_y

El módulo de $\boldsymbol{v}$ viene dado por:

$$\boxed{\mid \boldsymbol{v} \mid = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

La dirección de $\boldsymbol{v}$ (ángulo que forma con el semieje positivo de las x) viene dado por:

$$\boxed{\theta = arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)}$$

• **Cálculo de las componentes de un vector, conocidos su módulo y dirección:**

Sea el vector $\boldsymbol{v}$ cuyo módulo es $\mid \boldsymbol{v} \mid$ y su dirección viene dada por el ángulo θ

La componente v_x de $\boldsymbol{v}$ viene dada por:

$$\boxed{v_x = \mid \boldsymbol{v} \mid cos\theta}$$

La componente v_y de $\boldsymbol{v}$ viene dada por:

$$\boxed{v_y = \mid \boldsymbol{v} \mid sen\theta}$$

Dado un vector $\boldsymbol{v}$, se dice que es un vector unitario si $\mid \boldsymbol{v} \mid = 1$. Por otra parte $\mid \boldsymbol{v} \mid = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{v}$ es el vector nulo $\mathbf{0}$.

4.3. Operaciones con vectores

Suma de vectores y multiplicación por un escalar

Sean $\boldsymbol{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ dos vectores y k un escalar ($k \in I\!R$).

(1) La **suma vectorial** de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es el vector $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} =< \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$.

(2) El **multiplo escalar** de k y c es el vector $k\boldsymbol{u} = \langle ku_1, ku_2 \rangle$.

(3) El **opuesto** de $\boldsymbol{v}$ es el vector $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle$.

(4) La **diferencia** de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es el vector $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$.

Gráficamente, el producto de un vector $\boldsymbol{v}$ por un escalar k es un vector que tiene longitud igual a k veces la de $\boldsymbol{v}$ (Figura 17). Si k es positivo, $k\boldsymbol{v}$ apunta en la misma dirección que $\boldsymbol{v}$. Si k es negativo $k\boldsymbol{v}$ apunta en la dirección opuesta a la $\boldsymbol{v}$.

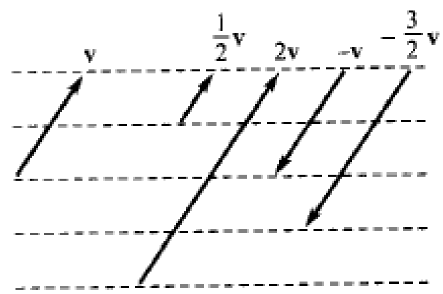


Figura 17: Multiplicación escalar de $\boldsymbol{v}$

Para sumar dos vectores gráficamente, se colocan (sin cambiar sus longitudes y direcciones) con el punto inicial de uno coincidiendo con el punto final del otro, como en la Figura 18. El vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, llamado **vector resultante**, es la diagonal de un paralelogramo que tiene a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ como lados adyacentes.

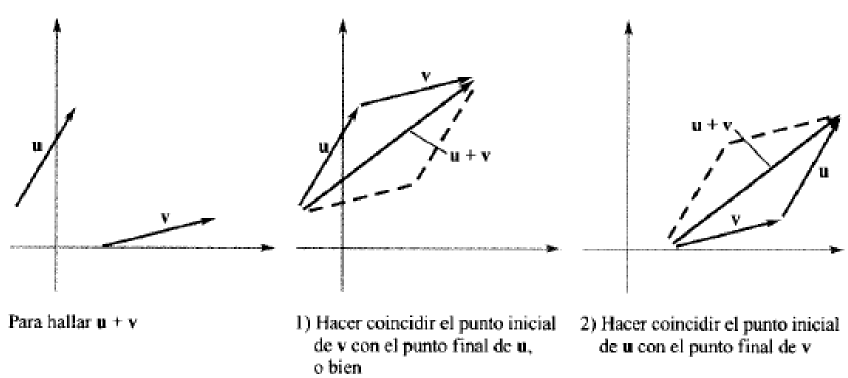


Figura 18:

La Figura 19 ilustra la equivalencia de las definiciones geométrica y algebraica de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar y presenta (a la derecha) una interpretación geométrica de $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$.

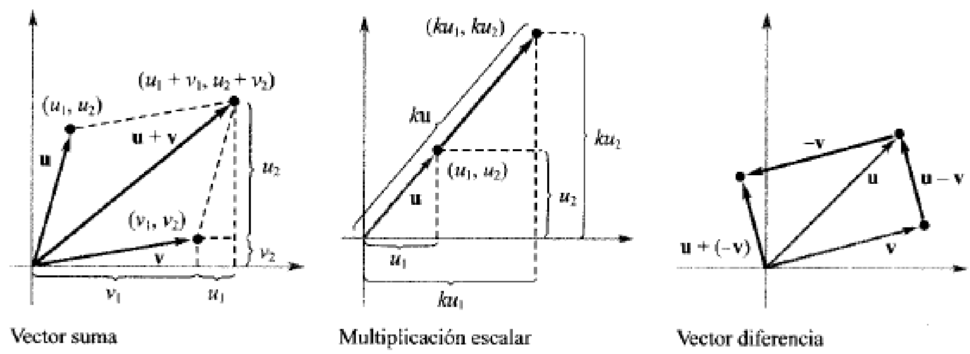


Figura 19:

4.4. Propiedades de las operaciones con vectores

Sea $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores en el plano y $a, b \in I\!R$.

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

(3) $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$

(4) $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$

(5) $a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}$

(6) $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$

(7) $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$

(8) $1(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, $0(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$

Cualquier conjunto de vectores (con un conjunto acompañante de escalares) que satisfaga las propiedades enunciadas constituye un **espacio vectorial**. Esas ocho propiedades son los *axiomas de la estructura de espacio vectorial*. Así pues el conjunto de todos los vectores en el plano (junto con el conjunto de los números reales) es un espacio vectorial.

4.5. Vectores unitarios canónicos

Los vectores unitarios $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ se llaman **vectores unitarios canónicos** del plano y se denotan por:

$$\boxed{\boldsymbol{i} = \langle 1, 0\rangle \quad y \qquad \boldsymbol{j} = \langle 0, 1\rangle}$$

En términos de estos vectores, que se muestran en la Figura 20, se puede expresar cualquier vector del plano como sigue:

$$\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, 0\rangle + \langle 0, v_2\rangle = v_1\langle 1, 0\rangle + v_2\langle 0, 1\rangle = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}$$

El vector $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}$ se llama una **combinación lineal** de $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.
Los escalares v_1 y v_2 se llaman, respectivamente, **componente horizontal** y **componente vertical** de $\boldsymbol{v}$.

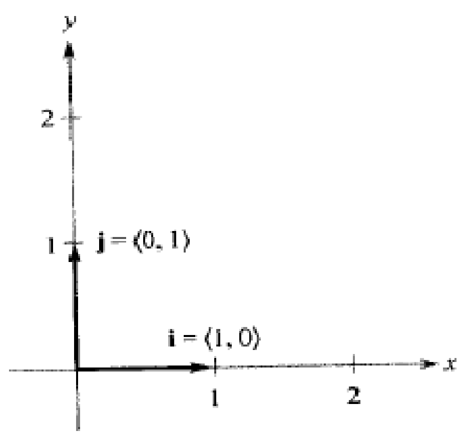


Figura 20: Vectores unitarios canónicos

4.6. Ejercitación

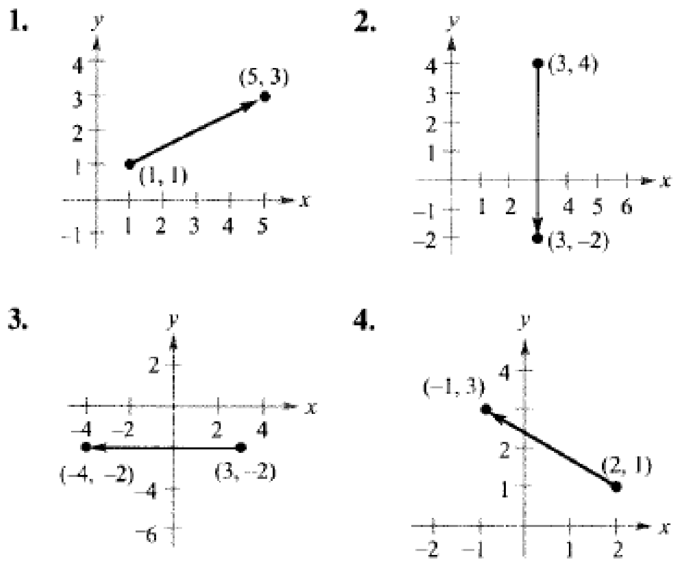
Ejercicio 43 *Para cada uno de los siguientes casos, se pide:*

a) *Expresar el vector* $\boldsymbol{v}$ *en componentes.*

b) *Dibujar* $\boldsymbol{v}$ *con punto inicial en el origen.*

c) *Calcular el módulo de* $\boldsymbol{v}$*.*

d) *Calcular la dirección de* $\boldsymbol{v}$*.*



Ejercicio 44 *Se dan los puntos inicial y final de un vector* $\boldsymbol{v}$

Punto inicial	*Punto final*
(1,2)	(5,5)
(3,-5)	(4,7)
(10,2)	(6,-1)
(0,-4)	(-5,-1)
(6,2)	(6,6)

a) Dibujar el segmento dirigido asociado a $\boldsymbol{v}$.

b) Expresar $\boldsymbol{v}$ *en comoponentes.*

c) Dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

d) Calcular el módulo de $\boldsymbol{v}$.

e) Calcular la dirección de $\boldsymbol{v}$.

Ejercicio 45 *Dados los vectores,* $\boldsymbol{u} = \langle 2, -3\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 1, 4\rangle$ *y* $\boldsymbol{w} = \langle -2, 3\rangle$:

a) Hallar $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $3\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.

b) Graficar los vectores obtenidos en el inciso anterior.

c) Calcular módulo y dirección de los vectores obtenidos en a).

Ejercicio 46 *Dados los vectores, cuyo módulo y dirección se especifican:*

Módulo	*Dirección*
$\mid \boldsymbol{u} \mid = 4$	$\alpha = 30^{o}$
$\mid \boldsymbol{v} \mid = 3$	$\beta = 45^{o}$
$\mid \boldsymbol{w} \mid = \frac{3}{2}$	$\gamma = 120^{o}$
$\mid \boldsymbol{a} \mid = 4$	$\delta = 210^{o}$
$\mid \boldsymbol{b} \mid = 1$	$\theta = 320^{o}$

a) Hallar las componentes de cada vector.

b) Graficar.

Ejercicio 47 *Dados los vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$*:*

Módulo	*Dirección*
$\mid \boldsymbol{u} \mid = 5$	$\alpha = 30^{o}$
$\mid \boldsymbol{v} \mid = 2$	$\beta = 150^{o}$

a) Hallar las componentes de $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$*.*

b) Hallar el vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ *gráfica y analíticamente.*

c) Hallar el vector $\mathbf{3}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ *gráfica y analíticamente.*

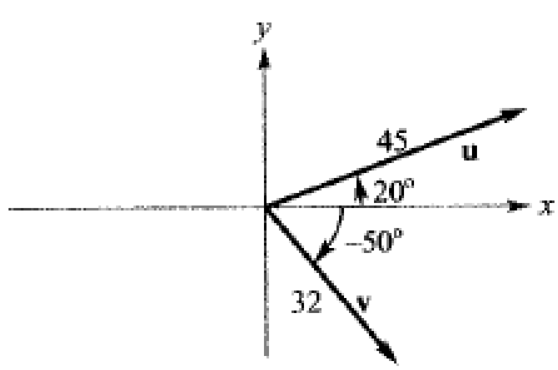
Ejercicio 48 *Dados los vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$*:*

- $\boldsymbol{u} = \langle -2, -4 \rangle$
- $\boldsymbol{v}$ *tal que* $\mid \boldsymbol{v} \mid = 3$ *y con dirección* $\theta = 30^{o}$

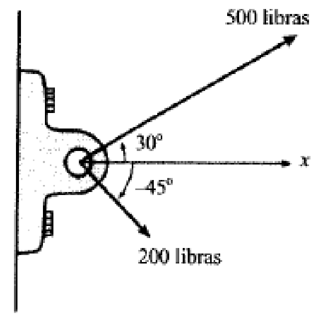
a) Hallar el vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ *gráfica y analíticamente.*

b) Hallar el vector $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ *gráfica y analíticamente.*

Ejercicio 49 *Calcular módulo y dirección de la resultante de los vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$*.*



Ejercicio 50 *Calcular el módulo y la dirección de la fuerza resultante de las que se muestran en la figura.*



Ejercicio 51 *Tres fuerzas de 75, 100 y 125 Newton actúan sobre un objeto formando ángulos respectivos de 30º, 45º y 120º con el semieje x positivo. Calcular módulo y dirección de la resultante.*

Ejercicio 52 *Tres fuerzas de 300, 180 y 250 Newton actúan sobre un objeto formando ángulos respectivos de -30º, 45º y 135º con el semieje x positivo. Calcular módulo y dirección de la resultante.*

Ejercicio 53 *Un rifle, que imprime a la bala una velocidad de 365 m/s, se dispara con un ángulo de elevación de 6º.*

a) Graficar el vector velocidad $\boldsymbol{v}$.

b) Calcular las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

5. Bibliografía

1. Apuntes del Curso de Ingreso del Departamento de Matemática de la U.N.S.J.
2. Apuntes del Curso de Ingreso de la F.A.M.A.F. de la U.N.C.
3. Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2. Larson, Hostetler, Edwards
4. Matemática 2, 3 y 4 (Tapia). Editorial Estrada.