Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Departamento de Física y Química

Curso de Ingreso
Módulo Matemática

Carreras:

- *Profesorado en Física*
- *Profesorado en Química*
- *Profesorado en Tecnología*

Profesor: *Lic. Jonathan Sarmiento*

2019

Contenidos

1 **Capítulo I. Números Reales.** 5

1.1 *Conjuntos numéricos.* 5

1.1.1 *Números naturales.* 5

1.1.2 *Números enteros.* 6

1.1.3 *Números racionales.* 7

1.1.4 *Números irracionales.* 9

1.1.5 *Números reales.* 10

1.1.6 *Intervalos de números reales.* 11

1.2 *Operaciones con números reales y propiedades.* 15

1.2.1 *Suma.* 15

1.2.2 *Producto.* 16

1.2.3 *Cociente.* 16

1.2.4 *Potenciación.* 17

1.2.5 *Radicación.* 18

1.3 *Radicales.* 19

1.3.1 *Extracción de factores fuera del signo radical.* 19

1.3.2 *Operaciones con radicales.* 21

1.3.3 *Racionalización de denominadores.* 23

1.4 *Ejercitación.* 26

2 **Capítulo II. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.** 33

2.1 *Ecuaciones lineales con una incógnita.* 33

2.2 *Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* 41

2.2.1 *Tipos de solución.* 41

2.3 *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.* 42

2.3.1 *Método de Igualación.* 42

2.3.2 *Método de Sustitución.* 43

2.3.3 *Método de Determinantes.* 45

2.4 *Ecuación de segundo grado.* 47
2.4.1 *Soluciones de una ecuación de segundo grado completa.* 47
2.4.2 *Soluciones de una ecuación de segundo grado incompleta.* 48
2.4.3 *Soluciones de una ecuación de segundo grado factorizada.* 49
2.5 *Ejercitación.* 51
3 **Capítulo III. Expresiones Algebraicas.** 56
3.1 *Expresiones algebraicas. Clasificación.* 56
3.2 *Expresiones algebraicas enteras.* 57
3.2.1 *Monomios.* 57
3.2.2 *Polinomios.* 58
3.2.3 *Operaciones con polinomios.* 59
3.2.4 *Valor numérico de un polinomio.* 63
3.2.5 *Raíces de un polinomio.* 64
3.2.6 *Divisivilidad de polinomios.* 64
3.2.7 *Factorización de polinomios.* 66
3.2.8 *Casos especiales de factorización.* 73
3.3 *Expresiones algebraicas fraccionarias.* 75
3.3.1 *Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.* 75
3.3.2 *Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.* 77
3.4 *Ejercitación.* 81
4 **Capítulo IV. Funciones.** 84
4.1 *Introducción.* 84
4.2 *Funciones.* 84
4.3 *Dominio, codominio e imagen.* 84
4.4 *Gráficos de funciones.* 86
4.5 *Función lineal.* 96
4.5.1 *Ecuación explícita de la recta.* 96
4.5.2 *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.* 98

4.5.3 *Ecuación de la recta conocidos la pendiente y un punto perteneciente a ella.* . . . 98

4.5.4 *Función constante.* . . . 99

4.5.5 *Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.* . . . 100

4.6 *Función cuadrática.* . . . 100

4.7 *Ejercitación.* . . . 103

5 **Bibliografía** . . . 111

1. Números reales

En este capítulo nos proponemos dar una construcción intuitiva de conjuntos numéricos ya conocidos y manejar con fluidez las operaciones con números reales y sus propiedades más utilizadas.

1.1. Conjuntos numéricos

1.1.1. Números naturales

La noción de número es utilizada para resolver situaciones de la vida diaria, la utilización de los números naturales es tan antigua como el hombre mismo. Usamos números para contar elementos, para establecer un orden entre ciertas cosas, para establecer medidas, etc.

El conjunto de los **números naturales** *está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se lo designa con la letra* $\mathbb{N}$ *y se representan por:*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Propiedades:

- *El conjunto de los números naturales posee un primer elemento 1.*
- *Entre dos naturales hay un número finito de naturales, esto es, el conjunto de los números naturales es un conjunto discreto.*
- *Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene un elemento mínimo.*
- *El conjunto de los naturales es un conjunto totalmente ordenado, es decir que, dados dos elementos cualesquiera pueden ser siempre comparados entre sí.*
- *Todo número natural* n *posee su sucesor* $n + 1$.
- *Todo número natural* n *se puede expresar como producto de números naturales, llamados factores de* n.
- *La suma y el producto de números naturales es un número natural.*

Los números naturales son el instrumento adecuado para contar, sin embargo no bastan para resolver otros problemas tales como expresar con números la altura y la profundidad, la temperatura por encima o por debajo del punto de congelación del agua, etc. Así también no podemos resolver operaciones del tipo $3 - 3 = ?$ *o* $5 - 8 = ?$.
Por ello se necesita ampliar este conjunto de números.

1.1.2. Números enteros

El conjunto de los **números enteros***, se lo designa con la letra* $\mathbb{Z}$ *y es una ampliación del conjunto* $\mathbb{N}$*. Está formado por los números naturales, sus correspondientes opuestos y el cero. Se representan por:*

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

En forma conjuntista $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

Propiedades:

- $\mathbb{Z}$ *es un conjunto discreto.*
- $\mathbb{Z}$ *no tiene primer ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.*
- $\mathbb{Z}$ *es un conjunto totalmente ordenado.*
- *Todo número entero* a *tiene su opuesto* $-a$*, tal que* $a + (-a) = 0$.
  Dos números opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia (en unidades) del cero. Uno positivo y uno negativo.
- *La suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre es un número entero.*

Nos preguntamos ahora: ¿Cuál será el resultado de 7 : 2?, esto es, ¿existe algún número entero tal que al multiplicarlo por 2 dé como resultado 7?
La respuesta es NO, esto es, nos es imposible encontrar un número entero que cumpla con esta condición. Para resolver éste problema hay que introducir un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números racionales.

1.1.3. Números racionales

Cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, aparece la necesidad de crear los números fraccionarios. Estos números estan formados por el cociente entre dos números enteros.

Este nuevo conjunto numérico se denomina, el conjunto de los **números racionales**, *se lo designa con la letra* $\mathbb{Q}$.

Dicho conjunto está definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

donde a *es el numerador y* b *el denominador.*

Propiedades

- $\mathbb{Q}$ *es un conjunto denso, esto es, entre dos números racionales existen infinitos racionales. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.*
- $\mathbb{Q}$ *no tiene primero ni último elemento.*
- $\mathbb{Q}$ *es un conjunto totalmente ordenado.*

Los números racionales se pueden expresar de dos formas: mediante una fracción o por medio de un número decimal de cifras decimales finitas o periódicas (cifras decimales que se repiten). La expresión decimal es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

Veamos algunos ejemplos:

- $-\dfrac{15}{3} = -5$
- $\dfrac{1}{8} = 0,125$ *(expresión decimal exacta)*
- $\dfrac{3}{24} = 0,125$ *(expresión decimal exacta)*
- $\dfrac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$ *(epresión decimal periódica pura)*
- $\dfrac{223}{90} = 2,4\,\overset{\frown}{7}$ *(expresión decimal periódica mixta)*

Un número racional puede ser representado por más de una fracción. En el ejemplo anterior se observa que el número $0,125$ *está representado por las fracciones* $\frac{1}{8}$ *y* $\frac{3}{24}$ *éstas reciben el nombre de fracciones equivalentes entre sí.*

De acuerdo a lo anterior tenemos dos tipos de expresiones decimales, las exactas y las periódicas.

$$\textit{Expresiones decimales}\begin{cases}\textit{exactas}\\[2em] \textit{periódicas} & \begin{cases}\textit{puras}\\[1em] \textit{mixtas}\end{cases}\end{cases}$$

Recíprocamente, dada una expresión decimal exacta o periódica, puede encontrarse una fracción representante, como se describe a continuación.

• *Si la expresión es exacta, se coloca como numerador el número entero que resulta de suprimir el punto decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras se encontraran a la derecha del punto decimal en la expresión decimal original.*
Ejemplo:

- $0,7 = \frac{7}{10}$
- $0,205 = \frac{205}{1000}$
- $3,12 = \frac{312}{100}$

• *Si la expresión es periódica, se coloca como numerador el resultado de restar al número entero formado por la parte entera, seguida del anteperíodo y de la primera repetición del período, el entero formado por la parte entera con el anteperíodo. Como denominador tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.*

$$\frac{\textit{(todas las cifras de la expresión)-(las cifras no períodicas de la expresión)}}{\textit{tantos 9 como cifras dec. períodicas y tantos 0 como cifras dec. no períodicas}}$$

Ejemplo:

- $8,\overset{\frown}{37}= \dfrac{837-8}{99}$
- $2,3\ \overset{\frown}{4}= \dfrac{234-23}{90}$
- $31,4\ \overset{\frown}{72}= \dfrac{31472-314}{990}$

1.1.4. Números irracionales

Si pudiéramos representar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales.

Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que si tomamos al lado del cuadrado como unidad de medida, no es posible fraccionarlo de tal manera que estas fracciones de unidad entren un número entero de veces en la diagonal. Por otro lado, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama raíz cuadrada de 2 y se lo denota $\sqrt{2}$.

Aquellos números que no es posible expresarlos como una razón entre enteros (no admiten una representación racional) se los llama **números irracionales***. Al conjunto de los números irracionales se los designa con la letra $\mathbb{I}$.*

Los números irracionales tienen en su expresión decimal infinitas cifras decimales no periódicas.

Son ejemplos de números irracionales:

- *Un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:*
  235, 1011011101111011111011111101111111011...
  representa un número irracional porque no puede identificarse un período en la parte decimal del mismo.

- *Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural.*
  $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt{6}$.

- *Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero.*
  $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[7]{13}$.

- *El número π, utilizado para calcular la longitud de la circunferencia*
  $\pi \approx 3,14159265358979323846...$

- *El número e, base de los logaritmos naturales*
  $e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

1.1.5. Números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los **números reales** *y se lo simboliza con* $\mathbb{R}$.

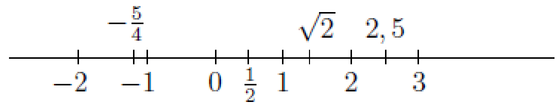
Es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$$\mathbb{R}\begin{cases} \mathbb{I} : \textit{irracionales} \\ \\ \mathbb{Q} : \textit{racionales} \begin{cases} \mathbb{Z} : \textit{enteros} \begin{cases} \mathbb{N} : \textit{naturales} \\ 0 : \textit{cero} \\ \mathbb{N}^{-} : \textit{negativos} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

El conjunto de los números reales se representa sobre una recta llamada recta numérica o recta real.

Cada punto de la recta numérica representa a un único número real y recíprocamente a cada número real le corresponde un único punto de la recta.

Se fija un origen que representa al número cero, se considera un segmento unidad, a la derecha del cero se representan los reales positivos y a la izquierda los reales negativos.



Para comparar dos números reales a y b. Si $b-a$ es positivo, entonces $a<b$ y el punto asociado a b esta a la derecha del punto asociado a a. Si $b-a$ es negativo, entonces $b<a$ y el punto asociado a b esta a la izquierda del punto asociado a a.

1.1.6. Intervalos de números reales

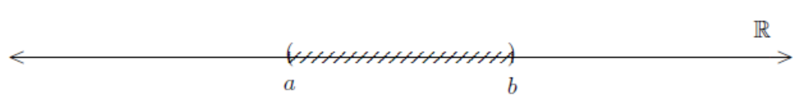
Los subconjuntos más frecuentes en el cálculo o análisis matemático son los intervalos de la recta real.

Veamos las definiciones de los distintos tipos de intervalos utilizando la notación conjuntista y, además, su representación gráfica.

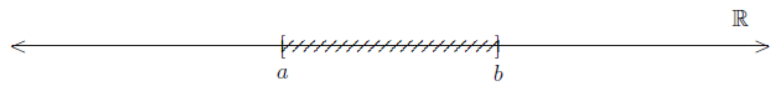
Dados $a, b \in \mathbb{R}$ definimos:

(I) **Intervalos acotados**

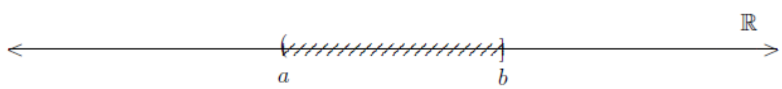
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *llamado* **intervalo abierto** *de extremo inferior a y extremo superior b. El intervalo no incluye a los extremos a y b.*
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



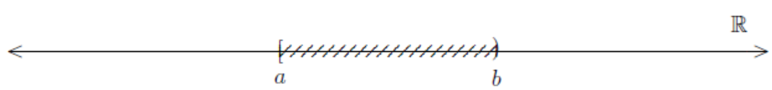
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, *llamado* **intervalo cerrado** *de extremo inferior a y de extremo superior b. El intervalo incluye a los extremos a y b.*
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, *llamado* **intervalo semiabierto** *de extremo abierto a y cerrado en b. El intervalo no incluye el extremo a y si incluye el extremo b.*
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, *llamado* **intervalo semicerrado** *de extremo cerrado a y abierto en b. El intervalo incluye el extremo a y no incluye el extremo b.*
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:

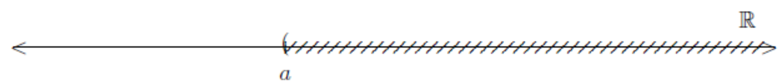


(II) **Intervalos no acotados**

En lo que sigue interpretaremos a los símbolos ∞ *y* $-\infty$ *como* **infinito** *y* **menos infinito**, *respectivamente. Es claro que, para cualquier número real a se verifica que:* $-\infty < a < \infty$

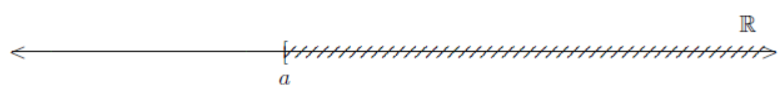
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, *llamado* **intervalo infinito abierto de extremo inferior** a.

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



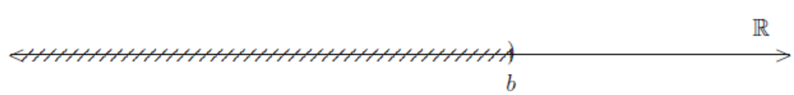
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, *llamado* **intervalo infinito cerrado de extremo inferior** a.

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



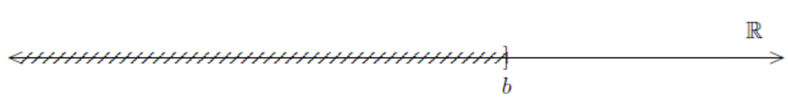
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, *llamado* **intervalo infinito abierto de extremo superior** b.

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:

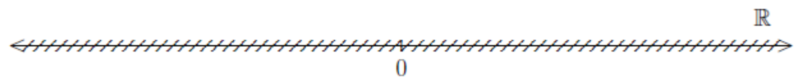


- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, *llamado* **intervalo infinito cerrado de extremo superior** b.

  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



- $(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\}$, *es decir* $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
  Geométricamente se representa en la recta real en la forma:



1.2. Operaciones con números reales

Para trabajar con los conjuntos numéricos recordaremos las operaciones y algunas de sus propiedades básicas.

1.2.1. Suma

- *Con igual denominador:*

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \qquad \textit{donde } b \neq 0.$$

Ejemplo: $\dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3-9+1}{4} = -\dfrac{5}{4}$

- *Con distinto denominador:*

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(m:b)\cdot a + (m:d)\cdot c}{m}} \qquad \textit{donde } m \textit{ es el múltiplo común menor.}$$

Ejemplo: $\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6} + 2 =$

Se calcula el mcm(4,3,6)=12

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{1} = \frac{1\cdot\mathbf{3} - 2\cdot\mathbf{4} + 5\cdot\mathbf{2} + 2\cdot\mathbf{12}}{12} = \frac{29}{12}$$

Propiedades de la suma:

- *Conmutativa:* $a + b = b + a$
- *Asociativa:* $(a + b) + c = a + (b + c)$
- *Elemento neutro: existe 0 (cero) tal que* $a + 0 = a$
- *Opuesto aditivo: para cada número real* a *existe su opuesto aditivo* $(-a)$ *tal que* $a + (-a) = 0$
- *Cancelativa: Si* $a + c = b + c$ *entonces* $a = b$

1.2.2. Producto

$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$ *donde* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$

Siempre hay que tener en cuenta la regla de los signos para la multiplicación de números reales:

$$\begin{cases} (+) \cdot (+) & = & (+) \\ (-) \cdot (-) & = & (+) \end{cases} \qquad \begin{cases} (+) \cdot (-) & = & (-) \\ (-) \cdot (+) & = & (-) \end{cases}$$

Ejemplo: $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot 2 = \frac{2 \cdot (-4) \cdot 2}{3 \cdot 7} = -\frac{16}{21}$

Propiedades del producto

- *Conmutativa:* $a \cdot b = b \cdot a$
- *Asociativa:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *Elemento neutro: existe 1 (uno) tal que* $a \cdot 1 = a$
- *Inverso multiplicativo: para cada número real* $a \neq 0$ *existe su inverso multiplicativo* $\frac{1}{a}$ *tal que* $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- *Cancelatva: Si* $a \cdot c = b \cdot c$ *y* $c \neq 0$ *entonces* $a = b$
- *Distributivas:*
  - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
  - $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
  - $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$
  - $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$

1.2.3. Cociente

Todo cociente de números fraccionarios puede transformarse en producto.

$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$ *donde* $b \neq 0$, $d \neq 0$ *y* $c \neq 0$

La regla de los signos del cociente es la misma que para el producto.

Ejemplo: $-\frac{5}{2} : \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{15}{14}$

Propiedades del cociente

- $(a+b) : c = a : c + b : c$
- $(a-b) : c = a : c - b : c$

1.2.4. Potenciación

$\boxed{a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}^{n-veces}}$ *donde* $a \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$

a *recibe el nombre de base, y* n *de exponente.*

Regla de los signos en la potenciación:

- *Si la base es positiva (+), entonces la potencia es positiva (+)*
- *Si la base es negativa (-), entonces* $\begin{cases} \text{si el exponente es par, la potencia es positiva (+)} \\ \text{si el exponente es impar, la potencia es negativa (-)} \end{cases}$

Propiedades de la potenciación

- *Todo número distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1.*
  $a^0 = 1 \qquad con\ a \neq 0$
- *Potencia de exponente negativo.*
  $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad con\ a \neq 0$
- *Producto de potencias de igual base.*
  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- *Cociente de potencias de igual base.*
  $a^n : a^m = a^{n-m}$
- *Potencia de potencia.*
  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- *Distributiva respecto al producto y al cociente.*
  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
  $(a : b)^n = a^n : b^n \quad$ *con* $b \neq 0$

1.2.5. Radicación

$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \text{ si y solo si } b^n = a}$

Donde a *es el radicando,* n *el índice y* b *la raíz n-ésima de* a*. Al simbolo* $\sqrt{\cdots}$ *se le llama radical.*
Si n *es impar entonces el radicando puede ser cualquier valor real.*
Si n *es par entonces el radicando debe ser* $a \geq 0$*, en caso contrario el resultado no es un número real.*

Regla de los signos en la radicación:

- *Si el radicando es positivo y el índice es* par*, entonces la raíz es positiva.*
  Si $a \geq 0$ *y* n *es par, entonces* $\sqrt[n]{a} = (+)$
- *Si el radicando es positivo y el índice es* impar*, entonces la raíz es positiva.*
  Si $a \geq 0$ *y* n *es impar, entonces* $\sqrt[n]{a} = (+)$
- *Si el radicando es negativo y el índice es* par*, entonces no posee solución real.*
  Si $a \leq 0$ *y* n *es par, entonces* $\sqrt[n]{a}$ *no es un número real*
- *Si el radicando es negativo y el índice es* impar*, entonces la raíz es negativa*
  Si $a \leq 0$ *y* n *es impar, entonces* $\sqrt[n]{a} = (-)$

Propiedades de la radicación

- *Toda raíz puede expresarse como potencia de exponente fraccionario.*
  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
  en particular $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

- *Raíz de una potencia es la potencia de la raíz.*
  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

- *Si* n *es par, entonces* $\sqrt[n]{a^n} =\mid a \mid$
  Si n *es impar, entonces* $\sqrt[n]{a^n} = a$

- *Distributiva respecto al producto y al cociente.*
  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
  $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad$ *con* $b \neq 0$

- *Raíz de una raíz.*
  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

1.3. Radicales

1.3.1. Extracción de factores fuera del signo radical

Se pueden extraer factores fuera del signo radical cuando el exponente de dichos factores sea mayor o igual que el índice.

- *Ejemplo 1:*
  Consideremos $\sqrt{8}$
  Podemos expresar 8 como potencia, $8 = 2^3$.
  $\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$
  Podemos descomponer el radicando como un producto de potencias de igual base, de modo que el exponente de una de ellas sea múltiplo del índice, y el otro de exponente menor que el índice.
  $$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2}$$
  $$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \qquad \textit{(Distribuyendo)}$$
  $$= 2 \cdot \sqrt{2} \qquad \textit{(Simplificando)}$$
  Hemos extraído el factor 2 y el radical ha quedado simplificado.

- *Ejemplo 2:*
  Consideremos el radical $\sqrt[3]{a^{14}}$
  Podemos descomponer el radicando como un producto de potencias de igual base, de modo que uno de los exponentes sea múltiplo de 3 y el otro exponente menor que 3.
  $$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^{14}} &= \sqrt[3]{a^{12} \cdot a^2} \\ &= \sqrt[3]{a^{12}} \cdot \sqrt[3]{a^2} && \textit{(Distribuyendo)} \\ &= a^{\frac{12}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^2} && \textit{(Transformando en potencia de exponente racional)} \\ &= a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2} && \textit{(Simplificando)} \end{aligned}$$

- *Ejemplo 3:*
  Consideremos $\sqrt[3]{324}$
  Descomponemos el radical en factores primos
  $$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
  $324 = 2^2 \cdot 3^4$
  $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4}$
  Se procede como en el caso anterior.
  $$\begin{aligned} \sqrt[3]{324} &= \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^4} \\ &= \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} \\ &= \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= \sqrt[3]{2^2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{12} \end{aligned}$$

1.3.2. Operaciones con radicales

Para facilitar las operaciones que se definen a continuación consideramos solamente los radicales de radicando positivo.

Los radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando se llaman **radicales semejantes**.

Ejemplos de radicales semejantes son los siguientes:

(a) $3\sqrt{2}$ *y* $-5\sqrt{2}$*;* *donde 3 y -5 son los coeficientes.*

(b) $-\frac{3}{2}a\sqrt[3]{b^2}$ *y* $-4\sqrt[3]{b^2}$*;* *donde* $-\frac{3}{2}a$ *y -4 son los coeficientes.*

Los radicales semejantes difieren únicamente por sus coeficientes.

Adición y sustracción de radicales

La suma o diferencia de dos radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes de los radicales dados.

• *Ejemplo 1:*

$$3\sqrt{2} + \frac{5}{4}\sqrt{2} = \left(3 + \frac{5}{4}\right)\sqrt{2} = \boxed{\frac{17}{4}\sqrt{2}}$$

Si los radicales no son semejantes la suma o resta se resuelve teniendo en cuenta los siguientes pasos:

- *Factorizar los radicandos.*
- *Extraer factores fuera del radical.*
- *Identificar términos semejantes.*
- *Operar*

• *Ejemplo 2:*

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{81} - 4\sqrt[3]{24} &= 2\sqrt[3]{3^4} - 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= (6-8)\sqrt[3]{3} \\ &= \boxed{-2\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

- *Ejemplo 3:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}+2\sqrt[4]{36}-\sqrt{8}+\sqrt{54} &= \sqrt{2}+2\sqrt[4]{6^2}-\sqrt{2^3}+\sqrt{3^3\cdot 2}\\
&= \sqrt{2}+2\cdot 6^{\frac{2}{4}}-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3\cdot 2}\\
&= \sqrt{2}+2\cdot 6^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6}\\
&= \sqrt{2}+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6}\\
&= (1-2)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{6}\\
&= \boxed{-\sqrt{2}+5\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar y dividir radicales del mismo índice aplicamos la propiedad distributiva:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- *Ejemplo 1:*

$$\begin{aligned}
\sqrt[12]{a^9}\cdot\sqrt[12]{a^{10}} &= \sqrt[12]{a^9\cdot a^{10}}\\
&= \sqrt[12]{a^{19}}\\
&= \sqrt[12]{a^{12}\cdot a^7}\\
&= a\sqrt[12]{a^7}
\end{aligned}$$

- *Ejemplo 2:*

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{125}\cdot\left(-3\sqrt[3]{5}\right)\cdot\sqrt[3]{2} &= 1\cdot(-3)\cdot 1\sqrt[3]{125\cdot 5\cdot 2}\\
&= -3\sqrt[3]{1250}\\
&= -3\sqrt[3]{5^4\cdot 2}\\
&= -3\sqrt[3]{5^3\cdot 5\cdot 2}\\
&= -3\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{10}\\
&= -3\cdot 5\sqrt[3]{10}\\
&= -15\sqrt[3]{10}
\end{aligned}$$

- *Ejemplo 3:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{28}\sqrt[4]{324} : \frac{1}{7}\sqrt[4]{4} &= \frac{1}{28} : \frac{1}{7}\sqrt[4]{324 : 4}\\ &= \frac{7}{28}\sqrt[4]{81}\\ &= \frac{1}{4}\cdot 3\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

- *Ejemplo 4:*

$$\begin{aligned}a\sqrt[3]{a^5\cdot b^2} : \sqrt[3]{a^2\cdot b} &= a\sqrt[3]{a^5\cdot b^2 : a^2\cdot b}\\ &= a\sqrt[3]{a^3\cdot b}\\ &= a\cdot a\sqrt[3]{b}\\ &= a^2\sqrt[3]{b}\end{aligned}$$

1.3.3. Racionalización de denominadores

La racionalización de denominadores es un procedimiento en el que se transforma una fracción que tiene en el denominador un número irracional en otra equivalente cuyo denominador sea un número racional.

Se considerarán los siguientes casos:

(a) **El denominador es un radical irreducible de índice 2.**
En general este caso corresponde a fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$ *y se resuelve multiplicando numerador y denominador por* $\sqrt{b}$*.*

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b\cdot b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{b}$$

Ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7\cdot 7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}$

(b) **El denominador es un radical irreducible de índice distinto de 2.**
En general este caso corresponde a fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}}$ *y se resuelven multiplicando numerador y denominador por* $\sqrt[n]{b^{n-p}}$*.*

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p} \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p \cdot b^{n-p}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{b}$$

Ejemplo: $\frac{6}{\sqrt[7]{2^4}}$, *en este caso* $n - p = 7 - 4 = 3$, *luego*

$$\frac{6}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^4} \cdot \sqrt[7]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^4 \cdot 2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{2^3}}{2} = 3\sqrt[7]{2^3}$$

(c) **El denominador es un binomio de la forma** $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$**;** $a \pm \sqrt{b}$**;** $\sqrt{a} \pm b$

Para comprender el procedimiento a usar en este caso, nos apoyamos en la siguiente propiedad:(Diferencia de cuadrados)

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$

El procedimiento consiste en multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3-\sqrt{5}} &= \frac{2 \cdot (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} && \textit{(× y ÷ por el conjugado de } 3-\sqrt{5}\textit{)} \\
&= \frac{2 \cdot (3+\sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2} && \textit{(Diferencia de cuadrados)} \\
&= \frac{2 \cdot (3+\sqrt{5})}{4} && \textit{(Simplificamos)} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2} && \textit{(Simplificamos)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})} && \textit{(× y ÷ por el conjugado de } \sqrt{5}+\sqrt{2}\textit{)} \\
&= \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} && \textit{(Diferencia de cuadrados)} \\
&= \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} && \textit{(Simplificamos)} \\
&= \sqrt{5}-\sqrt{2} && \textit{(Simplificamos)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} && \textit{(× y ÷ por el conjugado de } \sqrt{5}-\sqrt{3}\textit{)}\\
&= \frac{(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} && \textit{(Distributiba)}\\
&= \frac{5+\sqrt{15}+\sqrt{15}+3}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} && \textit{(× y Simplificamos)}\\
&= \frac{8+2\sqrt{15}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} && \textit{(Sumamos términos semejantes)}\\
&= \frac{8+2\sqrt{15}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} && \textit{(Diferencia de cuadrados)}\\
&= \frac{8+2\sqrt{15}}{2} && \textit{(Simplificamos)}\\
&= \frac{2\cdot(4+\sqrt{15})}{2} && \textit{(Factor común)}\\
&= 4+\sqrt{15} && \textit{(Simplificamos)}
\end{aligned}$$

1.4. Ejercitación

Ejercicio 1 *Resolver las siguientes operaciones combinadas.*

a) $[5-15\cdot(-2)]:(-4-3)=$ Rta: -5

b) $16:(-8)-\{-[2-3\cdot(-1)]+5\}-(-2)=$ Rta: 0

c) $[3\cdot(-5)+36]:[(3-38):(-5)]=$ Rta: 3

d) $(2-\sqrt{3^2+4^2})^3=$ Rta: -27

e) $\{[\sqrt{4^3}-(3-4)^2]^2-(-3)^2\}:10-\sqrt{9}=$ Rta: 1

f) $\sqrt{(3^2-2^2):[(3+2)^2+\sqrt{(5^2-1^2):6}+11\cdot(-2)]}=$ Rta: 1

Ejercicio 2 *Resolver e indicar a que conjuntos numéricos pertenece el resultado.*

a) $2-\left(-3+\dfrac{4}{3}\right)=$ Rta: $\frac{11}{3}$

b) $\left(\dfrac{3}{2}-2\right):\dfrac{1}{6}=$ Rta: -3

c) $\left\{-\dfrac{1}{2}+\left[2-\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}\right)\right]\right\}-1=$ Rta: $-\frac{13}{12}$

d) $\dfrac{\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{13}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{2}\right)}{(-2)\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}}=$ Rta: $\frac{27}{14}$

e) $\dfrac{-3}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)}-\dfrac{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(-3+\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{12}}=$ Rta: $\frac{13}{5}$

f) $\left(\dfrac{2}{3}+1\right)\cdot\dfrac{12}{5}+\dfrac{8}{27}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}+7\right)=$ Rta: 6

Ejercicio 3 *Pasar las expresiones decimales a fracción y resolver.*

a) $\dfrac{(0,3-0,11)\cdot(0,14+0,06)}{-1+0,62}=$ Rta: $-\frac{1}{10}$

b) $\sqrt{\left[\left(\dfrac{0,34}{2}\right)^{-1}-\dfrac{1,15}{0,34}\right]\cdot 0,9}=$ Rta: $\frac{3}{2}$

c) $\dfrac{0,5-0,\overset{\frown}{3}}{0,\overset{\frown}{5}}=$ Rta: $\frac{3}{10}$

d) $\left[\dfrac{(0,5+0,\overset{\frown}{3})\cdot 1,4\overset{\frown}{6}}{2,\overset{\frown}{4}}\right]^{-1}=$ Rta: 2

e) $[(0,3\overset{\frown}{7}-0,1)-(3,1+2,\overset{\frown}{1})]:\dfrac{1}{3}=$ Rta: $-\frac{74}{5}$

Ejercicio 4 *Hallar la mínima expresíon, aplicando propiedades.*

a) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-8}\right]^{2}=$ Rta: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4}$

b) $\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}\right]^{2}:\left(\dfrac{4}{3}\right)^{8}=$ Rta: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-10}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}=$ Rta: $\frac{2}{3}$

d) $8^{-\frac{2}{3}}=$ Rta: $\frac{1}{4}$

e) $32^{0,4}=$ Rta: 4

f) $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{1}{729}}}=$ Rta: $\frac{1}{3}$

g) $(8^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(4^3)^{\frac{1}{2}}=$ Rta: 2^{-1}

Ejercicio 5 *Indicar si las siguientes igualdades son correctas.*

a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$

b) $(2+5)^2 = 2^2 + 5^2$

c) $\sqrt{(-4)^2} = -4$

d) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$

e) $2^3 \cdot 3^2 = 6^5$

f) $\frac{8}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9}$

g) $\pi^0 = 1$

h) $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$

Ejercicio 6 *Resolver e indicar a que conjuntos numéricos pertenece el resultado.*

a) $\left(2 - \frac{175}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} + (20,25)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$ Rta: 4

b) $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{4} - \frac{17}{12}\right)^{-2} : (0,02)^0}{0,\widehat{6} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) : (-0,1)^{-1}}\right]^{-2} \cdot \left(-\frac{14400}{2401}\right) =$ Rta: -1

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} =$ Rta: $\frac{1}{2}$

d) $\left(\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} \cdot \dfrac{64}{125}\right)^{-1} - 2,125 =$ Rta 1

e) $\sqrt{\left(\frac{2}{3} + 1\right)^{-3} \cdot 2,\widehat{7} + \frac{7}{5}} =$ Rta: $\sqrt{2}$

Ejercicio 7 *Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes.*

a) $(\sqrt{2}-3)^2+(\sqrt{2}+3)^2$ es un número irracional.

b) $(\sqrt{5}+3)^2+(\sqrt{5}-3)^2$ es un número entero.

c) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$ es un número racional.

d) $(2^4)^2=(0,5)^{-8}$

Ejercicio 8 *Resolver.*

a) $$\left[\frac{\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-1}+0,7:2,\overset{\frown}{3}-0,25:0,\overset{\frown}{6}}{\sqrt{0,\overset{\frown}{7}}\cdot\sqrt{\frac{4}{7}-\left(1-0,\overset{\frown}{3}\right)^{-2}+1,5}}\right]=$$ Rta: $-\frac{87}{10}$

b) $$\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+3^2+(0,5)^{-1}}-0,1\overset{\frown}{6}=$$ Rta: $-\frac{7}{6}$

c) $$\frac{\left(0,\overset{\frown}{4}+\frac{7}{5}\right):0,\overset{\frown}{2}-5\cdot\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2}}{0,0\overset{\frown}{8}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt{\frac{25}{64}}\right]-0,2\overset{\frown}{6}}=$$ Rta: $\frac{59}{4}$

d) $$\frac{(4^{-2})^{\frac{1}{2}}+(2^{-4})^{\frac{1}{4}}}{0,3\overset{\frown}{2}\cdot\frac{45}{29}-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{\frac{-3-4-20}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}}=$$ Rta: 6

e) $$\frac{(0,125)^{-\frac{1}{3}}+(0,\overset{\frown}{2})^8\cdot(0,\overset{\frown}{2})^{-6}}{49^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{343}+\sqrt{(-4)^2}}=$$ Rta: $\frac{83}{243}$

Ejercicio 9 *Extraer factores fuera del radical.*

a) $\sqrt{27} =$ Rta: $3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{432} =$ Rta: $6\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{ab^5} =$ Rta: $b^2\sqrt{ab}$

d) $\sqrt{8x^4} =$ Rta: $2x^2\sqrt{2}$

e) $\sqrt[5]{15552}$ Rta: $6\sqrt[5]{2}$

f) $\sqrt{20x^6y^{15}}$ Rta: $2x^3y^7\sqrt{5y}$

g) $\sqrt[4]{4x^5}$ Rta: $x\sqrt[4]{4x}$

Ejercicio 10 *Resolver las siguientes sumas de radicales.*

a) $-11\sqrt{3} + \left(3 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{3} - \sqrt{3} =$ Rta: $-\frac{35}{4}\sqrt{3}$

b) $-2\sqrt{700} + \dfrac{3}{2}\sqrt{7} - \dfrac{1}{4}\sqrt{28} =$ Rta: $-19\sqrt{7}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54}$ Rta: $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

d) $2\sqrt{24} + \sqrt{54} + 2\sqrt{18} - 5\sqrt{6}$ Rta: $2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$

e) $\dfrac{1}{12}\sqrt{12} - \dfrac{1}{3}\sqrt{18} + \sqrt{2} + \sqrt{27} + 5\sqrt{0,02} =$ Rta: $\frac{19\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

Ejercicio 11 *Resolver y simplificar.*

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^4} =$ Rta: $xy\sqrt[5]{x}$

b) $\sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3y} \cdot \sqrt[4]{27x^3y^2} =$ Rta: $3x^2\sqrt[4]{y^3}$

c) $\sqrt{3x} : \sqrt{x} =$ Rta: $\sqrt{3}$, $x \neq 0$

d) $\sqrt[12]{8z^{13}} : \sqrt[12]{8z^9} =$ Rta: $\sqrt[3]{z}$

Ejercicio 12 *Aplicar propiedades y resolver.*

a) $\dfrac{(2^3)^{-2} \cdot (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}}{(2^{10})^{\frac{1}{2}} \cdot (3)^{\frac{1}{3}}} =$ Rta: 2^{-11}

b) $\sqrt{2z} \cdot \sqrt[6]{8z} =$ Rta: $2z^{\frac{2}{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5x} \cdot \sqrt[3]{x5^2}}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[6]{5^5 x}} =$ Rta: $5^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{5}{6}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[6]{x^2 y}} =$ Rta: $\sqrt{y}$

Ejercicio 13 *Racionalizar denominadores.*

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ Rta: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[7]{3^4}} =$ Rta: $\frac{2\sqrt[7]{27}}{3}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}} =$ Rta: $\frac{5\sqrt[4]{8}}{2}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ Rta: $5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$ Rta: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} =$ Rta: $\sqrt{2}$

g) $\dfrac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$ Rta: $\sqrt{3}$

Ejercicio 14 *Resolver las siguientes operaciones combinadas*

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{4} =$ Rta: 0

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{8}} =$ Rta: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{-1} =$ Rta: $-1+\sqrt{5}$

d) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} =$ Rta: $\sqrt[4]{2}$

2. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

2.1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una **ecuación** *es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en las que figuran una o varias letras llamadas incógnitas.*

Los números que al sustituir a las incógnitas hacen verdadera la igualdad forman el **conjunto solución** *de la ecuación, pudiendo este ser vacío.*

Resolver una ecuación, consiste en hallar su conjunto solución.

Las **ecuaciones lineales con una incógnita** *son aquéllas que pueden escribirse de la forma:* $\boxed{ax + b = 0 \ \ con \ \ a, b \in \mathbb{R} \ \ y \ \ a \neq 0}$

Llamaremos ecuaciones equivalentes a dos o más ecuaciones cuyas soluciones sean las mismas.

Por ejemplo: $2x = 8$ *y* $\frac{3}{2}x = 6$ *son equivalentes, ya que su conjunto solución es* $S = \{4\}$.

Para resolver una ecuación lineal de una incógnita, lo que haremos será hallar ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas, hasta llegar a un punto en el que la solución sea trivial. Para obtener ecuaciones equivalentes, utilizaremos las siguientes propiedades de la relación de igualdad:(Propiedades de monotonía.)

- *Si se suma a ambos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.*

- *Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.*

Además, en ambos miembros de la igualdad, asumiremos que las letras representan números reales y usaremos todas las propiedades vistas en el primer capítulo.

La solución general de una ecuacion lineal con una incógnita viene dada por:
$S = \{-\frac{b}{a}\}$
En efecto:

Consideramos la ecuación lineal con una incógnita $ax + b = 0$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b - b &= 0 - b && \textit{restamos m.a.m -b} \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= -\frac{b}{a} && \textit{multiplicamos m.a.m por } \frac{1}{a} \ (a \neq 0) \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

- **Ejemplo 1:**

$$-3(x-2) = 2x + 11$$

Aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro

$$-3x + 6 = 2x + 11$$

Sumamos m.a.m la expresión -2x-6

$$\begin{aligned} -3x + 6 - 2x - 6 &= 2x + 11 - 2x - 6 \\ -3x - 2x &= 11 - 6 \\ -5x &= 5 \end{aligned}$$

Multiplicamos m.a.m por $-\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} (-\frac{1}{5}) \cdot -5x &= -\frac{1}{5} \cdot 5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación $-3(x-2) = 2x + 11$ es $S = \{-1\}$

Comprobemos que -1 satisface la ecuación, para ello reemplazamos el valor -1 en cada aparición de x

$$-3 \cdot (-1 - 2) = 2 \cdot (-1) + 11$$

Resolvemos por separado cada miembro de la igualdad

$$-3 \cdot (-3) = -2 + 11$$
$$9 = 9$$

Como la última igualdad es válida, $S = \{-1\}$ *es el conjunto solución.*

- **Ejemplo 2:**

$$\frac{2x-2}{3} = \frac{x+5}{2}$$

Multiplicamos m.a.m por 6 que es el mcm(2,3)

$$6\left(\frac{2x-2}{3}\right) = 6\left(\frac{x+5}{2}\right)$$
$$2(2x-2) = 3(x+5)$$

Aplicamos la propiedad distributiva en ambos miembros

$$4x - 4 = 3x + 15$$

Sumamos m.a.m la expresión $-3x + 4$

$$4x - 4 - 3x + 4 = 3x + 15 - 3x + 4$$
$$4x - 3x = 15 + 4$$
$$x = 19$$

Luego el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{2x-2}{3} = \dfrac{x+5}{2}$ *es* $S = \{19\}$

Comprobemos que 19 es solución:

$$\frac{2 \cdot 19 - 2}{3} = \frac{19+5}{2}$$
$$\frac{38-2}{3} = \frac{24}{2}$$
$$\frac{36}{3} = 12$$
$$12 = 12$$

- **Ejemplo 3:**

$$2\left(\frac{1}{3}x-2\right)-\frac{1}{4}x=-2x+\frac{x-2}{3}+5$$

Aplicamos la propiedad distributiva en ambos miembros

$$\frac{2}{3}x-4-\frac{1}{4}x=-2x+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+5$$

Sumamos m.a.m la expresión $2x-\frac{1}{3}x+4$

$$\frac{2}{3}x-4-\frac{1}{4}x+2x-\frac{1}{3}x+4=-2x+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+5+2x-\frac{1}{3}x+4$$
$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x+2x-\frac{1}{3}x=-\frac{2}{3}+5+4$$

Aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro y resolviendo el segundo miembro

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{3}\right)x=\frac{25}{3}$$

Resolvemos el paréntesis del primer término

$$\frac{25}{12}x=\frac{25}{3}$$

Multiplicamos m.a.m por $\frac{12}{25}$

$$\frac{12}{25}\cdot\frac{25}{12}x=\frac{12}{25}\cdot\frac{25}{3}$$
$$x=4$$

Luego el conjunto solución de la ecuación $2\left(\frac{1}{3}x-2\right)-\frac{1}{4}x=-2x+\frac{x-2}{3}+5$ es $S=\{4\}$

Comprobemos que 4 es solución:

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{3}\cdot 4-2\right)-\frac{1}{4}\cdot 4 &= -2\cdot 4+\frac{4-2}{3}+5\\
2\left(\frac{4}{3}-2\right)-1 &= -8+\frac{2}{3}+5\\
2\left(-\frac{2}{3}\right)-1 &= -\frac{7}{3}\\
-\frac{4}{3}-1 &= -\frac{7}{3}\\
-\frac{7}{3} &= -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Ocasionalmente nos encontramos con expresiones que aparentan ser ecuaciones lineales con una incógnita y que sin embargo no tienen solución o tienen infinitas soluciones.

- **Ejemplo 4:**

$$\begin{aligned}
2x+7 &= 2(x+4)\\
2x+7 &= 2x+8\\
2x+7-2x-7 &= 2x+8-2x-7\\
2x-2x &= 8-7\\
0x &= 1
\end{aligned}$$

La última ecuación **no tiene solución** *pues no existe ningún número real que multiplicado por 0 de por resultado 1. En general las ecuaciones de la forma $0x = b$ con $b \neq 0$ no tienen solución. Su conjunto solución es $S = \emptyset$*

- **Ejemplo 5:**

$$\begin{aligned}
3x+5 &= 3(x+2)-1\\
3x+5 &= 3x+6-1\\
3x+5-3x-5 &= 3x+6-1-5\\
3x-3x &= 6-1-5\\
0x &= 0
\end{aligned}$$

La última ecuación **tiene infinitas soluciones** *pues todo número real multiplicado por 0 da por resultado 0. Su conjunto solución es* $S = \mathbb{R}$

Problemas que se resuelven mediante ecuaciones lineales

Plantear una o más ecuaciones a partir de un problema, consiste en traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer.

Es fundamental leer con atención y releer el enunciado del problema, hasta entender perfectamente su significado. Después es conveniente seguir estas etapas:

1) *Identificación de datos conocidos e incógnita: se detalla todo lo que se sabe (datos conocidos) y lo que deseamos conocer (las incógnitas).*

2) *Planteo de las ecuaciones: se relaciona con igualdades (ecuaciones) los datos con las incógnitas.*

3) *Resolución de las ecuaciones: se transforma cada ecuación planteada en otras equivalentes y más sencillas de resolver.*

4) *Comprobación de resultados: se verifica que las soluciones encontradas satisfacen la ecuación original.*

5) *Discusión de las soluciones: se trata de ver si las soluciones obtenidas son aceptables para el problema propuesto.*

Recuerde que la tarea matemática consiste en gran medida en resolver problemas. Hay algunos aparentemente sencillos que le pueden llevar mucho tiempo, incluso aunque tenga a su disposición todas las herramientas necesarias.

Problema 1:

Al sumar un mismo número a los dos términos (numerador y denominador) de la fracción $\frac{8}{3}$ *obtenemos otra fracción equivalente a* $\frac{4}{5}$ *¿Cuál es el número que se ha sumado?*

Resolvamos el problema siguiendo las etapas propuestas:

1) **Identificación de datos conocidos e incógnita:** *llamamos* x *al número que se le suma al numerador y denominador. Debe ocurrir que* $\frac{8+x}{3+x}$ *sea equivalente a* $\frac{4}{5}$.

2) **Planteo de la ecuación:** *Por ser fracciones equivalentes debe verificarse que:*

$$\frac{8+x}{3+x}=\frac{4}{5}$$

3) **Resolución de la ecuación:**

$$\frac{8+x}{3+x}=\frac{4}{5}$$
$$5(8+x)=4(3+x)$$
$$40+5x=12+4x$$
$$5x-4x=12-40$$
$$x=-28$$

4) **Comprobación de resultados:** *Debemos comprobar que* $\frac{8+(-28)}{3+(-28)}$ *es equivalente a* $\frac{4}{5}$.

$$\frac{8+(-28)}{3+(-28)}=\frac{-20}{-25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$$

5) **Discusión de las soluciones:** *El número que se ha sumado es -28. Como no hay restricciones en el número que se pide este resultado es posible.*

Problema 2:

En el curso de 2º A hay cierto número de alumnos. El curso 2º B tiene la mitad de los de 2º A más 10 alumnos y 2º C tiene la mitad de 2º A más 8 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo si hay 92 alumnos que cursan 2º?

1) **Identificación de datos conocidos e incógnita:** *llamamos x al número de alumnos de la clase de 2º A*

Curso	2º A	2º B	2º C
Alumnos	x	$\frac{x}{2}+10$	$\frac{x}{2}+8$

2) **Planteo de la ecuación:** *Para expresar que entre los tres cursos hay 92 alumnos escribimos:*

$$x+\left(\frac{x}{2}+10\right)+\left(\frac{x}{2}+8\right)=92$$

3) **Resolución de la ecuación:**

$$\begin{aligned}
x+\left(\frac{x}{2}+10\right)+\left(\frac{x}{2}+8\right)&=92\\
x+\frac{x}{2}+10+\frac{x}{2}+8&=92\\
x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}&=92-10-8\\
\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x&=74\\
2x&=74\\
x&=\frac{74}{2}\\
x&=37
\end{aligned}$$

4) **Comprobación de resultados:** *Comprobamos que el valor hallado de x satisface la ecuación:*

$$\begin{aligned}
37+\left(\frac{37}{2}+10\right)+\left(\frac{37}{2}+8\right)&=92\\
37+\frac{57}{2}+\frac{53}{2}&=92\\
92&=92
\end{aligned}$$

5) **Discusión de las soluciones:** *Si en 2º A hay 37 alumnos, en 2º B son* $\frac{37}{2}+10=\frac{57}{2}$ *y en 2º C son* $\frac{37}{2}+8=\frac{53}{2}$. *Esta solución satisface la ecuación, pero como no puede haber, por ejemplo* $\frac{57}{2}$ *de alumnos en 2º B, la situación descrita en el problema es imposible.*
Por ejemplo el problema tendría solución si la cantidad total de alumnos en 2º año fuese 94.

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** *es de la forma:*

$$\boxed{ax + by = c \ \ con \ \ a, b, c \in \mathbb{R}}$$

donde a y b no simultáneamente nulos.

Como veremos en el próximo capítulo este tipo de ecuaciones representan rectas del plano xy.

La diferencia con las ecuaciones lineales con una incógnita es que el conjunto solución es un conjunto infinito de pares de valores (uno correspondiente a x y otro a y), por ejemplo; consideremos la ecuación: $2x - y = 3$ [1]

Despejando la variable y, obtenemos: $y = 2x - 3$ *Entonces para cada valor de x que demos, tendremos un valor de y y este par de números será una solución de la ecuación* [1]. *Así los pares* (2,1); (0,-3) *y* (4,5) *son solución de* [1], *en efecto:*
$2 \cdot 2 - 1 = 3;$ $\quad 2 \cdot 0 - (-3) = 3;$ $\quad 2 \cdot 4 - 5 = 3$

Un **sistema de ecuaciones lineales** *con dos incógnitas es un conjunto formado por dos ecuaciones con dos incógnitas. Lo que caracteriza al sistema es que se busca una o más soluciones que sean soluciones de todas las ecuaciones planteadas en el sistema. Es decir que verifique simultáneamente ambas ecuaciones.*

Indicaremos un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2.2.1. Tipos de solución

Consideremos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Como (1) *y* (2) *representan rectas del plano xy pueden suceder los siguientes casos:*

- **Las rectas son oblicuas.**

  En este caso las rectas se cortan en un único punto $P = (x, y)$, como este punto pertenece a ambas rectas, satisface ambas ecuaciones simultáneamente y será solución del sistema.

- **Las rectas son coincidentes.**
  En este caso las rectas tienen en común todos sus puntos. Luego todos los puntos son solución simultanea de ambas ecuaciones y por lo tanto el sistema tendrá infinitas soluciones.

- **Las rectas son paralelas.**
  En este caso las rectas no se cortan en ningún punto, entonces no existe ningún punto que pertenezca a ambas rectas y por lo tanto que sea solución del sistema. Luego el sistema no tendrá solución.

Teniendo en cuenta el análisis anterior de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones, los clasificamos como sigue:

Sistema compatible: *Admite solución.*

Sistema compatible determinado: *Admite una única solución.*

Sistema compatible indeterminado: *Admite infinitas soluciones.*

Sistema incompatible: *No admite solución.*

$$\textit{Tipo de sistemas} \begin{cases} \textit{Compatibles} \begin{cases} \textit{Determinados} \\ \\ \textit{Indeterminados} \end{cases} \\ \\ \textit{Incompatibles} \end{cases}$$

2.3. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

2.3.1. Método de Igualación.

El método de igualación consiste en:

(I) *Despejar una de las incognitas de* **ambas** *ecuaciones.*

(II) *Igualar las expresiones obtenidas, de donde resultará una ecuación con una incógnita y resolver.*

(III) *Conocida la incógnita del paso (II) se sustituye su valor en alguna de las ecuaciones del paso (I) y se calcula la segunda.*

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(I) *Despejamos de ambas ecuaciones la variable "y".*

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = \dfrac{1-2x}{3} \end{cases}$$

(II) *Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos.*

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= \frac{1-2x}{3} \\ 3(3x-7) &= 1 - 2x \\ 9x - 21 &= 1 - 2x \\ 9x + 2x &= 1 + 21 \\ 11x &= 22 \\ x &= \frac{22}{11} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III) *Reemplazamos el valor obtenido en alguna de las ecuaciones de (I), por ejemplo la primera.*

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2 - 7 \\ y &= 6 - 7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(2, -1)\}$

2.3.2. Método de Sustitución.

El método de sustitución consiste en:

(I) *Despejar una de las incognitas de* **una** *de las ecuaciones.*

(II) *Sustituir la expresión obtenida en la* **otra** *ecuación, de donde resultará una ecuación con una incognita y resolver.*

(III) *Conocida la incógnita del paso (II) se sustituye su valor en la ecuación del paso (I) y se calcula la segunda.*

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(I) *Despejamos "y"de la primera ecuación.*

$y = 3x - 7$

(II) *Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos.*

$$\begin{aligned} 2x + 3(3x - 7) &= 1 \\ 2x + 9x - 21 &= 1 \\ 2x + 9x &= 1 + 21 \\ 11x &= 22 \\ x &= \frac{22}{11} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III) *Reemplazamos en la ecuación del paso (I).*

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2 - 7 \\ y &= 6 - 7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(2, -1)\}$

2.3.3. Método de Determinantes.

Antes de indicar el método, introduciremos algunos conceptos previos.

• *Una* **matriz** *de orden* 2×2 *es un arreglo de números de 2 filas (horizontales) y 2 columnas (verticales):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

• *Dada una matriz* A *de orden* 2×2, *el valor de su* **determinante** *se define como:*

$$\mathbf{det}A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplos:

(1) *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, *entonces* $\mathbf{det}A = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) = 23$

(2) *Si* $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, *entonces* $\mathbf{det}B = (-1) \cdot 3 - (-2) \cdot (-4) = -11$

(3) *Si* $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, *entonces* $\mathbf{det}C = \frac{1}{2} \cdot (-4) - (-\frac{2}{3}) \cdot 3 = 0$

Ahora veremos el método de resolución por determinantes.
Este método consiste en:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

(Debe estar ordenado de esa manera.)

(I) *Con los coeficientes* a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 *y* c_2 *formamos las siguientes matrices:*
Matriz principal, *que denotaremos por* ∇*:*

$$\nabla = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es: $\mathbf{det}\nabla = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$

Matriz asociada a x, *que denotaremos por* ∇_x*:*

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es: $\mathbf{det}\nabla_x = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2$

Matriz asociada a y, *que denotaremos por* ∇_y*:*

$$\nabla_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es: $\mathbf{det}\nabla_y = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2$

(II) *Calculamos los valores de x e y con los siguientes cocientes de determinantes.*

$$x = \frac{\mathbf{det}\nabla_x}{\mathbf{det}\nabla}, \qquad y = \frac{\mathbf{det}\nabla_y}{\mathbf{det}\nabla}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

En este caso tenemos $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $b_1 = -1$, $b_2 = 3$, $c_1 = 7$ y $c_2 = 1$

(I) *Formamos las matrices* ∇, ∇_x, ∇_y.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus respectivos determinantes $\mathbf{det}\Delta$, $\mathbf{det}\Delta_x$, $\mathbf{det}\Delta_y$.
$\mathbf{det}\Delta = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 11$
$\mathbf{det}\Delta_x = 7 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 22$
$\mathbf{det}\Delta_y = 3 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = -11$
(I) *Calculamos los valores de x e y.*

$$x = \frac{\mathbf{det}\nabla_x}{\mathbf{det}\nabla} = \frac{22}{11} = 2, \qquad y = \frac{\mathbf{det}\nabla_y}{\mathbf{det}\nabla} = \frac{-11}{11} = -1$$

El conjunto solución del sistema es $S = \{(2, -1)\}$

2.4. Ecuación de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita**, *una vez simplificada y ordenada tiene como expresión canónica:* $\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \; y \; a \neq 0}$

La ecuación cuadrática es de gran importancia en diversos campos, ya que junto con las ecuaciones lineales, permiten modelar un gran número de relaciones y leyes.

2.4.1. Soluciones de una ecuación de segundo grado completa.

Dada una ecuación de segundo grado con una incógnita: $ax^2 + bx + c = 0$ *sabemos que* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$, *decimos que la ecuación es* **completa** *si además se verifica que* $b \neq 0$ *y* $c \neq 0$

Las soluciones de esta ecuación se calculan mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

conocida como fórmula de Bhaskara.

El doble signo $\pm$ *que precede a la raíz indica que puede haber dos soluciones, llamadas también raíces de la ecuación cuadrática:*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión subradical $b^2 - 4ac$ *se llama discriminante y y lo simbolizamos con* Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La ecuación cuadrática puede tener dos, una o ninguna solución real. La cantidad de soluciones depende de que el discriminante sea positivo, cero o negativo.

- $\Delta > 0$, *la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.*

  Ejemplo:

  Encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$

  Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$

  Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ \\ x_2 = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

La ecuación tiene dos raíces reales y distintas $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$.

- $\Delta = 0$, *la ecuación tiene dos raíces reales y coincidentes. (se le llama raíz doble)*

  Ejemplo:

  Encontrar las soluciones de la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$

  Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

  Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+0}{8} = \dfrac{1}{2} \\ \\ x_2 = \dfrac{4-0}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  En este caso se dice que la ecuación tiene dos raíces reales coincidentes, $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ *o que tiene una raíz doble.*

- $\Delta < 0$, *la ecuación no tiene soluciones reales.*

  Ejemplo:

  Encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$

  Analizamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

  Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{R}$$

  La ecuación no tiene raíces reales, es decir, no tiene solución en $\mathbb{R}$.

2.4.2. Soluciones de una ecuación de segundo grado incompleta.

En la ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ podemos distinguir tres términos: el término cuadrático ax^2 , el término lineal bx y el término independiente c . Por ser de segundo grado, el término cuadrático siempre aparece ($a \neq 0$), pero puede suceder que falte alguno de los otros dos o ambos. En estos casos se dice que la ecuación es incompleta.

• *Si* $b = 0$ *, la ecuación no tiene término lineal:* $ax^2 + c = 0$*, con* $a \neq 0$ *y* $c \neq 0$*.*
Se resuelve despejando x*:*

$$x^2 = -\frac{c}{a} \text{ entonces } \mid x \mid = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ entonces } \begin{cases} x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

Ejemplo: *Resolver la ecuación* $2x^2 - 32 = 0$

$$x^2 = \frac{32}{2} \text{ entonces } \mid x \mid = \sqrt{16} \text{ entonces } \begin{cases} x_1 = \sqrt{16} = 4 \\ \\ x_2 = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$$

• *Si* $c = 0$ *, la ecuación no tiene término independiente:* $ax^2 + bx = 0$*, con* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$*.*
Para resolver sacamos factor común x*:*
$x(ax + b) = 0$
Teniendo en cuenta que el producto de dos o mas factores es cero, cuando al menos uno de ellos es cero, resulta:

$$\text{Si } x(ax+b) = 0 \text{ entonces } \begin{cases} x = 0 \\ \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: *Resolver la ecuación* $x^2 - 2x = 0$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ entonces } x(x-2) = 0 \text{ entonces } \begin{cases} x = 0 \\ \\ x - 2 = 0 \quad \text{entonces} \quad x = 2 \end{cases}$$

• *Si* $b = 0$ *y* $c = 0$ *entonces la ecuación se reduce a:* $ax^2 = 0$
Para este caso resulta que las soluciones son $x_1 = x_2 = 0$

2.4.3. Soluciones de una ecuación de segundo grado factorizada.

Dada la ecuación cuadrática $3x^2 - 6x - 9 = 0$*, es posible expresarla como producto de factores.*

Si nos encontramos con una igualdad como por ejemplo:

$$3(x-3)(x+1)=0$$

estamos frente a una ecuación de segundo grado donde el primer miembro está expresado como producto de 3 factores.

Para que ese producto sea cero es necesario que alguno de sus factores sea cero.

$$3(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ o \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ o \\ x=-1 \end{cases}$$

Si aplicamos la propiedad distributiva en el primer miembro de la ecuación, podemos obtener la expresión general de la ecuación cuadrática:

$$3(x-3)(x+1)=3(x^2+x-3x-3)=3(x^2-2x-3)=3x^2-6x-9=0$$

cuyas raíces son exactamente $x_1=3$ *y* $x_2=-1$*, en efecto:*

Analizamos el discriminante $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 3\cdot(-9)=144$

Usamos la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{144}}{2\cdot 3}=\frac{6\pm 12}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{6+12}{6}=3 \\ \\ x_2=\dfrac{6-12}{6}=-1 \end{cases}$$

En general la ecuación $ax^2+bx+c=0$ *se puede expresar como producto de factores de la siguiente manera:*

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

donde a es el coeficiente del término cuadrático y x_1*,* x_2 *son las raíces de la ecuación.*

2.5. Ejercitación

Ejercicio 15 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

a) $2x + 5 = 2$ Rta: $x = -\frac{3}{2}$

b) $2 \cdot (3x - 2) - (x + 3) = 8$ Rta: $x = 3$

c) $4x - 27 = -\dfrac{1}{2}x$ Rta: $x = 6$

d) $\dfrac{3x - 2}{7} = 4$ Rta: $x = 10$

e) $\dfrac{3}{2} \cdot \left(2x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$ Rta: $x = \frac{3}{5}$

f) $\dfrac{2 - 6x}{4} = \dfrac{1 + x}{2}$ Rta: $x = 0$

g) $\dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{5 - 2x}{3}\right) + 4 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{8 - x}{3}\right)$ Rta: $x = \frac{47}{4}$

h) $\dfrac{8x - 7}{4} + \dfrac{9 - 3x}{2} - 1 = x - \dfrac{5 \cdot (2x - 3)}{2}$ Rta: $x = \frac{23}{18}$

i) $3x + 4 - x = 7 + 2x$ Rta: $S = \emptyset$

j) $6 + (2x - 5) - (3x + 4) = \dfrac{x + 1}{2} + 2$ Rta: $x = -\frac{11}{3}$

Ejercicio 16 *Resolver los siguientes problemas usando ecuaciones.*

1) *La suma de tres números consecutivos es 69. ¿Cuáles son dichos números?*
Rta: *22, 23, 24.*

2) El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y este 3 años más que el menor. Si entre todos tienen la edad del padre que tiene 40 años, ¿que edad tiene cada hermano?
Rta: *10, 13, 17.*

3) En una caja hay el doble de caramelos de menta que de fresa y el triple de caramelos de naranja que de menta y fresa juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada clase?
Rta: *Menta:24, Fresa:12 y Naranja:108.*

4) *Dos números pares consecutivos suman 474. ¿Cuáles son esos números?* Rta: *236, 238.*

5) *En una biblioteca, la tercera parte de los libros son de música, la cuarta parte del resto de los libros son de ciencias sociales y 60 libros son de idioma extranjero. ¿Cuántos libros hay en total en la biblioteca?*
Rta: *120.*

6) *Una dactilógrafa tiene que hacer un trabajo en varios días. El primer día escribe la mitad, el segundo día escribe un tercio de lo que le queda, el tercer día escribe un cuarto de lo restante y el cuarto día termina el trabajo, para lo cual tiene que escribir 15 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el trabajo?*
Rta: *60.*

7) *El perímetro de un rectángulo es de 46 cm. La altura mide 3 cm más que la base. Calcular las longitudes de la base y altura respectivamente.*
Rta: *Base:10 cm, Altura:13 cm.*

8) *Martín gastó $12 de lo que tenia ahorrado en un regalo para su hermano, luego gastó $3 en golosinas y más tarde se ganó la misma cantidad que tenia ahorrado al principio en un juego. Despues de todo esto, contó su dinero y tenia $23. ¿Cuánto tenia ahorrado al principio?*
Rta: *$19.*

9) *Hallar un número cuyo quíntuplo disminuido en 17, sea igual a su triplo aumentado en 41.*
Rta: *29.*

10) *Hallar tres números consecutivos de modo que el primero más 5 veces el segundo más 9 veces el tercero, sea igual a 128.*
Rta: *7, 8, 9.*

Ejercicio 17 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, usando para cada uno un método distinto.*

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$ S={(4,1)}

b) $\begin{cases} y - 3 = -x \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$ S={(3,0)}

c) $\begin{cases} 4x + \frac{1}{2}y = 13 \\ -\frac{1}{3}x - 3y = -7 \end{cases}$ S={(3,2)}

Ejercicio 18 *La suma de dos números es 123 y uno es el doble del otro. ¿De que números se trata?*

Rta: 41 y 82.

Ejercicio 19 *En una juguetería donde se venden bicicletas y triciclos. Juan Pablo dijo que hay 60 ruedas. Javier agregó que hay 5 bicicletas más que triciclos. ¿Cuántos hay de que uno?*

Rta: bicicletas:15, triciclos:10.

Ejercicio 20 *En un bolso hay 40 monedas, todas ellas de \$0,25 y \$0,50. Si en total hay \$16,50. ¿Cuántas monedas de cada valor hay?*

Rta: 14 monedas de \$0,25 y 26 monedas de \$0,50.

Ejercicio 21 *Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron \$80 por persona sola y \$150 por pareja. Si a la fiesta asistieron en total 144 personas y se recaudaron \$10.980 por venta de entradas. ¿Cuántas parejas y cuántas personas solas asistieron a la fiesta?*

Rta: 36 personas solas y 54 parejas.

Ejercicio 22 *Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas:*

i) *Calcular el determinante* Δ.

ii) *Determinar si tiene dos raíces reales distintas, una raíz real doble o no tiene raíces reales.*

iii) *En caso de tener raíces reales, calcularlas y escribir cada ecuación en su forma factorizada* $a(x - x_1)(x - x_2)$.

a) $x^2 + x - 2 = 0$

b) $32x^2 - 20x + 3 = 0$

c) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

e) $2x^2 - 8x + 9 = 0$

f) $6x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 0$

g) $x^2 + 2x + 3 = 0$

h) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

Ejercicio 23 *La ecuación de segundo grado* $x^2 - 3hx + 9h = 0$ *tiene dos raices reales iguales.*

a) *Indicar cuál es el valor de* h, *sabiendo que las raíces son positivas.*

b) *Calcular las raíces de la ecuación para el valor* h *hallado en el inciso anterior.*

Ejercicio 24 *La ecuación de segundo grado* $px^2 + 10x + p = 0$ *tiene dos raices reales iguales.*

a) *Indicar cuál es el valor de* p, *sabiendo que las raíces son negativas.*

b) *Calcular las raíces de la ecuación para el valor* h *hallado en el inciso anterior.*

Ejercicio 25 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

c) $x^2 + 4 = 0$

d) $2x^2 + 8x = 0$

e) $3x^2 - 7x = 0$

Ejercicio 26 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

a) $x^2 + 2x(x-2) - 11 = -6x + x^2 + 1$

b) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{x+3}{x}$

c) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

d) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x+\frac{3}{2}}{x}$

e) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

3. Expresiones Algebraicas.

3.1. Expresiones algebraicas. Clasificación.

Una **expresión algebraica** *es una combinación de números y letras (que representan números), vinculadas entre sí por las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incognitas.*

Para abreviar cuando hablemos de expresiones algebraicas usaremos **E.A***.*

Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 + 8 - 3\frac{x \cdot y}{z^2}, \qquad \frac{x^5 - 3x^2 + \sqrt{5}x^6}{x^3 + 2}, \qquad (x-5)^3 + 2z, \qquad 3\sqrt{x} + \frac{x}{y}$$

Podemos distinguir dos tipos básicos de **E.A***, estas son las* **E.A** *irracionales y las* **E.A** *racionales, dentro de estas últimas vamos a considerar dos subtipos, las* **E.A** *racionales enteras y las fraccionarias.*

Resumimos lo anterior en el siguiente esquema:

$$\text{Expresiones algebraicas} \begin{cases} \text{Irracionales} \\ \\ \text{Racionales} \begin{cases} \text{enteras} \\ \\ \text{fraccionarias} \end{cases} \end{cases}$$

E.A *irracionales: Son expresiones algebraicas en las que alguna de las variables aparece afectada por radicales o exponente fraccionario.*

E.A *Racionales: Son expresiones algebraicas en las que las variables aparecen afectadas por sumas, restas, productos, cocientes y potencias. (sin radicales)*

E.A *enteras: En todas las variable los exponentes son naturales o cero.*

E.A *fraccionarias: Alguna de las variables forma parte de un divisor o presenta exponente negativo.*

3.2. Expresiones algebraicas enteras.

En lo que sigue de este curso, con el fin de simplicar la notación, solo consideraremos expresiones algebraicas en una sola variable, la variable x.

3.2.1. Monomios.

Las expresiones algebraicas enteras de un solo término, se denominan **monomios**.

Es decir, son expresiones algebraicas formadas por el producto de un número real y una potencia de x con exponente natural o cero. Al número real en un monomio lo llamaremos "coeficiente" de dicho monomio.

Los siguientes son ejemplos de monomios: x^{10}, $3x^7$, $\frac{4}{5}x^2$, $\sqrt{3}x^5$.

Todo número real es un monomio donde la variable se encuentra elevada al exponente cero, es decir todo número r se puede escribir de la forma $rx^0 = r$. Además el número 0, puede ser expresado como $0x^n = 0$, para cualquier n natural, a este lo llamaremos el monomio nulo.

Llamaremos "grado" de un monomio al exponente de la variable x, a excepción del monomio nulo al cual no le asignaremos grado.

Ejemplos:

(1) $5x^7$, $-x^7$, $\frac{2}{3}x^7$ *son monomios de grado 7.*

(2) *Todo número real distinto de cero es un monomio de grado 0.*

(3) *El monomio* 0 *no tiene grado.*

A los monomios del mismo grado, los llamaremos "monomios semejantes".

Operaciones con monomios.

• **Suma y resta de monomios.**

Si sumamos dos monomios semejantes, cuyos coeficientes no son opuestos, obtenemos otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes:

$$3x^4 + 8x^4 = (3 + 8)x^4 = 11x^4$$

Si los coeficientes son opuestos, el resultado es el monomio nulo:

$$6x^4 + (-6)x^4 = 0$$

Del mismo modo, si restamos monomios semejantes distintos , obtenemos otro monomio semejante cuyo coeficiente es la resta de los coeficientes:

$$7x^9 - 2x^9 = (7-2)x^9 = 5x^9$$

Nota: *Solo se pueden sumar o restar monomios semejantes.*

• **Producto y cociente de monomios.**

El producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados:

$$7x^3 \cdot 2x^5 = (7 \cdot 2)x^{3+5} = 14x^8$$

El cociente de dos monomios es otro monomio (siempre que el grado del monomio divisor sea menor o igual al grado del monomio dividendo), cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y el grado es la resta de los grados:

$$\frac{9x^8}{5x^3} = 9x^8 : 5x^3 = \frac{9}{5}x^{8-3} = \frac{9}{5}x^5$$

3.2.2. Polinomios.

Un **polinomio** *es una suma algebraica de monomios.*

Las siguientes expresiones son ejemplos de polinomios:

$$4x^5 - 2x^6 + 2, \qquad \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 3, \qquad 7, \qquad 5x^3 - 8x^9, \qquad 12x^5.$$

Para denotar a los polinomios en la variable x usaremos notaciones como $P(x)$, $Q(x)$, $C(x)$, $R(x)$, etc.

Es frecuente representar a los polinomios de la siguiente forma:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ donde } a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \text{ y } a_n \neq 0}$$

Diremos que un polinomio expresado en la forma anterior está ordenado en forma decreciente y está completo.

Sea $P(x)$ un polinomio expresado en la forma anterior. Diremos:

(i) $a_0, a_1, \cdots, a_n$, *son los coeficientes de $P(x)$.*

(ii) a_0 *es el término independiente o coeficiente constante.*

(iii) $a_n \neq 0$ *es el coficiente principal.*

(iv) n *es el grado de* $P(x)$ *y corresponde al mayor de los grados de los monomios que forman* $P(x)$.

3.2.3. Operaciones con polinomios.

• **Suma de polinomios.**

"La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando los monomios semejantes".

Por ejemplo, para sumar los polinomios:

$P(x) = -2x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ y $Q(x) = 6x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4$

procedemos como sigue:

$$P(x) + Q(x) = (-2x^4 + 3x^2 - 5x + 1) + (6x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4)$$

(eliminamos parentesis)

$$= -2x^4 + 3x^2 - 5x + 1 + 6x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4$$

(agrupamos monomios semejantes)

$$= (-2x^4 + 6x^4) + (2x^3) + (3x^2 - 7x^2) + (-5x) + (1 - 4)$$

(sumamos monomios semejantes)

$$= 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$$

luego $P(x) + Q(x) = 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$

• **Resta de polinomios.**

"La resta de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene restando los monomios semejantes".

Por ejemplo, para restar los polinomios del ejemplo anterior:

procedemos como sigue:

$$P(x) - Q(x) = (-2x^4 + 3x^2 - 5x + 1) - (6x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4)$$

(eliminamos parentesis)

$$= -2x^4 + 3x^2 - 5x + 1 - 6x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 4$$

(agrupamos monomios semejantes)

$$= (-2x^4 - 6x^4) + (-2x^3) + (3x^2 + 7x^2) + (-5x) + (1 + 4)$$

(sumamos monomios semejantes)

$$= -10x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 5x + 5$$

luego $P(x) - Q(x) = -10x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 5x + 5$

• **Producto de polinomios.**

"El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando todos los monomios de uno por todos los monomios del otro".

Por ejemplo, para multiplicar los polinomios:

$P(x) = 5x^2 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^3 - x$

procedemos como sigue:

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 2x + 3) \cdot (2x^3 - x)$$

(aplicamos propiedad distributiva y regla de los signos)

$$= (5x^2 \cdot 2x^3) - (5x^2 \cdot x) - (2x \cdot 2x^3) + (2x \cdot x) + (3 \cdot 2x^3) - (3 \cdot x)$$

(realizamos el producto de monomios)

$$= 10x^5 - 5x^3 - 4x^4 + 2x^2 + 6x^3 - 3x$$

(agrupamos y sumamos monomios semejantes)

$$= 10x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x$$

luego $P(x) \cdot Q(x) = 10x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x$

Algunos productos especiales:

• *Diferencia de cuadrados:*

$$\boxed{(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2}$$

• *Cuadrado de un binomio:*

$$\boxed{(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2xa + a^2}$$

- *Cubo de un binomio:*

$$\boxed{(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3}$$

- **Algoritmo de la división.**

"Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x)$ no nulo, existen dos únicos polinomios $C(x)$ y $R(x)$, llamados cociente y resto respectivamente de dividir $P(x)$ en $Q(x)$, tal que:

$$\boxed{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

donde $R(x)$ es un polinomio nulo o de grado menor que el grado de $Q(x)$".

Hacer la división de un polinomio $P(x)$ en otro $Q(x)$, es hallar los polinomios $C(x)$ y $R(x)$.

En lo que sigue solo nos ocuparemos de divisiones donde el polinomio divisor $Q(x)$ es de la forma $Q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$.

Para estos casos existe un algoritmo sencillo para realizar la división, llamado Regla de Ruffini.

Regla de Ruffini.

Vamos a mostrar el algoritmo con un ejemplo

Consideremos el polinomio $P(x) = -5x^2 + x^4 + 10x - 2$ y $Q(x) = x + 3$

Antes de comenzar nos aseguramos de "completar y ordenar" $P(x)$, en este caso:

$$P(x) = x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 10x - 2$$

(1) *Realizamos un arreglo como el siguiente:*

(2) *Agregamos los coeficientes de $P(x)$ de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -5 & 10 & -2 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

(3) *Agregamos el "opuesto" del término independiente de $Q(x)$, es decir $a = -3$:*

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 10 & -2 \\ & & & & & \\ -3 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

(4) *Realizamos los siguiente pasos:*

a) *Se baja el primer coeficiente al 3º renglón,*

b) *Se multiplica por a=-3 y el resultado se coloca en el 2º renglón,*

c) *Se suma con el coeficiente correspondiente,*

d) *Se coloca el resultado en el 3º renglón.(como indican las flechas)*

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 0 & -5 & 10 & -2 \\ & \downarrow & \downarrow + & & & \\ -3 & \downarrow & -3 & & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

(5) *Se repiten los pasos b), c), d), hasta llegar al último coeficiente:*

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 0 & -5 & 10 & -2 \\ & \downarrow & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\ -3 & \downarrow & -3 & 9 & -12 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & -2 & 4 \end{array}$$

(6) *El último número del 3º renglón es el polinomio resto $R(x)$ de la división y los anteriores son los coeficientes del polinomio cociente $C(x)$. Es decir*

$$C(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

$$R(x) = 4$$

Además se verifica el algoritmo de la división: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, esto es:

$$x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 10x - 2 = (x + 3) \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) + 4$$

Comprobarlo.

Veamos el siguiente ejemplo:

Consideremos la división de $P(x) = -4x^2 + x + x^3 + 6$ *en* $Q(x) = x - 3$.

Aplicaremos la regla de Ruffini. Para ello primero ordenamos y completamos $P(x)$

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & & & \\ 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto

$$C(x) = x^2 - x - 2 \quad \text{y} \quad R(x) = 0$$

Aplicando el algoritmo de la división:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 3) \cdot (x^2 - x - 2)$$

En este caso como el resto es cero, hemos podido descomponer el polinomio $P(x)$ *como producto de dos polinomios.*

El objetivo principal de esta unidad es poder descomponer, en forma similar a la anterior, un polinomio en producto de otros polinomios de menor grado.

3.2.4. Valor númerico de un polinomio.

Dado un polinomio $P(x)$, *y* $k \in \mathbb{R}$, *se llama* **valor numérico** *de* $P(x)$ *en* $x = k$ *al número real que se obtiene reemplazando toda aparición de* x *por el valor* k. *Esto es:*

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *entonces el valor numérico de* $P(x)$ *en* $x = k$ *viene dado por:* $P(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$

Veamos un ejemplo:

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

El valor numérico de $P(x)$ *en* $x = 2$ *es:*

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = -4$$

El valor numérico de $P(x)$ *en* $x = 3$ *es:*

$$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

3.2.5. Raíces de un polinomio.

Un número real a es una **raíz** *de un polinomio* $P(x)$ *si y solo si el valor numérico de* $P(x)$ *en* $x = a$ *es cero. Es decir si* $P(a) = 0$

$$\boxed{x=a \text{ es raíz de } P(x) \text{ si y solo si } P(a)=0}$$

En el ejemplo anterior donde $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$*, resulta que* $x = 3$ *es raíz de* $P(x)$ *y* $x = 2$ *no es raíz de* $P(x)$*, Pues* $P(3) = 0$ *y* $P(2) \neq 0$

En general, para hallar las raíces de un polinomio $P(x)$ *debemos resolver la ecuación:*

$$\boxed{P(x) = 0}$$

Lo que en el caso general, no es una tarea sencilla.

3.2.6. Divisibilidad de polinomios.

Diremos que un polinomio $P(x)$ *es* **divisible** *en el polinomio* $Q(x)$ *si y solo si el resto que resulta de dividir* $P(x)$ *en* $Q(x)$ *es nulo.*

Notemos que dados dos polinomios $P(x)$ *y* $Q(x)$*, con* $Q(x)$ *no nulo, aplicando el algoritmo de la división, exiten* $C(x)$ *(cociente) y* $R(x)$ *(resto) tal que* $P(x) = Q(x)\cdot C(x)+R(x)$*.*

Luego si $P(x)$ *es divisible en* $Q(x)$ *entonces el resto es nulo, es decir* $R(x) = 0$*.*

De donde obtenemos que $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$*.*

Cuando hablamos de divisivilidad entre un polinomio $P(x)$ *y otro* $Q(x)$ *estamos interesados en conocer solo el resto de división, el siguiente teorema nos da una forma sencilla de calcular dicho resto para casos particulares.*

Teorema del resto

"El resto de dividir un polinomio $P(x)$ *por un polinomio de la forma* $x - a$*, es igual al valor numérico de* $P(x)$ *en* $x = a$*. Esto es,* $R(x) = P(a)$*."*

En un ejemplo anterior aplicando la regla de Ruffini para dividir el polinomio $P(x) = -5x^2 + x^4 + 10x - 2$ *en el polinomio* $Q(x) = x + 3$*, habíamos obtenido que el cociente era* $C(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ *y el resto* $R(x) = 4$*.*

A modo de ejemplo usaremos el Teorema del resto en esta división, en este caso $Q(x)$ *es de la forma* $x - a$ *donde* $a = -3$*. Luego* $R(x) = P(-3)$*, en efecto:*

$$P(x) = -5x^2 + x^4 + 10x - 2 \text{ y } a = -3$$

$$
\begin{aligned}
P(-3) &= -5\cdot(-3)^2 + (-3)^4 + 10\cdot(-3) - 2 \\
&= -5\cdot 9 + 81 - 30 - 2 \\
&= -45 + 81 - 30 - 2 \\
&= 4 = R(x)
\end{aligned}
$$

A continuación veremos un criterio **muy importante** *de divisivilidad usando el Teorema del resto y la definición de raíz de un polinomio.*

Criterio de divisivilidad para polinomios de la forma x-a.

"Un número a es raíz de un polinomio $P(x)$ si y solo si $P(x)$ es divisible en $x-a$."

Consideremos un polinomio $P(x)$ y otro $Q(x) = x - a$, aplicando el algoritmo de la división, tenemos que existen $C(x)$ y $R(x)$ tal que:

$$P(x) = (x-a)\cdot C(x) + R(x)$$

Si a es raíz de $P(x)$ entonces $P(x)$ es divisible en $x-a$, y por definición de divisivilidad el resto $R(x) = 0$. Luego:

$$P(x) = (x-a)\cdot C(x)$$

Es decir, $x-a$ es un factor de $P(x)$

Veamos los siguientes ejemplos:

(a) *Sea el polinomio $P(x) = x^2 - x - 6$, una raíz de $P(x)$ es 3, pues:*

$P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$

Luego $P(x)$ es divisible en $x-3$

y se podrá escribir como $P(x) = (x-3)\cdot C(x)$

(b) *Sea el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$, una raíz de $P(x)$ es -1, pues:*

$P(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - 2(-1)^2 + 12(-1) + 9 = 0$

Luego $P(x)$ es divisible en $x+1$

y se podrá escribir como $P(x) = (x+1)\cdot C(x)$

En resumen, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\boxed{P(x) \text{ es divisble en } x - a}$
- $\boxed{\text{el resto de la división } R(x) = 0}$
- $\boxed{P(a) = 0}$
- $\boxed{a \text{ es raíz de} P(x)}$

3.2.7. Factorización de polinomios.

Hemos comenzado el estudio de los polinomios escribiendolos como suma algebraica de sus términos; después, cuando teníamos divisiones exactas, los polinomios resultaban descompuestos en producto de otros polinomios. Esto nos lleva a la siguiente definición:

“ **Factorizar** *un polinomio es transformarlo en producto de dos o más polinomios irreducibles o primos.”*

Un polinomio se dice **irreducible** *o* **primo** *si este no se puede descomponer en el producto de polinomios de menor grado que él.”*

Los polinomios que estudiamos en este curso son polinomios a coeficientes reales, en este caso los únicos polinomios primos son:

(i) *Los polinomios de grado uno con coeficiente principal 1.*

(ii) *Los polinomios de grado dos que no poseen raíces reales.*

Ya hemos visto que si conocemos una raíz “a” de un polinomio $P(x)$ entonces este se puede escribir de la forma $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$. Lo que nos indica la importancia de conocer las raíces de un polinomio para su factorización.

El siguiente Teorema nos asegura la existencia de raíces.

Teorema fundamental del Algebra

> *"Un polinomio $P(x)$ de grado n tiene exactamente n raíces".*

Lo que no nos dice, es si estas raíces son reales o no. Veamos el siguiente ejemplo:
Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 + 1$,
Como vimos las raíces son los números que satisfacen la ecuación $P(x) = 0$,
es decir $x^2 + 1 = 0$, que es una ecuación cuadrática, usando la fórmula de Bhaskara

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Esto nos dice que el polinomio no tiene raíces reales, si tiene raíces pero estas son "números complejos", lo cual no veremos en este curso.

De hecho, este polinomio es un ploinomio primo, pues es de grado dos y no tiene raíces reales. Esto quiere decir que no se puede factorizar.

Lo que si nos permite asegurar el **TFA** *es lo siguiente:*

> *"Un polinomio $P(x)$ de grado n tiene como máximo n raíces reales".*

Veamos el siguiente ejemplo de factorización:
Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$
-5 es una raíz de $P(x)$, en efecto:
$P(-5) = (-5)^3 + 5(-5)^2 + (-5) + 5 = 0$
Luego $P(x)$ es divisible en $x + 5$ y podemos escribir:
$P(x) = (x + 5) \cdot C(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división de $P(x)$ en $x + 5$
Para hallar $C(x)$ usamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 1 & 5 \\ & & & & \\ -5 & & -5 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto

$$C(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad R(x) = 0$$

Así, hemos podido descomponer a $P(x)$ en producto de polinomios primos.

$$P(x) = (x+5) \cdot (x^2+1)$$

El siguiente Teorema de **fundamental** *importancia, nos brinda una forma sencilla de obtener la factorización para ciertos polinomios*

Teorema de Gauss

Si $P(x)$ es un polinomio de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

que tiene **n** *raíces* **reales**, $r_1, r_2, \cdots, r_n$, *entonces $P(x)$ puede factorizarse como sigue:*

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

Veamos un ejemplo de factorización usando el Teorema de Gauss.
Consideremos el polinomio $P(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$
El polinomio $P(x)$ que es de grado 4, tiene 4 raíces reales, estas son:
$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = -1, r_4 = -4$, *en efecto:*
$P(2) = (2)^4 - 15(2)^2 + 10(2) + 24 = 0$
$P(3) = (3)^4 - 15(3)^2 + 10(3) + 24 = 0$
$P(-1) = (-1)^4 - 15(-1)^2 + 10(-1) + 24 = 0$
$P(-4) = (-4)^4 - 15(-4)^2 + 10(-4) + 24 = 0$
Luego, usando el Teorema de Gauss:

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot (x - r_4)$$

En este caso $a_n = 1$ y reemplazando el valor de las raíces, obtenemos:

$$P(x) = (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+1) \cdot (x+4)$$

Lo mostrado anteriormente, nos dice que es fundamental encontrar las raíces reales de un polinomio. Lo que en general no es tarea sencilla.

Ya vimos que hallar las raíces de un polinomio $P(x)$ es resolver la ecuación, $P(x) = 0$.

• Factorización de polinomios de grado 1.

Consideremos un polinomio $P(x)$ de grado 1, entonces lo podemos escribir como sigue:

$$P(x) = ax + b, \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Para hallar las raíces, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$ax + b = 0$$

Que es una ecuación de primer grado en una variable y cuya solución, vista en la unidad anterior es:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Es decir el polinomio tiene una raíz $r = -\frac{b}{a}$. Luego su factorización es:

$$P(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{a}\right)$$

Ejemplos:

(1) *Sea $P(x) = 3x - 9$*

Hallamos la raíz resolviendo, $3x - 9 = 0$, esto es $x = 3$

Luego $P(x) = 3(x - 3)$

(2) *Sea $P(x) = 2x + 7$*

Hallamos la raíz resolviendo, $2x + 7 = 0$, esto es $x = -\frac{7}{2}$

Luego $P(x) = 2(x + \frac{7}{2})$

• Factorización de polinomios de grado 2.

Consideremos un polinomio $P(x)$ de grado 2, entonces lo podemos escribir como sigue:

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Para hallar las raíces, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Que es una ecuación cuadrática y cuyas soluciones podemos calcularlas usando la fórmula de Bhaskara:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se presentan los tres casos siguientes:

(a) r_1 *y* r_2 *son raíces reales y distintas, luego:*

$P(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$

(b) r_1 *y* r_2 *son raíces reales e iguales* ($r_1 = r_2$)*, luego:*

$P(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_1)$ o $P(x) = a \cdot (x - r_1)^2$

(c) r_1 *y* r_2 *no son raíces reales, entonces* $P(x)$ *es primo y no se puede factorizar.*

Ejemplos:

(1) *Sea* $P(x) = 3x^2 - 3x - 6$

Hallamos las raíces resolviendo, $3x^2 - 3x - 6 = 0$*, aplicando la fórmula de Bhaskara:*

$r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{3 \pm \sqrt{81}}{6} = \dfrac{3 \pm 9}{6}$

de donde obtenemos: $r_1 = 2$ *y* $r_2 = -1$

Luego $P(x) = 3(x - 2)(x + 1)$

(2) *Sea* $P(x) = 2x^2 - 20x + 50$

Hallamos las raíces resolviendo, $2x^2 - 20x + 50 = 0$*, aplicando la fórmula de Bhaskara:*

$r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{20 \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{20 \pm 0}{4}$

de donde obtenemos: $r_1 = r_2 = 5$

Luego $P(x) = 2(x - 5)(x - 5)$ *o* $P(x) = 2(x - 5)^2$

Nos proponemos ahora hallar raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3*, si bien exiten fórmulas que permiten resolver ecuaciones de grado* 3 *y* 4*, no creemos razonable incluirlas en este curso. Se dice que las ecuaciones de grado menor que* 5 *admiten resolubilidad por "radicales" porque pueden resolverse mediante fórmulas que involucran las operaciones de suma, producto y extracción de raíces.*

El problema de la resolución general de la ecuación de grado "n" por radicales ha sido de gran importancia en la historia de la Matemática. Se puede demostrar que no es posible obtener una fórmula general que involucre sólamente las operaciones de suma, producto y extracción de raíces n-ésimas y que permita calcular las raíces de un polinomio de grado mayor o igual 5. *La solución de este problema se debe a Evaristo Galois (1811-1832)*

• **Factorización de polinomios de grado mayor o igual 3.**

Para obtener las raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3, usaremos un método por tanteo. Esto es, localizar por prueba y error las posibles raíces.

Si un polinomio $P(x)$ *tiene una raíz racional, el siguiente procedimiento (de Gauss) nos indica como detectarla:*

(i) *Consideramos un polinomio de grado "n" de la siguiente forma:*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

(ii) *Hallamos los divisores del término independiente* a_0 *y del coeficiente principal* a_n, *que indicaremos por* $D(a_0)$ *y* $D(a_n)$ *respectivamente.*

(iii) *El conjunto de posibles raíces que denotaremos por* P_r, *está formado por los cocientes de todos los divisores de* a_0 *por todos los divisores de* a_n.

(iv) *Usando, por ejemplo el Teorema del resto, "chequeamos" cual de estas posibles raíces realmente lo és.*

(v) *Una vez localizada una raíz, usamos la regla de Ruffini para descomponer* $P(x)$ *en producto de polinomios de menor grado.*

Nota: *Si* $a_n = 1$ *entonces las posibles raíces son los divisores de* a_0. *Esto es* $P_r = D(a_0)$

A continuación, veremos un ejemplo del método.

• *Consideremos el polinomio* $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Como $a_n = 1$ *solo hallamos los divisores de* $a_0 = 6$

Las posibles raíces son $P_r = D(a_0) = D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Usando el Teorema del resto, localizamos alguna raíz, probemos con $r = 1$

$R(x) = P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 - 3(1)^2 + 11(1) - 6 = 0,$ *es decir que* 1 *es raíz*

Luego $P(x)$ *es divisible en* $x - 1$ *y podemos escribir*

$P(x) = (x - 1) \cdot C(x)$

Usando la regla de Ruffini, hallamos $C(x)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ & & & & & \\ 1 & & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $C(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Hemos obtenido la siguiente factorización parcial:

$P(x) = (x - 1) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$ (I)

Realizamos el mismo procedimiento para $C(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Las posibles raíces son $P_r = D(a_0) = D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Usando el Teorema del resto, localizamos otra raíz, probemos con $r = -2$

$R(x) = C(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = 0,$ *es decir que* -2 *es raíz*

Luego $C(x)$ *es divisible en* $x + 2$ *y podemos escribir*

$C(x) = (x + 2) \cdot C_1(x)$

Usando la regla de Ruffini, hallamos $C_1(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & & & \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $C_1(x) = x^2 - 4x + 3$

Hemos obtenido la siguiente factorización parcial:

$C(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 3)$ (II)

De (I) *y* (II) $P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2-4x+3)$ (III)

Podemos realizar nuevamente el procedimiento para $C_1 = x^2 - 4x + 3$

Sin embargo C_1 *es un polinomio de grado dos, por lo tanto podemos usar la fórmula de Bhaskara:*

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

de donde obtenemos: $r_1 = 3$ *y* $r_2 = 1$

Luego $C_1(x) = (x-3)\cdot(x-1)$ (IV)

Finalmente de (III) *y* (IV) *obtenemos:*

$P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)$

3.2.8. Casos especiales de factorización.

Factor común.

El factor común es el monomio que se forma de con el divisor común mayor de los coeficientes del polinomio y la variable elevada al menor de los exponentes.

Ejemplos:

(a) $P(x) = 12x^7 - 9x^4 + 15x^3 = 3x^3(4x^4 - 3x + 5)$

(b) $Q(x) = 2x^5 - 3x^3 + 5x^2 = x^2(2x^3 - 3x + 5)$

(c) $T(x) = 14x^6 + 8x^3 + 6 = 2(7x^6 + 4x^3 + 3)$

Diferencia de cuadrados.

La diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)}$$

Ejemplos:

(a) $P(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

(b) $Q(x) = x^6 - 121 = (x^3+11)(x^3-11)$

(c) $T(x) = 16x^4 - 25 = (4x^2+5)(4x^2-5)$

Trinomio cuadrado perfecto.

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza como el cuadrado de un binomio.

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

Ejemplos:

(a) $P(x) = x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

(b) $Q(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

(c) $T(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

Cuatrinomio cubo perfecto.

Un Cuatrinomio cubo perfecto se factoriza como el cubo de un binomio.

$$\boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3}$$

$$\boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3}$$

Ejemplos:

(a) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

(b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$

(c) $T(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$

3.3. Expresiones algebraicas fraccionarias.

Un expresión algebraica fraccionaria, para abreviar **E.A.F.**, *es un cociente entre dos polinomios* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *con* $Q(x)$ *no nulo.*

3.3.1. Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.

Simplificar *una expresión algebraica fraccionaria es dividir numerador y denominador por un mismo polinomio no nulo. Es necesario siempre obtener una forma factorizada de los polinomios que intervienen en la expresión.*

Una expresión que no puede simplificarse por carecer de factores comunes a numerador y denominador se denomina "irreducible".

Ejemplos: *Simplicar las siguientes expresiones algebraicas.*

(1) $\dfrac{x^2-16}{x^3+4x^2}$

Factorizamos numerador y denominador, notemos que el numerador es una diferencia de cuadrados: $x^2-16=(x+4)(x-4)$ *y en el denominador* x^2 *es un factor común:* $x^3+4x^2=x^2(x+4)$. *Luego la expresión* (1) *puede escribirse como:*

$$\frac{(x+4)(x-4)}{x^2(x+4)}$$

Si dividimos numerador y denominador por $x+4$, *la expresión se simplifica:*

$$\frac{\overbrace{(x+4)}(x-4)}{x^2\underbrace{(x+4)}}=\frac{x-4}{x^2}$$

(2) $\dfrac{9x^3-45}{x^4-5x}$

En este caso podemos sacar a 9 como factor común del numerador: $9x^3-45=9(x^3-5)$ *y en el denominador* x *es un factor común:* $x^4-5x=x(x^3-5)$. *Luego la expresión* (2) *puede escribirse como:*

$$\frac{9(x^3-5)}{x(x^3-5)}$$

Si dividimos numerador y denominador por x^3-5, *la expresión se simplifica:*

$$\frac{9\overbrace{(x^3-5)}}{x\underbrace{(x^3-5)}}=\frac{9}{x}$$

(3) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$

En el numerador encontramos un trinomio cuadrado perfecto: $x^2-6x+9=(x-3)^2$ *y en el denominador un polinomio de grado dos con raíces* 3 *y* -1 *entonces:* $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. *Ahora podemos escribir la expresión* (3) *como:*

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}$$

Si dividimos numerador y denominador por $x-3$, *la expresión se simplifica:*

$$\frac{\overbrace{(x-3)}^{2}}{\underbrace{(x-3)}(x+1)}=\frac{x-3}{x+1}$$

Nota: *Es importante tener en cuenta que al simplificar una expresión no obtenemos una expresión equivalentes. Es decir el valor numérico de estas expresiones no coincide (en algunos valores).*

En la simplificación de la expresión (1) *teníamos:*

$$\frac{(x+4)(x-4)}{x^2(x+4)}=\frac{x-4}{x^2}$$

el primer miembro no está definido en $x=-4$ *(donde se anula* $x+4$*) y el segundo si.*

En la simplificación de la expresión (2)*:*

$$\frac{9(x^3-5)}{x(x^3-5)}=\frac{9}{x}$$

el primer miembro no está definido en $x=\sqrt[3]{5}$ *(donde se anula* x^3-5*) y el segundo si.*

En la simplificación de la expresión (3)*:*

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}=\frac{x-3}{x+1}$$

el primer miembro no está definido en $x=3$ *(donde se anula* $x-3$*) y el segundo si.*

En general:

Si simplificamos una expresión dividiendo numerador y denominador por un polinomio $Q(x)$ *obtenemos otra expresión equivalente "excepto" para los valores de* x *donde se anula* $Q(x)$.

3.3.2. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

- **Multiplicación y división:**

Para multiplicar o dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias se procede como si fuesen fracciones numéricas. Esto es:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot N(x)}}$$

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{N(x)}{M(x)} = \frac{P(x) \cdot N(x)}{Q(x) \cdot M(x)}}$$

Nota: *Antes de efectuar la operación es* **necesario** *factorizar las expresiones para poder simplificar el cálculo. Recordemos que en la multiplicación se puede simplificar "cruzado".*

Veamos los siguientes ejemplos:

(a) $\dfrac{x^4+6x^3+9x^2}{x^2-1} \cdot \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+3x} =$

Procedemos a factorizar cada uno de los polinomios de las expresiones:

$$x^4+6x^3+9x^2 = x^2(x^2+6x+9), \quad (\textit{Factor común})$$

$$= x^2(x+3)^2, \quad (\textit{Trinomio cuadrado perfecto})$$

$$x^2-1 = (x+1)(x-1), \quad (\textit{Diferencia de cuadrados})$$

$$x^3-2x^2-x+2 = (x+1)(x-2)(x-1), \quad (\textit{Método de Gauss})$$

$$x^2+3x = x(x+3), \quad (\textit{Factor común})$$

Reemplazamos cada polinomio por su forma factorizada:

$$\frac{x^2(x+3)^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{x(x+3)}$$

Simplificamos y resolvemos:

$$\frac{x(x+3)}{1} \cdot \frac{x-2}{1} = x(x+3)\cdot(x-2)$$

(b) $\dfrac{x+2}{x^2-16} : \dfrac{5x+10}{x^2+4x} =$

Escribimos la división como una multiplicación:

$$\frac{x+2}{x^2-16} \cdot \frac{x^2+4x}{5x+10} =$$

Procedemos a factorizar cada uno de los polinomios de las expresiones:

$x^2 - 16 = (x+4)(x-4), \quad (Diferencia\ de\ cuadrados)$

$x^2 + 4x = x(x+4), \quad (Factor\ común)$

$5x + 10 = 5(x+2), \quad (Factor\ común)$

Reemplazamos cada polinomio por su forma factorizada:

$$\frac{x+2}{(x+4)(x-4)} \cdot \frac{x(x+4)}{5(x+2)}$$

Simplificamos y resolvemos:

$$\frac{1}{x-4} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x}{5(x-4)}$$

- **Adición y sustracción:**

Para sumar o restar dos expresiones algebraicas fraccionarias se factorizan los denominadores y se procede como si fuesen fracciones numéricas. Esto es:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{P(x)\cdot(D(x) : Q(x)) \pm M(x)\cdot(D(x) : N(x))}{D(x)}}$$

donde $D(x) = m.c.m(Q(x), N(x))$ *(múltiplo común menor)*

Para calcular el m.c.m se multiplican los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Veamos los siguientes ejemplos:

(a) $\dfrac{2x^3}{x^2-1} + \dfrac{x+3}{x^2+2x+1} - \dfrac{5}{x-1} =$

Factorizamos los denominadores:

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad (Diferencia\ de\ cuadrados)$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2, \quad (Trinomio\ cuadrado\ perfecto)$

Reemplazamos cada denominador por su forma factorizada:

$$\frac{2x^3}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+3}{(x+1)^2} - \frac{5}{x-1} =$$

Hallamos el m.c.m, que en este caso es: $(x+1)^2(x-1)$

Resolvemos la suma:

$$\frac{2x^3}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+3}{(x+1)^2} - \frac{5}{x-1} = \frac{2x^3(x+1)+(x+3)(x-1)-5(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}$$

Resolvemos el numerador del segundo miembro:

$$= \frac{2x^4+2x^3+x^2+2x-3-5x^2-10x-5}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{2x^4+2x^3-4x^2-8x-8}{(x+1)^2(x-1)}$$

(b) $\dfrac{x^3}{x+2} + \dfrac{4x^3}{4x+8} + \dfrac{4x^3+8x^2}{x^2+4x+4} =$

Factorizamos los denominadores:

$4x+8 = 4(x+2)$, (*Factor común*)

$x^2+4x+4 = (x+2)^2$, (*Trinomio cuadrado perfecto*)

Reemplazamos cada denominador por su forma factorizada:

$$\frac{x^3}{x+2} + \frac{4x^3}{4(x+2)} + \frac{4x^3+8x^2}{(x+2)^2} =$$

Hallamos el m.c.m, que en este caso es: $4(x+1)^2$

Resolvemos la suma:

$$\frac{x^3}{x+2} + \frac{4x^3}{4(x+2)} + \frac{4x^3+8x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x^3(x+2)+4x^3(x+2)+4(4x^3+8x^2)}{4(x+2)^2}$$

Resolvemos el numerador del segundo miembro:

$$= \frac{4x^4+8x^3+4x^4+8x^3+16x^3+32x^2}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{8x^4+32x^3+32x^2}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{8x^2(x^2+4x+4)}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{8x^2(x+2)^2}{4(x+2)^2}$$

$$= 2x^2$$

(c) $$-\frac{8x}{x+5} - \frac{3}{x+5} + \frac{10x+13}{x+5} = \frac{-8x-3+10x+13}{x+5}$$

$$= \frac{2x+10}{x+5}$$

$$= \frac{2(x+5)}{x+5} = 2$$

3.4. Ejercitación

Ejercicio 27 *Dados los siguientes polinomios:*

(a) $P(x) = 3x - \frac{2}{5}x^4 + 7x^2 - 2$ (b) $Q(x) = 3x^4 - 3$

(c) $R(x) = -5x^2 + 3x^3 + x$ (d) $S(x) = x^3 + 2$

(e) $T(x) = x^4$ (f) $U(x) = 5 + x^2 - x^4$

(i) *Completar y ordenar en forma decreciente.*

(ii) *Indicar grado, coeficiente principal y termino independiente.*

Ejercicio 28 *Dados los polinomios:*

$$P(x) = -3x^2 + x^3 + 1 \ \ y \ \ Q(x) = -x^2 + 3x - 2$$

(i) *Indicar grado, coeficiente principal y termino independiente.*

(ii) *Calcular el valor numérico de* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *en* $x = 0$*,* $x = -2$ *y* $x = \frac{1}{2}$*.*

Ejercicio 29 *Dados los polinomios:*

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 5x^2 + 1, \ \ Q(x) = 4 - x^2 + x^4 - x \ \ y \ \ S(x) = x^2 - 2$$

Resolver las siguientes operaciones.

(i) $P(x) + Q(x) =$ (ii) $P(x) - Q(x) =$

(iii) $P(x) \cdot S(x) =$ (iv) $P(x) \cdot Q(x) =$

(v) $S(x) \cdot Q(x) - P(x) =$ (vi) $S(x)^2 - P(x) =$

Ejercicio 30 *Usando la regla de Ruffini hallar cociente y resto en las siguientes divisiones:*

(a) $(x^3 + 2x - 10) : (x - 3)$ (b) $(x^4 + 2) : (x + 1)$

(c) $(2x^3 + x^5 - 12x) : (x + 2)$ (d) $(x^4 + 2) : (x - \frac{1}{2})$

Verificar el valor del resto usando el Teorema del resto.

Ejercicio 31 *Hallar el valor de t para que el polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 + tx + 4$ sea divisible por $x - 2$.*

Rta: t=-12

Ejercicio 32 *Hallar el valor de k para que el polinomio $P(x) = -x^3 + x^2 + kx - 6$ sea divisible por $x + 3$.*

Rta: k=10

Ejercicio 33 *Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ y sabiendo que:*

(i) -4 *es una raíz de P(x) y*

(ii) *el valor numérico de P(x) en $x = 1$ es -10.*

Hallar los valores de las constantes a y b.
Rta: a=3, b=-6

Sugerencia: *usando las condiciones* (i) *y* (ii) *plantear un sistema de ecuaciones lineales en a y b.*

Ejercicio 34 *Hallar las raíces reales de los siguientes polinomios y factorizarlos usando el Teorema de Gauss:*

(a) $A(x) = 3x - 4$ (b) $B(x) = 7x + 5$

(c) $C(x) = 6x^2 - 18x$ (d) $D(x) = x^2 - 5$

(e) $E(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$ (f) $F(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

(g) $G(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ (h) $H(x) = x^3 - 10x^2 + 25x$

(i) $I(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ (j) $J(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$

Ejercicio 35 *Factorizar los siguientes polinomios:*

(a) $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x^2$

(b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

(c) $R(x) = x^4 - 25x^2$

(d) $S(x) = 3x^2 + 6x + 3$

(e) $T(x) = 2x^4 - 2x^2$

(f) $U(x) = x^3 + 1$

(g) $V(x) = 3x^2 - 2x - 1$

(h) $W(x) = x^4 - 81$

Ejercicio 36 *Factorizar y simplificar hasta obtener la expresión irreducible:*

(a) $\dfrac{4x^2 - 4x}{2x - 2} =$

(b) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} =$

(c) $\dfrac{x^6 - x^4}{x^4 - x^3} =$

(d) $\dfrac{x^4 - 16}{x^3 - x^2 + 4x - 4} =$

(e) $\dfrac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{x^4 - 1}$

(f) $\dfrac{x^3 + 1}{4x^3 - 4x^2 + 4x} =$

Ejercicio 37 *Efectue las operaciones indicadas, factorizando y simplificando cuando sea posible:*

(a) $\dfrac{3x - 6}{x + 2} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{6x} \cdot \dfrac{4x}{x^2 - 4} =$

(b) $\dfrac{x^2 + 4}{x^4 - 16} \cdot \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x + 9} =$

(c) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x} : \dfrac{x + 2}{x - 1} =$

(d) $\dfrac{x - 2}{x^3 - 5x^2} : \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^4 - 25x^2} =$

(e) $\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{2x}{x^2 - 1} + \dfrac{x + 2}{x^2 - 2x + 1} =$

d) $\dfrac{3x - 6}{x^2 - 4} + \dfrac{x^2}{3x + 6} =$

Optativo:

Ejercicio 38 *(Gentile) Sea $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Encontrar un polinomio con coeficientes racionales de grado 4 y coficiente principal 1, que tenga por raíces los valores a, $-a$, $\frac{1}{a}$ y $-\frac{1}{a}$.*

Sugerencia: *Buscar la relación entre las raíces de un polinomio de grado 3 y sus coeficientes. Usando el Teorema de Gauss.*

4. Funciones

4.1. Introducción

En términos matemáticos, una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro conjunto. Por ejemplo, al ingresar a la Universidad, a cada estudiante se le otorga un número único de legajo. Luego, podríamos decir que "legajo" es una función que le asigna a cada alumno un número. Otro ejemplo sería asignar a cada alumno su mes de cumpleaños, y así "mes de cuampleaños" es una función del conjunto de alumnos al conjunto meses del año. El hecho que dos alumnos cumplan años en el mismo mes no invalida que sea una función, ya que a cada estudiante es posible asignarle solo un mes de cumpleaños. De este modo, al conjunto de alumnos de un curso en particular se le asigna uno de los 12 elementos del conjunto "meses del año". Del mismo modo, la función "legajo", a cada estudiante del conjunto "Alumnos de la facultad" le asigna un único número del conjunto "Números de legajo".

En este capítulo daremos la definición y ejemplos de funciones en general, pero luego nos concentraremos particularmente con funciones entre conjuntos de números.

4.2. Funciones

Definimos a las funciones de la siguiente manera:

- *Dados dos conjuntos A y B, una* **función** *de A en B es una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.*

Para indicar que f es una función del conjunto A en el conjunto B lo simbolizamos: $f : A \to B$ A cada elemento a de A le corresponde un único elemento b de B. A este elemento b lo llamamos imagen de a por f, y lo denotamos $f(a) = b$.

4.3. Dominio, codominio e imagen

Dada una función $f : A \to B$, definimos:

(i) $Dom(f) = \{a \in A : \text{existe } b \in B \text{ tal que } f(a) = b\}$ *como el dominio de f.*

(ii) El conjunto B es el codominio de f.

(iii) $Im(f) = \{b \in B : \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$ como la imagen de f.

Ejemplo 1:

Sean $A = \{$*primavera, verano, otoño, invierno*$\}$, $B = \{$*meses del año*$\}$ *y la función h que a cada estación del año le asigna el mes en que comienza. Luego:*

h(primavera)=septiembre

h(verano)=diciembre

h(otoño)=marzo

h(invierno)=junio

Dom(h)=A, el codominio es B y $Im(h) = \{septiembre, diciembre, marzo, junio\}$

Ejemplo 2:

Sea $A = \{agosto, septiembre, octubre\}$, $B = \{30, 31\}$

Consideramos la función g que a cada mes le asigna su cantidad de días. Luego:

*g(agosto)=*31

*g(septiembre)=*30

*g(octubre)=*31

Dom(g)=A, el codominio es B y Im(g)=B

Notemos que los elementos agosto y octubre tienen la misma imagen, y que cada uno tiene una única imagen.

En los casos en que A y B son conjuntos de números, es frecuente que la regla que determina a la función pueda ser expresada como una fórmula o expresión algebraica que indica cuál es la correspondencia. Por ejemplo, si consideramos la función f que a cada número le asigna su cuadrado, la regla se puede escribir:

$$f(x) = x^2$$

En esta fórmula, x representa a cualquier elemento de A. Entonces, la imagen de un número en particular se obtiene aplicando la fórmula:

$f(3) = 9$	*dado que*	$3^2 = 9$
$f(-3) = 9$	*dado que*	$(-3)^2 = 9$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$	*dado que*	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
$f(\sqrt{3}) = 3$	*dado que*	$(\sqrt{3})^2 = 3$

Ejemplo 3:

Si f es la función que a cada número natural le asigna su siguiente, tenemos que f es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), y la fórmula que define a la función f se puede escribir como:

$$f(x) = x + 1$$

Ejemplo 4:

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función que a cada número le asigna el doble de su cubo, la fórmula que define a g es:

$$g(x) = 2x^3$$

En los casos en que la función está definida por una fórmula, se suele "sobreentender" que el dominio está dado por el conjunto de números en el que la fórmula se puede aplicar.

Ejemplo 5:

Consideremos la función f que a cada número real le asigna su raíz cuadrada positiva:

$$f(x) = +\sqrt{x}$$

Como la raíz cuadrada está definida sólo para los números positivos o el 0, entonces el dominio de f está dado por:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

Ejemplo 6:

Si g es la función que a cada número le asigna su inverso:

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$g(x)$ se puede calcular siempre que x sea distinto de 0. Recordemos que el 0 es el único número real que no tiene inverso. Entonces el dominio de g está dado por:

$$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

4.4. Gráficos de funciones

Si f es una función de A en B, y A y B son subconjuntos de números, entonces podemos representar a la función f con un gráfico en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para ello consideramos un sistema de ejes coordenados. Denominamos **eje x (o eje de las abscisas)** *al eje horizontal y* **eje y (o eje de las ordenadas)** *al eje vertical, y por cada punto x del* *dominio dibujamos el par* $(x, f(x))$.

- *Si* A *y* B *son conjuntos de números, y* $f : A \to B$ *es una función, el* **gráfico de** f *está determinado por todos los puntos del plano de la forma* $(x, f(x))$, *con* $x \in A$.

Ejemplo 1:

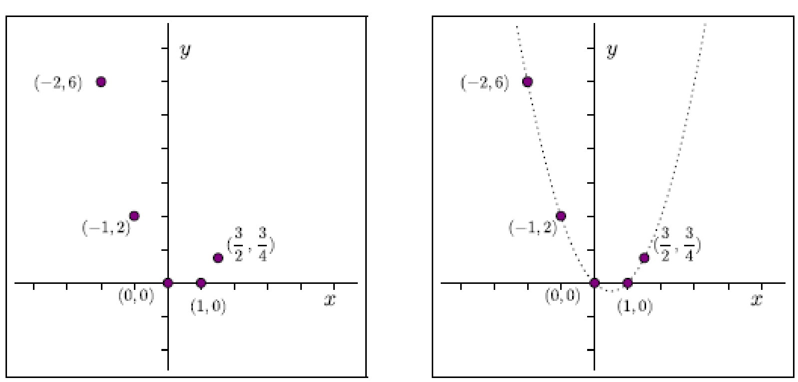
Si f *es la función determinada por la formula* $f(x) = x^2 - x$, *entonces para encontrar algunos puntos del grafico elegimos puntos del dominio. Por ejemplo, elegimos -2, -1, 0, 1,* $\frac{3}{2}$. *Con una tabla determinamos los puntos:*

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	6	$(-2, 6)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	0	$(0, 0)$
1	0	$(1, 0)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

Cuadro 1: *Tabla de valores de* f

Los valores del Cuadro 1 están representados en la Figura 1 (a).

En la Figura 1 (b) se han representado muchos más puntos del gráfico de f. *En general no es fácil determinar el gráfico de una función con sólo marcar algunos puntos, a menos que tengamos otra información sobre la función. Por ejemplo, más adelante veremos que determinadas funciones, llamadas funciones lineales, tienen un grafico en forma de recta. Luego con marcar dos puntos, ya conocemos todo el gráfico.*



(a) Puntos de la tabla

(b) Más puntos del gráfico

Figura 1: *Gráfico de la función* f

El gráfico de una función puede ser una línea curva, una poligonal, una combinación de ambas, o puntos aislados. Pero en ningún caso puede haber dos puntos con la misma coordenada x*.*

Algunos ejemplos de gráficos de funciones están dados en la Figura 2.

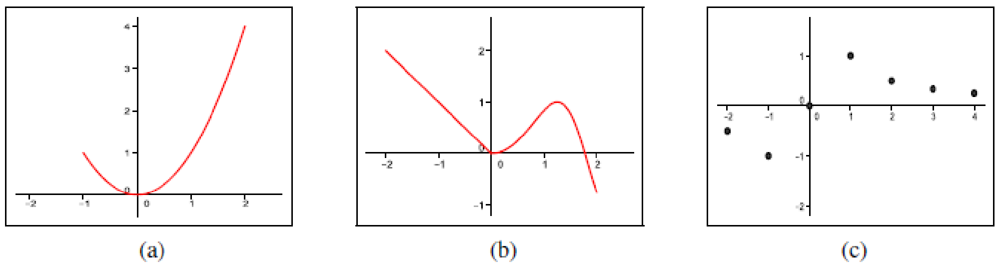


Figura 2: *Gráficos de funciones*

Notemos que en la Figura 2 (c) el dominio es un conjunto de números $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ *que no es un intervalo real, por eso su gráfico es un conjunto de puntos aislados y no una linea continua.*

Veamos cómo mejorar esta idea. Si en un gráfico hay dos puntos con la misma coordenada x*, entonces no es el gráfico de una función. Esto es así pues si* (a, b) *y* (a, c)*, con* $b \neq c$*, pertenecieran al grafico de una función* f *tendría que ser* $f(a) = b$ *y* $f(a) = c$*, y esto no es posible pues, por definición,* f *le asigna un único valor a* a*. (Ver Figura 3)*

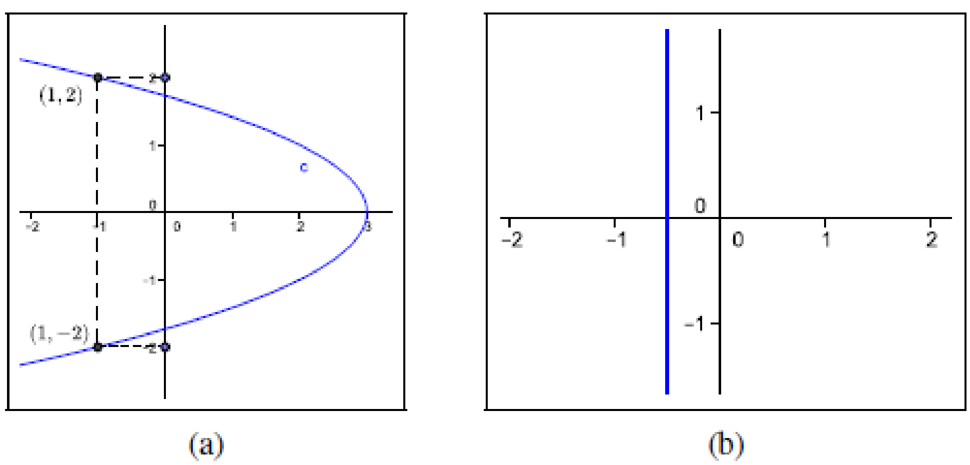


Figura 3: *Gráficos que no corresponden a funciones*

En general, para determinar si un gráfico no corresponde a una función. Se trazan rectas verticales por los puntos x *pertenecientes al dominio de la función, si alguna de estas rectas corta en dos o más puntos al gráfico, este no corresponde a una función.*

Ejemplo 2:

Consideremos la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(x) = 2$$

Entonces el gráfico de f *son todos los puntos del plano de la forma* $(x, 2)$, *con* $x \in [0,3]$.

Algunos de estos puntos son:

$$(0,2), \quad (\frac{3}{2}, 2), \quad (3,2)$$

y el gráfico es como en la Figura 4:

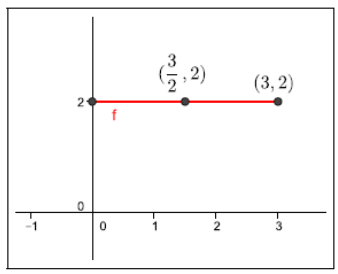


Figura 4: *Gráfico de* $f(x) = 2$

Ejemplo 3:

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x$.

En este caso, no es posible representar a g *completamente porque su dominio son todos los números reales. Pero podemos dar el gráfico de* g *para un intervalo, por ejemplo, para [-1,3].*

Su gráfico está conformado por todos los puntos del plano de la forma (x, x), *es decir, que tienen las dos coordenadas iguales. Algunos de los puntos del gráfico son:*

(*ver Figura 5*)

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (0,0); (2,2)$$

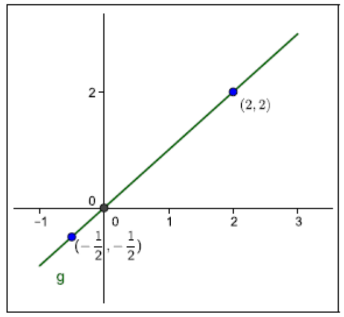


Figura 5: *Gráfico de $g(x) = x$*

• Interpretación de graficos.

Más adelante veremos cómo graficar determinadas funciones, como por ejemplo las funciones lineales. En estos casos, la fórmula que define a estas funciones nos da suficiente información para dar un gráfico bastante aproximado.

Ahora bien, ¿por qué querríamos graficar una función? ¿Nos aporta alguna información importante el gráfico o alguna información que no se puede hacer evidente sólo con la fórmula o regla de asignación?

La respuesta es que sí. A partir del gráfico y sin conocer su fórmula, podemos deducir varias propiedades de la función. Por ejemplo, el gráfico nos puede dar información sobre el dominio, la imagen, para qué valores en el dominio la función es positiva, o negativa, o mayor que 1, o igual a -2, o cual es el valor máximo que alcanza la función, o el valor mínimo.

Ejemplo 4:

Consideremos el gráfico de una función f, como se muestra de la Figura 6 *a* 10*:*

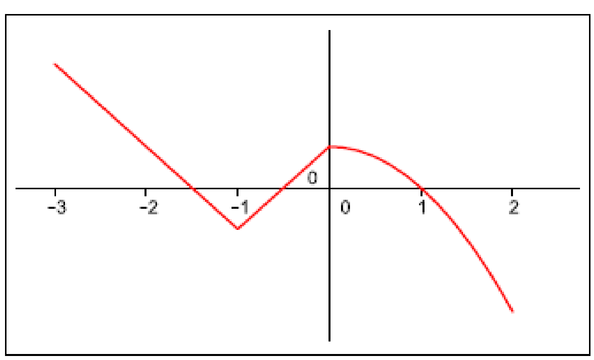


Figura 6: *Gráfico de f*

Si bien no conocemos la fórmula de la función, observando el gráfico podemos deducir algunas propiedades:

1. **El dominio de f:** *es el conjunto de puntos en el eje x que están por debajo o por encima del gráfico. (Ver el trazo grueso sobre el eje x en la Figura 7). Así, el dominio de f se visualiza* **sobre el eje x**, *y en particular x está en el dominio si la recta vertical que pasa por x corta al gráfico.*

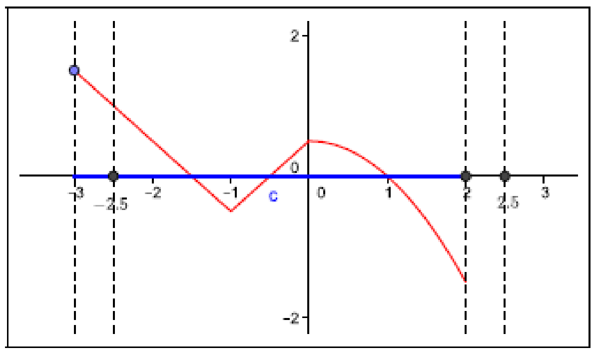


Figura 7: $Dom(f) = [-3, 2]$

Por ejemplo, en la Figura 7 podemos observar que -2,5 pertenece al dominio de la función, y en cambio 2,5 no pertenece.

2. **La imagen de f:** *Determinar la imagen de una función a partir de su fórmula no suele ser una tarea sencilla. Pero el gráfico nos permite visualizarlo como aquellos puntos* **sobre el eje y** *tales que si trazamos una recta horizontal ésta corta al gráfico de la función.*

   Si trazamos rectas horizontales por los extremos del gráfico, la imagen de la función quedará encerrada, en el eje y, entre dichas rectas. (Ver Figura 8)

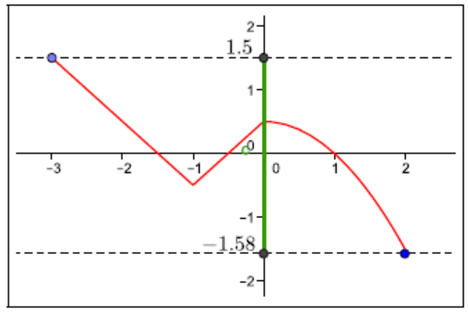


Figura 8: $Im(f) = [-1,5; 1,5]$

3. **Los valores de x para los cuales** $f(x) \geq 0$**:** *Para esto observamos las partes del gráfico que corresponden a* $f(x) \geq 0$*, es decir, la segunda coordenada es positiva o cero. Los valores que estamos buscando son aquellos* x *que quedan por debajo de esa parte del gráfico:*

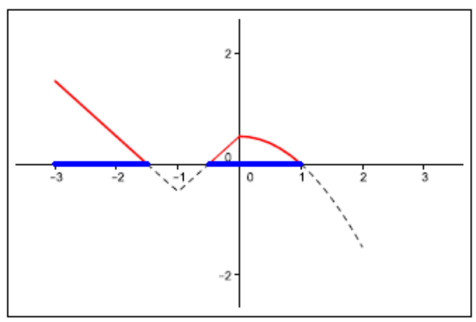


Figura 9: $\{x \in I\!R : f(x) \geq 0\}$

En la Figura 9, vemos que $\{x \in I\!R : f(x) \geq 0\} = [-3; -1,5] \cup [-0,5, 1]$.

En caso que quisíeramos determinar para qué valores de x *se cumple* $f(x) > 0$*, tendremos que excluir los puntos donde la función vale 0. Como* $f(x) = 0$ *para* $x = -1,5$*,* $x = -0;5$ *y* $x = 1$*, resulta* $\{x \in I\!R : f(x) > 0\} = [-3, -1,5) \cup (-0,5, 1)$

Si ahora queremos ver para qué valores de x *se cumple* $f(x) = 0,5$*, trazamos la recta* $y = 0,5$ *y marcamos los puntos de intersección con el gráfico de* f*. En este caso, son los puntos* $(0; 0,5)$ *y* $(-2; 0,5)$*. Luego* $f(x) = 0,5$ *para* $x = -2$ *y para* $x = 0$*. (Ver Figura 10)*

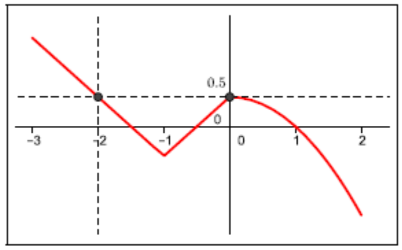


Figura 10: *Preimagenes de 0,5*

Ejemplo 5:

Consideremos una función g con el gráfico de la Figura 11.

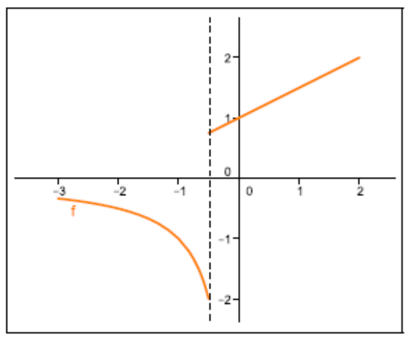
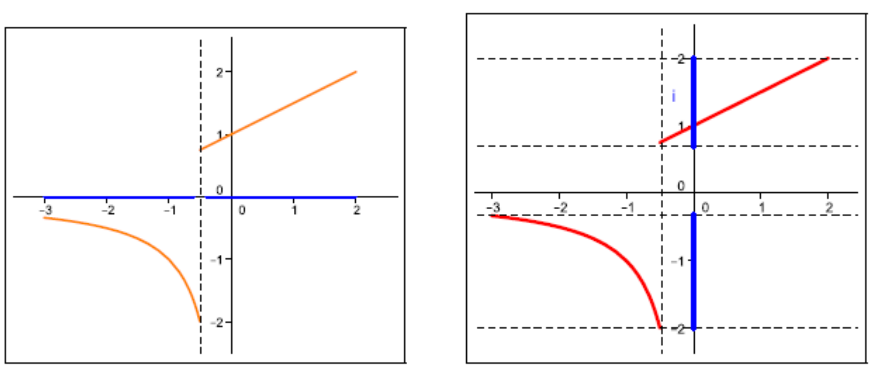


Figura 11: *Gráfico de la función g*

En este gráfico, la recta vertical $x = -\frac{1}{2}$ *no interseca al gráfico de* g. *Esto nos indica que el punto* -$\frac{1}{2}$ *no pertenece al dominio de* g.



(a) Dominio de g (b) Imagen de g

Figura 12: *Dominio e imagen de g*

En la Figura 12 (a) vemos que:

$$Dom(g) = [-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 2]$$

Con respecto a la imagen, recordemos que se visualiza sobre el eje y. En este ejemplo, observamos que si bien el gráfico queda encerrado entre las rectas $y = -2$ e $y = 2$, los puntos entre $-\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{4}$ no pertenecen a la imagen de g. La Figura 12 (b) nos muestra que:

$$Im(g) = [-2, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{4}, 2]$$

Por último, si quisiéramos conocer para qué valores de x se cumple que $g(x) = -\frac{1}{2}$, podemos proceder así: trazamos la recta $y = -\frac{1}{2}$, y marcamos todos los puntos de intersección con el gráfico. En este caso hay un solo punto. La coordenada x de dicho punto $(x = -2)$ verifica $g(-2) = -\frac{1}{2}$.

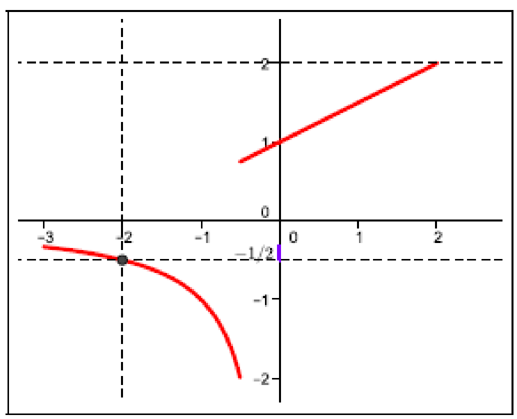


Figura 13: *Preimagen de* $-\frac{1}{2}$

• **Intersección con el eje x**

Los puntos donde la curva intersecta al eje x son de la forma $(x, 0)$ y se obtienen igualando a cero la expresión de la función, es decir haciendo $f(x) = 0$. A los valores de x para los cuales la función se anula se denominan **ceros de la función. (raíces)**

• **Intersección con el eje y**

El punto donde la curva intersecta al eje y se obtiene haciendo $x = 0$, siempre que $0 \in Dom(f)$.

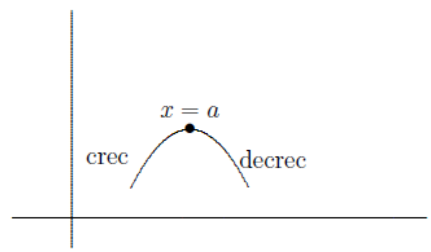
• Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in (a, b)$. Definimos:

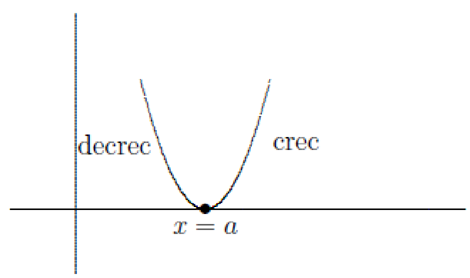
- *f es creciente: si $x_1 \leq x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$*
- *f es estrictamente creciente: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$*
- *f es decreciente: si $x_1 \leq x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$*
- *f es estrictamente decreciente: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$*

• Máximos y mínimos

- *Una función $y = f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo cuando a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*



- *Una función $y = f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo, si a su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente.*



4.5. Función lineal

Denominaremos función lineal, a toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forma:*

$$f(x) = mx + b, \text{ donde } m, b \in \mathbb{R}$$

La gráfica de la función lineal es una recta. El dominio de la función lineal es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$*, y la imagen de esta función es* $\mathbb{R}$ *excepto para el caso particular* $f(x) = b$*, donde la imagen es el conjunto* $\{b\}$*.*

4.5.1. Ecuación explícita de la recta

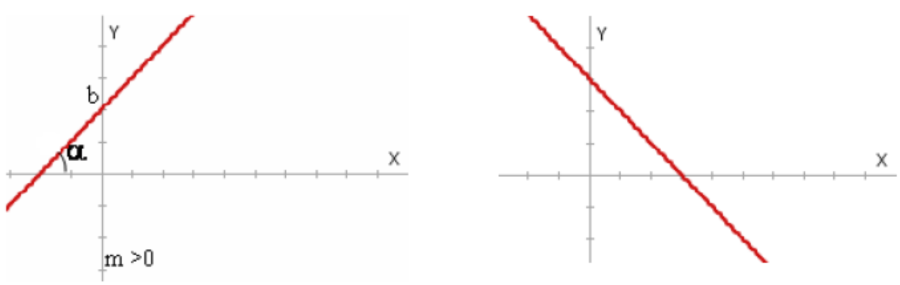
En la expresión $f(x) = mx + b$*, llamada ecuación "explícita de la recta", el valor* m *se denomina la* **pendiente** *de la recta y está relacionado con la inclinación de la misma del siguiente modo.*

Si α *es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las abscisas, entonces la* **pendiente** *es la tangente trigonométrica de* α*:* $m = tg\alpha$

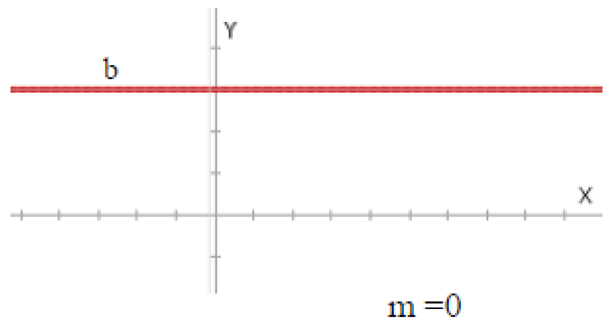
Si el ángulo α *es agudo, su tangente es positiva, y entonces* m *será positiva, mientras que si* α *es obtuso, la tangente es negativa por lo tanto tendrá pendiente* m *negativa. Finalmente* $m = 0$ *representa a rectas horizontales.*

En la expresión $f(x) = mx + b$*, al valor* b *se le llama* **ordenada al origen** *por ser el valor donde la recta corta el eje de las ordenadas (eje y).*

Gráficamente:



m <0

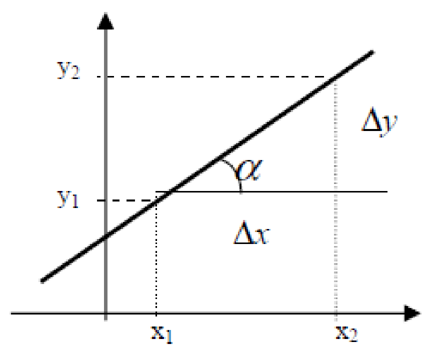


Cálculo de la pendiente de una recta

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2)$ *definimos:*

Incremento en x *:* $\Delta x = x_2 - x_1$

Incremento en y *:* $\Delta y = y_2 - y_1$



La pendiente m *de la recta se define como el cociente:*

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

4.5.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Sean los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2)$*, la ecuación de la recta que pasa por ellos queda determinada por la expresión:*

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

equivalentemente:

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$$

Ejemplo:
Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ *y* $(2, 8)$
Llamemos $P_1 = (-1, 2)$ *y* $P_2 = (2, 8)$
Luego $x_1 = -1$*,* $y_1 = 2$*,* $x_2 = 2$ *e* $y_2 = 8$
Reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$y = \frac{8 - 2}{2 - (-1)}(x - (-1)) + 2$$

Realizando los cálculos necesarios,

$$y = 2x + 4$$

Nota: *Si cambiamos la elección en el nombre de los puntos obtenemos la misma recta. (Una vez elegidos, no se deben cambiar)*

4.5.3. Ecuación de la recta conocidos la pendiente y un punto perteneciente a ella.

Si se conocen las coordenadas de un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ *de la recta y su pendiente* m *la ecuación de la recta que queda determinada es:*

$$\boxed{y = m(x - x_1) + y_1}$$

Ejemplo:

Sabiendo que una recta pasa por el punto $P = (1, -4)$ *y su pendiente es* $m = 2$*, hallar la ecuación de la recta.*

Reemplazamos en la fórmula anterior $x_1 = 1$, $y_1 = -4$ *y* $m = 2$*:*

$$y = 2(x - 1) - 4$$

de donde obtenemos,

$$y = 2x - 6$$

4.5.4. Función constante

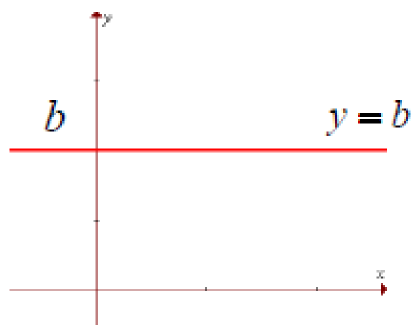
Una función f *es constante si para todo* $x \in Dom(f)$ *se verifica* $f(x) = k$ *, con* $k = cte$*.*

Las funciones lineales con pendiente nula son funciones constantes y su ecuación es:

$$y = f(x) = b$$

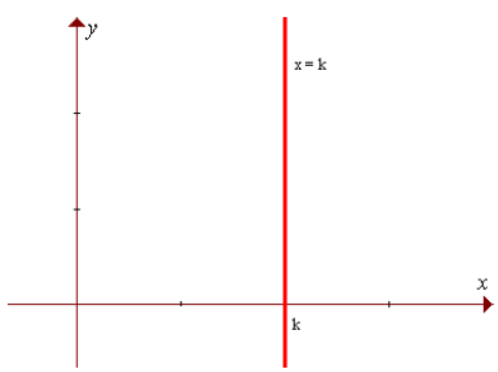
Su gráfica es una recta paralela al eje x. El ángulo de inclinación de la recta es de 0°.

El $Dom(f) = \mathbb{R}$ *y la* $Im(f) = \{b\}$



Además si $b = 0$ *entonces* $y = 0$*, la recta coincide con el eje x.*

Las rectas verticales son paralelas al eje y, tienen como ecuación $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$ *y* **no son funciones**.



4.5.5. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Dadas las rectas $r_1 : y = m_1 x + b_1$ y $r_2 : y = m_2 x + b_2$, entonces:

(P1) $r_1 \parallel r_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$

(P2) $r_1 \perp r_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

La condición (P1) *hace referencia a la condición de paralelismo y nos asegura que dos rectas son paralelas siempre y cuando sus pendientes sean iguales.*

La condición (P2) *hace referencia a la condición de perpendicularidad y nos asegura que dos rectas son perpendiculares siempre y cuando sus pendientes sean inversas y de signos opuestos.*

4.6. Función cuadrática

Se llama función cuadrática a toda función f definida por una expresión de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

La representación gráfica de una función cuadrática o de segundo grado es una curva llamada parábola.

La expresión $y = ax^2 + bx + c$ recibe el nombre de ecuación explícita de la parábola.

Forma factorizada

Toda función cuadrática se puede factorizar en función de sus raíces. (como se estudió en el capitulo anterior)

Dada una función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se puede factorizar usando el Teorema de Gauss como sigue:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Siendo a el coeficiente principal de la función. En el caso de que el discriminante sea igual a 0 entonces $x_1 = x_2$, estamos en presencia de raices dobles, por lo que podemos escribir:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Forma canónica

Toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Llamada forma canónica. Siendo a *el coeficiente principal y el par ordenado* (x_v, y_v) *las coordenadas del vértice de la parábola.*

• **Representación gráfica de una función cuadrática.**

Para realizar la construcción del gráfico de una función cuadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, *no es necesario confeccionar una tabla. Sólo es suficiente tener en cuenta las características que posee una parábola: su* **eje de simetría**, *su* **vértice**, *los* **puntos de intersección con el eje x** *(si existen) y el* **punto de intersección con el eje y** *(ordenada al origen).*

- **Análisis del coeficiente principal** a**:**

  Si $a > 0$ *entonces la ramas de la parábola están dirigidas hacia arriba,*

  Si $a < 0$ *entonces las ramas de la parábola están dirigidas hacia abajo.*

- **Intersección con el eje x:**

  Si la parábola corta al eje x*, los puntos de intersección se hallan haciendo*

  $y = f(x) = 0$, *esto es resolviendo la ecuación de segundo grado* $ax^2 + bx + c = 0$
  Como ya sabemos se pueden presentar los siguientes casos:

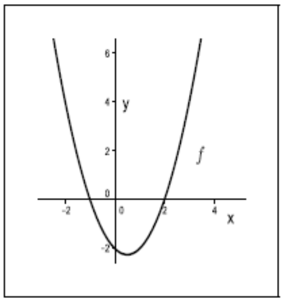
  (a) *La ecuación tiene dos raíces reales y distintas, en este caso la curva corta al eje* x *en dos puntos distintos,* $(x_1, 0)$ *y* $(x_2, 0)$

  (b) *La ecuación tiene dos raíces reales y coincidentes, en este caso la curva corta al eje* x *en un sólo punto,* $(x_1, 0)$

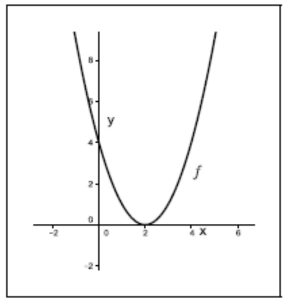
  (c) *La ecuación no tiene raíces reales, en este caso la curva no corta al eje* x.

- **Intersección con el eje y:**

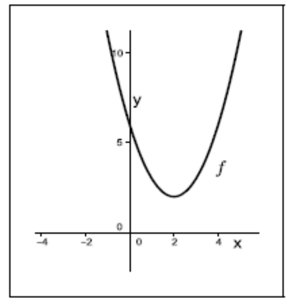
  Este punto se halla haciendo $x = 0$ *en* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *por lo tanto la curva corta al eje* y *en el punto* $(0, c)$.



(a)



(b)



(c)

- **Coordenadas del vértice,** $V = (x_v, y_v)$:

  Las coordenadas pueden encontrarse por las ecuaciones:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$\boxed{y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c}$$

  otra forma de encontrar la coordenada x_v sin necesidad de hallar previamente las raíces es mediante la ecuación:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

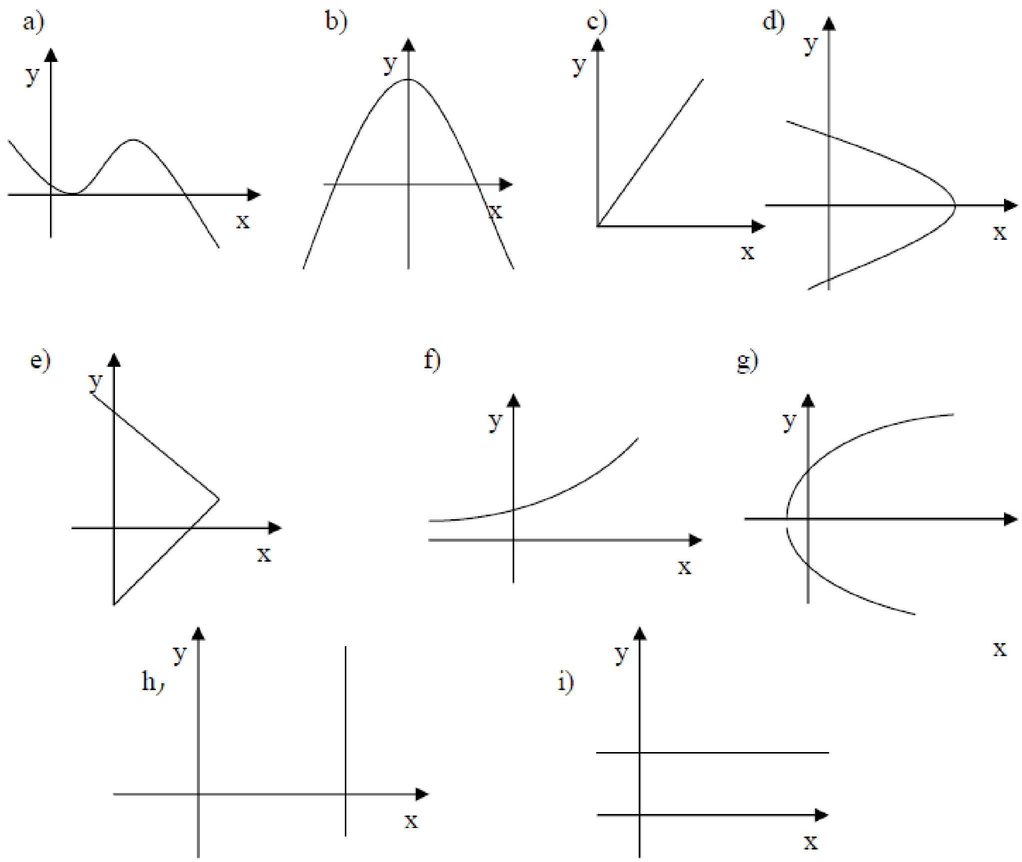
- **Eje de simetría:**

  El eje de simetría es una recta vertical que pasa por el vértice, entonces tendra por ecuación:

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

4.7. Ejercitacion

Ejercicio 39 *Indicar si los siguientes gráficos representan funciones.*



Ejercicio 40 *Determinar el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 2x + 7$

b) $g(x) = +\sqrt{x-2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+3}{x+5}$

d) $s(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

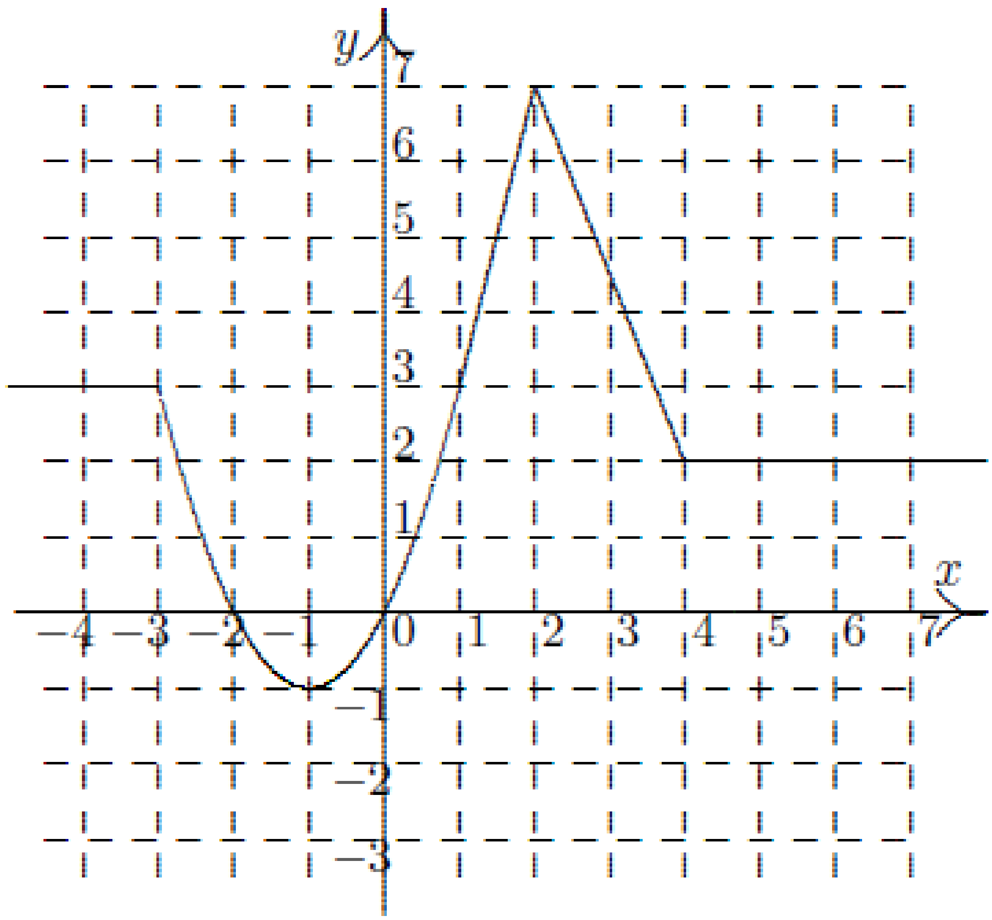
e) $r(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3}$

Ejercicio 41 *En la gráfica de la siguiente función:*

a) Determinar dominio, codominio e imagen.

b) Indicar en que intervalos la función es creciente, en cuáles decreciente y en cuáles constante.

c) Indicar, si existen, los valores de x donde se alcanza un máximo o un mínimo.



Ejercicio 42 *El gráfico muestra las ganancias, en pesos, de una heladería a lo largo de un año.*

a) ¿Cuáles son las variables relacionadas?

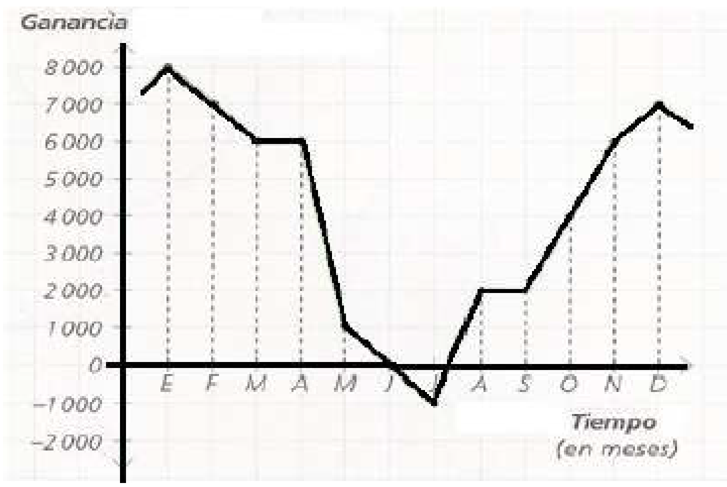
b) Indicar los períodos de crecimientos de las ganancias de la heladería.

c) ¿Hubo períodos en que las ganancias se mantuvieron constantes? ¿Cuáles?

d) *¿Durante que períodos disminuyeron las ganancias de la heladería?*

e) *¿Qué sucedió en el mes de Junio?*

f) *¿En qué mes las ganancias alcanzaron su valor máximo? ¿Y el mínimo?*



Ejercicio 43 *Dada la gráfica de la siguiente función, determinar:*

a) *El dominio de f.*

b) *La imagen de f.*

c) *Los valores de x donde $f(x) \leq 3$*

d) *Los valores de x donde $f(x) > 3$*

e) $f(3)$ *y* $f(-2)$

Ejercicio 44 *Representar gráficamente las siguientes funciones lineales, indicando en cada caso pendiente y ordenada al origen.*

a) $y = 2x$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = \frac{1}{4}x - 1$

d) $y = -\frac{1}{2}$

e) $y = 2x + \frac{3}{2}$

f) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

g) $2(x + y - 5) = 8$

h) $\dfrac{x + 2y - 6}{4} = 4$

Ejercicio 45 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2. Graficar.*

a) $P_1 = (-5, 0)$ y $P_2 = (0, 2)$

b) $P_1 = (2, -1)$ y $P_2 = (3, 2)$

c) $P_1 = (4, 1)$ y $P_2 = (-2, 3)$

d) $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (-2, 4)$

e) $P_1 = (2, -8)$ y $P_2 = (-1, 7)$

Ejercicio 46 *Hallar la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto P. Graficar.*

a) $m = 2,\ P = (-1, 3)$

b) $m = -\frac{4}{3},\ P = (3, -1)$

c) $m = -1,\ P = (-2, -2)$

d) $m = \frac{1}{2},\ P = (1, 4)$

Ejercicio 47 *Dada la recta de ecuación $y = 3x + 1$:*

a) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto $P = (3, -2)$.

b) Hallar la ecuación de la recta paralela a la dada que pasa por el punto $Q = (-2, 1)$.

c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio 48 *Dada la recta de ecuación* $y = \frac{2}{3}x + 1$*:*

a) *Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto* $P = (6, -\frac{3}{2})$.

b) *Encontrar el punto intersección de ambas rectas.*

c) *Graficar.*

Ejercicio 49 *Un plomero tiene la tarifa siguiente: por acudir a reparar, \$100 y por cada hora de trabajo, \$50. En este caso no hay que tener en cuenta el gasto del material utilizado.*

a) *¿Cuánto cuesta una hora de trabajo? ¿Y dos horas?*

b) *Escribir la fórmula de la función que relaciona el costo final de reparación en pesos con el número de horas trabajadas.*

c) *Representar gráficamente el costo en función del tiempo.*

d) *El importe ha resultado ser \$350. Calcular el tiempo invertido por el plomero.*

Ejercicio 50 *Por alquilar un auto, una empresa cobra \$500 por día más un plus de \$5 por cada kilómetro recorrido.*

a) *Hallar la función que representa el precio abonado por día en función de los kilómetros recorridos.*

b) *¿Cuántos Km se han recorrido si se abonan \$650?*

c) *¿Cuánto se abona si se recorren 43 km?*

Ejercicio 51 *Dadas las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $y = x^2 + 2x - 3$

b) $y = (x-1)^2 - 1$

c) $y = x^2 - 4$

d) $y = x^2 + 6x + 9$

e) $y = -2x^2 + 3x + 2$

f) $y = x^2 + 2x + 1$

g) $y = (x-2)^2 + 3$

h) $y = -x^2 - 2x - 3$

i) $y = 2(x-4)(x+2)$

j) $y = -(x-1)(x+1)$

(i) *Indicar cuáles están en forma polinómica, cuáles en forma canónica y cuáles en forma factorizada.*

(ii) Encontrar en cada caso: raíces (si existen), vertice, eje de simetría, ordenada al origen.

(iii) Escribir la forma factorizada de cada función cuadrática.

(iv) Representar gráficamente todas las parábolas

(v) Indicar dominio e imagen en cada caso.

(vi) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Para qué valor de x hay un máximo o un mínimo?

Ejercicio 52 *Completar el cuadro siguiente y graficar.*

función	raíces	vértice	eje de simetría	dominio	Imagen
$y = 2x^2 + 12x + 16$					
$y = -2x^2 + 4x$					
$y = x^2 - 6x + 10$					
$y = x^2 - 8x + 16$					
$y = x^2 + 1$					

Ejercicio 53 *Sea* $f(x) = ax^2 - 4x - 6$*:*

a) *¿Cuánto debe valer* a *para que el eje de simetría sea la recta de ecuación* $x = 1$*?*

b) *Representar gráficamente la función y dar dominio e imagen.*

c) *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

d) *¿Para qué valor de* x *la función alcanza su máximo o mínimo?*

Ejercicio 54 *Dada la función cuadratica* $y = -x^2 + x + k$*:*

a) *Hallar el valor de* k *para que la función tenga una raíz doble.*

b) *Con el valor de* k *encontrado en el inciso anterior, encontar: raíces, vértice, eje de simetría y ordenada al origen.*

c) *Representar gráficamente la parábola.*

d) *Encontrar intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hallar el valor de* x *donde la función alcanza su máximo o mínimo.*

e) *Dar dominio e imagen.*

5. Bibliografía

1. A Survey of Modern Algebra. Birkhoff-Mclaine.
2. Apuntes del Curso de Ingreso del Departamento de Matemática de la U.N.S.J.
3. Apuntes del Curso de Ingreso de la F.A.M.A.F. de la U.N.C.
4. Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2. Larson, Hostetler, Edwards
5. An algebraic approach to non-classical logics. Helene Rasiowa.
6. Gratzer. Universal Algebra.
7. Gentile. Notas de algebra.
8. Sankappanavar,Universal Algebra.