Universidad Nacional de San Juan
Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Departamento de Matemática

Curso Nivelación
MATEMÁTICA

Para ingreso a las carreras:
Profesorado en Matemática - Licenciatura en Matemática

Profesores responsables:
Lic. Juan Diego Borchert - Lic. Jorgelina Carrizo - Lic. Lucía Sarmiento

2017

2

.

Curso de Nivelación

Matemática

Queridos alumnos, queremos darles la bienvenida a la universidad y queremos contarles que estos apuntes han sido pensados para ayudarles a recuperar y consolidar los temas de Matemática que seguramente adquirieron en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que eligieron. Juntos tendremos la oportunidad de recordar conceptos y desarrollar algunos ejemplos. Trabajarán en grupo y podrán consultar las dudas que surjan en la resolución de los problemas.
Es necesario que esta nueva etapa, la emprendan con *responsabilidad y compromiso*, sabiendo que nada es posible sin *esfuerzo* y que nada es tan difícil, incomprensible o inalcanzable como parece, sólo se necesita *constancia, paciencia y horas de estudio.*
Son objetivos de este curso que se habitúen a los tiempos disponibles en la Universidad para estudiar un tema, que siempre son breves, y que fortalezcan la capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible.
Cada persona tiene una modalidad de estudio, de trabajo y es posible que al querer llegar a la solución, aparezcan dificultades, no se desanimen, vuelvan a intentarlo, o busquen ayuda en un profesor o un compañero; sigan adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.

Recuerde:
"Nunca consideres el estudio como un deber, sino como una oportunidad para penetrar en el maravilloso mundo del saber."

Albert Einstein

Docentes:

Elaboración del Cuadernillo:
Lic. Juan Diego Borchert, Lic. Jorgelina Carrizo y Lic. Lucía Sarmiento.

Cuerpo docente:
Lic. Jorgelina Carrizo, Lic. Valentina De Tommaso y Lic. Lucía Sarmiento.

Coordinación General del Curso de Matemática:
Lic. Lucía Sarmiento.

.

Contents

1 Capítulo 1. Conjuntos numéricos

En este capítulo se da una construcción intuitiva de los conjuntos numéricos ya conocidos, se proponen actividades para ejercitar las operaciones y aplicar sus propiedades.

1.1 Teoría de Conjuntos

Tomaremos como conceptos primitivos, es decir no definidos, las nociones de *elemento* y de *conjunto.* También utilizaremos una relación primitiva que notaremos $\in$ y que llamaremos *relación de pertenencia.*
Las expresiones conjunto, pertenencia y elemento servirán de conceptos básicos para definir los demás conceptos que integran la teoría de conjuntos.
Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre si.
Adoptaremos la siguiente regla: *Un conjunto está determinado o bien definido*

cuando disponemos de un criterio para establecer si un elemento pertenece o no a dicho conjunto.

Por ejemplo el conjunto de manteles rojos está bien definido, porque a la vista de un mantel se puede saber si es rojo o no. El conjunto de las personas bellas NO está bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es bella o no.
Habitualmente designaremos a los elementos y a los conjuntos con letras latinas minúsculas y mayúsculas respectivamente, aunque a veces no es posible o no es conveniente respetar estas convenciones.

Si el elemento a pertenece al conjunto A usamos el smbolo de pertenencia "$\in$" escribimos $a \in A$, el cual leemos "a pertenece a A" o "a es un elemento de A".
Si el elemento a no pertenece al conjunto A usamos el símbolo de pertenencia "$\notin$" escribimos $a \notin A$, el cual leemos "a no pertenece a A" o "a no es un elemento de A".

Ejemplo Ejemplos de conjuntos son:
(1) Los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
(2) Las soluciones de la ecuación $x + 2 = 8$.
(3) Los habitantes de la República Argentina.
(4) Las letras a, e, i, o, u.
(5) Los números naturales.

Representación de un conjunto
Si queremos indicar el conjunto de las vocales podemos escribir:
$A = \{x/x \text{ sea una vocal }\}$ ó $A = \{a, e, i, o, u\}$

• Un conjunto está definido por extensión o enumeración, cuando entre llaves figuran todos sus elementos.

Ejemplos.
a) $A = \{a, e, i, o, u\}$
b) $B = \{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo $\}$
c) $C = \{2, 4, 6\}$
d) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

• Un conjunto está definido por comprensión, cuando se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos.

Ejemplos.
a) $A = \{x/x \text{ sea una vocal }\}$
b) $B = \{x/x \text{ es día de la semana }\}$
c) $C = \{x/x \in \mathbb{N}\ y\ x < 8\}$
d) $D = \mathbb{N}$

Nota: Si un conjunto tiene n elementos, se dice que es *finito*, caso contrario el conjunto es *infinito.*

Ejemplos.
Los conjuntos A, B y C de los ejemplos anteriores son conjuntos finitos; el conjunto $D = \mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Ejercicio. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{x/x \text{ es dígito mayor que } 3\}$. Coloque verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a) $8 \in B$	b) $1 \in C$	c) $6 \in A$
d) $21 \notin A$	e) $2 \in A$	f) $8 \notin C$
g) $3 \notin B$	h) $0 \in B$	i) $3 \in A$

Ejercicio. Define por extensión o por comprensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de las estaciones del año.

b) El conjunto de los números naturales pares menores de 14.

c) El conjunto de los números naturales impares mayor que 9 y menor que 20.

d) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \ y \ 3 \leqslant x \leqslant 15\}$

e) $B = \{x/x \in \mathbb{R} \ y \ x^2 - 4 = 0\}$

f) $D = \{x/x$ es letra de la palabra foto $\}$

1.1.1 Conjuntos Especiales

Conjunto Universal
Puede ocurrir que los elementos de un conjunto no sean de la misma naturaleza, por ejemplo, el conjunto T formado por el número π y el Obelisco, y como conjunto es válido. Sin embargo, este tipo de conjunto es muy poco interesante. En general nos referiremos a conjuntos cuyos elementos tienen una propiedad en común.
Resulta entonces conveniente considerar un conjunto que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina *conjunto universal o referencial*, y lo denotamos con la letra $\mathcal{U}$, $\mathcal{R}$.

Ejemplo.
(a) Si consideramos el conjunto de los enteros entre 0 y 10,
es decir $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 10\}$, el conjunto $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$
(b) Si consideramos el conjunto de las vocales y las consonantes $\{r, s, t\}$, el conjunto universal
$\mathcal{U}$ es el conjunto de todas las letras del alfabeto.

El conjunto vacío
Necesariamente debemos admitir que todo elemento es igual a si mismo, esto es, la propiedad, $x = x$, la verifican todos los elementos que consideremos.
En oposición, aceptaremos que la expresión, $x \neq x$, no es verificada por ningún elemento. El resultado es el mismo con cualquier otra cláusula universalmente falsa y es posible demostrar que sólo hay un conjunto sin elementos.
Al único conjunto que no contiene elementos, lo llamaremos *conjunto vacío*. Lo notaremos por $\emptyset$ o $\{\,\}$.

$$\emptyset = \{x \in \mathcal{U} : \ x \neq x\}$$

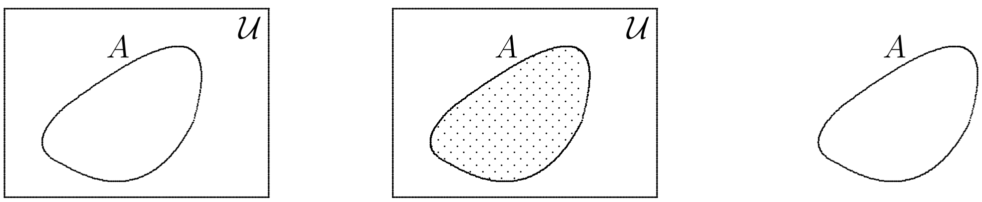
Ejemplo
(a) Si V es el conjunto de las vacas verdes, V es un conjunto vacío.

(b) El conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \ y \ \ x < 0\}$. Este conjunto no tiene elementos, pues no hay un número real que sea positivo y además negativo. Luego D es un conjunto vacío.

Diagramas de Venn

Los conjuntos pueden representarse gráficamente mediante diagramas de Venn, en honor al matemático John Venn.

El conjunto universal se representa con un rectángulo, y el diagrama para un conjunto A cualquiera es una curva cerrada en cuyo interior se colocan puntos que representan a los elementos del conjunto A.



En lo sucesivo al sombreado lo haremos solamente en los casos necesarios, y generalmente no graficaremos el conjunto referencial, sólo el conjunto A.

Los diagramas de Venn sólo se utilizan para representar gráficamente conjuntos *finitos.*

Igualdad entre conjuntos

Una relación posible entre conjuntos, más elemental que la de pertenencia, es la de *igualdad.*

Diremos que los conjuntos A y B son iguales si y sólo si poseen los mismos elementos, escribiremos $A = B$.

A la fórmula $A \neq B$ la leeremos: los conjuntos A y B son distintos, y significa que A y B no son idénticos, es decir, que no tienen los mismos elementos.

Inclusión de conjuntos

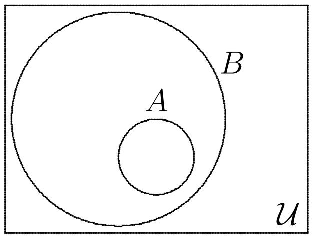
Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A es un subconjunto de B, y lo notaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es un elemento de B.

Observación

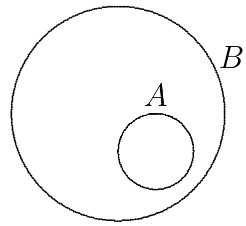
• Es usual decir que A está incluído en B, A está contenido en B, A es parte de B, etc. Nosotros usaremos indistintamente cualquiera de ellas.

También podemos decir que B contiene a A, en cuyo caso escribiremos $B \supseteq A$.

• Si A es un subconjunto de B, $A \subseteq B$, entonces la región que representa a A, estará contenida en la que representa a B.



o simplemente



• En caso contrario, se dice que A no está contenido en B, o que A no es subconjunto de B y simbolizaremos $A \nsubseteq B$.

• Dos conjuntos A y B son iguales si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplo. Consideremos los conjuntos $A = \{x : x$ es letra de la palabra *durazno*$\}$, $B = \{x : x$ es letra de la palabra *raza*$\}$, $C = \{x : x$ es letra de la palabra *uno*$\}$. Analice la relación que existe entre los conjuntos anteriores.

Observación. Para cualquier conjunto A se verifica que:
• $\emptyset \subseteq A$ • $A \subseteq A$ • $A \subseteq \mathcal{U}$

Importante: La **pertenencia** vincula elementos con conjuntos y la **inclusión** vincula conjuntos con conjuntos.

1.2 Operaciones con conjuntos

En lo que sigue, aunque no lo digamos explícitamente, todos los conjuntos que consideraremos serán subconjuntos del conjunto universal o referencial $\mathcal{U}$. En primer lugar consideraremos operaciones entre dos conjuntos, a las que llamaremos operaciones binarias entre conjuntos, y posteriormente una operación unaria.

1.2.1 Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B. Se denota $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Tenemos así que $x \in A \cup B$ si, y sólo si, x satisface **alguna** de las tres condiciones siguientes:
(1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in A \cap B$.

1.2.2 Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B. Se denota $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ y \ x \in B\}$$

Si A y B no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$, entonces diremos que A y B son *conjuntos disjuntos.*

1.2.3 Diferencia

Si A y B son dos conjuntos, definimos la diferencia de A y B, y simbolizamos $A-B$ al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A que no pertenecen al conjunto B.

$$A - B = \{x : x \in A \ y \ x \notin B\}$$

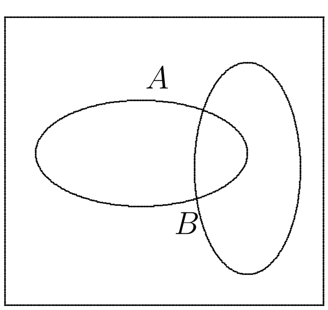
1.2.4 Complemento

Si $\mathcal{U}$ es el conjunto universal que contiene al conjunto A, llamaremos complemento de A y se simboliza $\overline{A}$, al conjunto formado por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A.

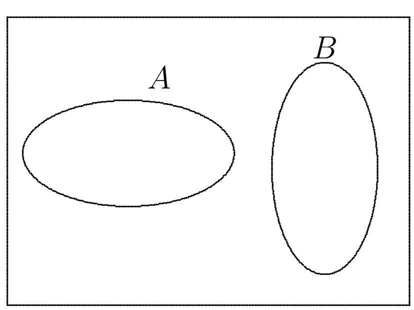
$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

Observación. Se verifica:
- $\overline{A} = \mathcal{U} - A$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $A - B \neq B - A$

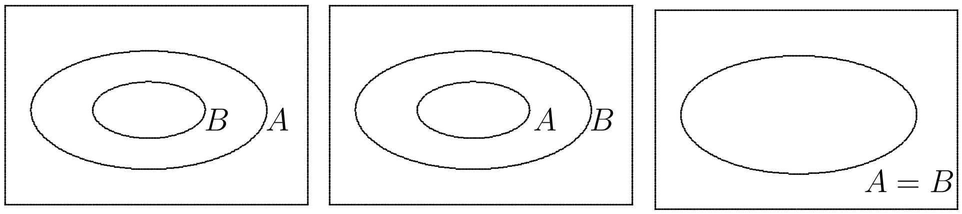
Ejercicio. Sean A y B conjuntos no vacíos, intente sombrear $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\overline{A}$ considerando que se pueden presentar las siguientes situaciones:



I)



II)



III) IV) V)

1.2.5 Propiedades de las operaciones

Las operaciones con conjuntos verifican las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa

  a) $A \cup B = B \cup A$

  b) $A \cap B = B \cap A$

- Propiedad asociativa

  a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

  b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Propiedad distributiva

  a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Propiedad de idempotencia

  a) $A \cup A = A$

  b) $A \cap A = A$

- Leyes de De Morgan

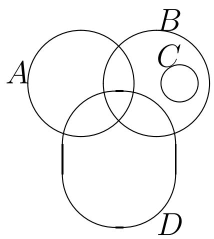
  a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Ejercicio. Sea $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$ el conjunto universal y los subconjuntos $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, d, e\}$ y $C = \{a, b, e\}$. Halle y realice el diagrama de Venn de:

a) $A \cup C$	b) $B - C$	c) $\overline{C}$
d) $A \cup \overline{B}$	e) $\mathcal{U} \cap \mathcal{C}$	f) $B \cup \overline{\overline{B}}$
g) $\overline{A} \cap C$	h) $B - \overline{C}$	i) $\overline{B \cup C} \cap A$

Ejercicio. Dado el siguiente diagrama de Venn, sombrear:



a) $D \cup C$ b) $C - \overline{D}$ c) $\overline{C} \cap (A \cup D)$

d) $A \cup (\overline{D} \cap C)$ e) $\overline{B \cup D} \cap A$ f) $C - \overline{B}$

1.3 Los números naturales

La noción de número es utilizada para resolver situaciones de la vida diaria, la utilización de los números naturales es tan antigua como el hombre mismo. Usamos números para contar elementos: siete son los colores del arcoíris, hay un satélite natural de la tierra, existen siete notas musicales, dos son los sátelites naturales de marte, sesenta los minutos de una hora, etc., para establecer un orden entre ciertas cosas: el tercer hijo, el segundo mes del año, el séptimo alumno en la fila, etc., para establecer medidas: 1,70 metros, 50 kg, 2°C, etc.
El conjunto de los números naturales está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se lo designa con la letra $\mathbb{N}$ y se representan:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$$

Propiedades.

- El conjunto de los números naturales posee un primer elemento 1.
- Entre dos naturales hay un número finito de naturales, esto es, el conjunto de los números naturales es un conjunto discreto.
- Todo subconjunto no vacío del conjunto A de los naturales tiene un elemento mínimo.
- El conjunto de los naturales es un conjunto totalmente ordenado, es decir que, dados dos elementos cualesquiera pueden ser siempre comparados entre sí.
- Todo número natural a posee su sucesor $a + 1$.
- Todo número natural a se puede expresar como producto de números naturales, llamados factores de a.

- La suma y el producto de números naturales es un número natural.

Nos preguntamos: ¿Es posible encontrar un número natural que al restárselo a 2 dé por resultado 8?
En el lenguaje algebraico: $2 - x = 8$
La respuesta es NO, es decir, es imposible encontrar un número natural que cumpla con estas condiciones. En este caso decimos que la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales, $S = \emptyset$.
Esto justifica la necesidad de crear un nuevo conjunto llamado el conjunto de los números enteros, formado por los números naturales, el cero y los opuestos de los números naturales.

1.4 Los números enteros

El conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto $\mathbb{N}$.
El conjunto de los enteros esta formado por el conjunto de los números naturales, sus correspondientes opuestos y el cero:
$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbb{N}\\ 0(\text{cero})\\ \mathbb{N}^-\end{array}\right\}\mathbb{Z}$$

Propiedades.

- $\mathbb{Z}$ es un conjunto discreto.
- $\mathbb{Z}$ no tiene primero ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- El conjunto de los enteros es un conjunto totalmente ordenado.
- Todo número entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

  Dos números opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia (en unidades) del cero. Uno positivo y uno negativo
- La suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre es un número entero.

¿Pasará lo mismo con la división?

$$6 : 2 = 3 \qquad \text{ya que} \qquad 3 \cdot 2 = 6$$

$$-10 : 5 = -2 \qquad \text{ya que} \qquad -2 \cdot 5 = -10$$

En general:

$$a : b = c \ , \ \ b \neq 0 \qquad \text{si se cumple} \qquad c \cdot b = a$$

Nos preguntamos: ¿Cuál será el resultado de 5 : 3?, esto es, ¿existe algún número entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 5?
La respuesta es NO, esto es, no es imposible encontrar un número entero que cumpla con esta condición. Para resolver éste problema hay que introducir un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números racionales.

1.5 Los números racionales

Cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, aparece la necesidad de crear los números fraccionarios.
El conjunto de los los fraccionarios unido a los números enteros forma el conjunto de los números racionales. Se simboliza con $\mathbb{Q}$.

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ fraccionarios \end{array}\right\} \mathbb{Q}$$

Propiedades.

- $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, esto es, entre dos números racionales existen infinitos racionales. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- $\mathbb{Q}$ no tiene primero ni último elemento.
- El conjunto de los racionales es un conjunto totalmente ordenado.
- Todo número racional puede escribirse como cociente de dos números enteros:

$$\frac{a \nearrow \text{numerador}}{b \searrow \text{denominador}}$$

  Con la condición de que el denominador sea distinto de cero.

Todo número racional admite una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

$$\frac{2364}{12} = 197$$

$-\dfrac{30}{10} = -3$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10} = 0,5$

$\dfrac{7}{4} = 1\dfrac{3}{4} = 1,75$ (número mixto)

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{9} = 0,33333... = 0.\overset{\frown}{3}$ (expresión decimal periódica pura)

$\dfrac{1}{6} = 0,16666666666 = 0.1\overset{\frown}{6}$ (expresión decimal periódica mixta)

Algunas de estas expresiones presentan un número finito de cifras decimales mientras que otras tienen un desarrollo decimal periódico. Esto da lugar a dos tipos de expresiones decimales, las exactas y las periódicas.

$$\text{Expresiones decimales} \begin{cases} \text{exactas} \\ \\ \text{periódicas} \begin{cases} \text{puras} \\ \\ \text{mixtas} \end{cases} \end{cases}$$

Recíprocamente, dada una expresión decimal exacta o periódica, puede encontrarse una expresión racional.

$-3 = -\dfrac{3}{1} = -\dfrac{30}{10}$

$0,5 = \dfrac{5}{10}$

$0,\overset{\frown}{3} = \dfrac{3}{9}$

$0,1\overset{\frown}{6} = \dfrac{016-1}{90}$

Para esto se debe tener en cuenta:
- Si la expresión es exacta, se coloca como numerador el número entero que resulta de suprimir el punto decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras se encontraran a la derecha del punto decimal en la expresión decimal original.

Ejemplo.

$0,5 = \dfrac{5}{10}$

$7,125 = \dfrac{7125}{1000}$

-Si la expresión es periódica, se coloca como numerador el resultado de restar al número entero formado por parte entera, seguida del anteperíodo y de la primera repetición del período, el entero formado por la parte entera con el anteperíodo. Como denominador tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

$$\frac{\text{(todas las cifras de la expresión)}-\text{(las cifras no periódicas de la expresión)}}{\text{tantos 9 como cifras dec. periódicas y tantos 0 como cifras dec. no periódicas}}$$

Ejemplo.

$0,1\,\overset{\frown}{6} = \dfrac{016-1}{90}$

$3,2\,\overset{\frown}{53} = \dfrac{3253-32}{990}$

$218,7\,\overset{\frown}{4} = \dfrac{21874-2187}{90}$

1.6 Los números irracionales

Existen algunos números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números se llaman irracionales, pues no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.
El conjunto de los números irracionales se simboliza con $\mathbb{I}$. Son ejemplos de números irracionales:

- Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural.

  Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt{6} \approx 2.44948974278317809819728407470 6....$

- Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero.

  Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[7]{13}$.

- El número π, utilizado para calcular la longitud de la circunferencia

$$\pi \approx 3,14159265358979323846...$$

- El número e, base de los logaritmos naturales

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

La representación decimal de un número racional *termina o se repite.*
La representación decimal de un número irracional *nunca termina ni se repite.*

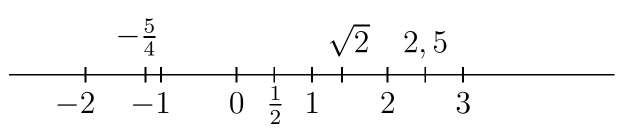
1.7 Los números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo simboliza con $\mathbb{R}$.
Por lo tanto, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, con "$\cup$" se indica la operación unión entre conjuntos.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\text{Naturales: } \mathbb{N}\\ 0 \text{ (cero)}\\ \text{Negativos}\end{array}\right\}\text{Enteros: } \mathbb{Z}\\ \text{Fraccionarios}\end{array}\right\}\text{Racionales: } \mathbb{Q}\\ \\ \text{Irracionales: } \mathbb{I}\end{array}\right\}\text{Números reales: } \mathbb{R}$$

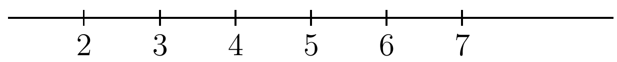
El conjunto de los números reales se representa sobre una recta llamada recta númerica o recta real.

Para cada punto de la recta númerica representa a un único número real y recíprocamente a cada número real le corresponde un único punto de la recta.
Se fija un origen que representa al número cero, se considera un segmento unidad, a la derecha del cero se representan los reales positivos y a la izquierda los reales negativos.



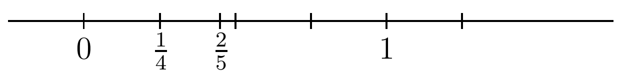
Para comparar dos números reales a y b. Si $b - a$ es positivo, entonces $a < b$ y el punto asociado a b esta a la derecha del punto asociado a a. Si $b - a$ es negativo, entonces $b < a$ y el punto asociado a b esta a la izquierda del punto asociado a a.

Ejemplo.
Comparando 3 y 7:
$7 - 3 = 4$, positivo, entonces $3 < 7$



Comparando $\dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{2}{5}$:

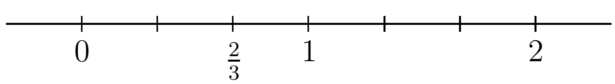
$\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{8-5}{20} = \dfrac{3}{20}$, positivo, entonces $\dfrac{1}{4} < \dfrac{2}{5}$



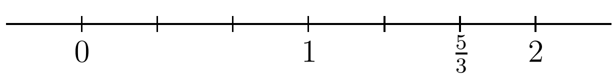
También se puede asegurar que $\dfrac{1}{4} < \dfrac{2}{5}$, pues $1 \cdot 5 < 4 \cdot 2$

Ejemplos Grafique los siguientes números

(a) $\dfrac{2}{3}$



(b) $\dfrac{5}{3}$

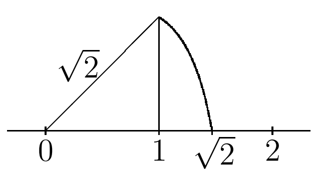


(c) $\sqrt{2}$

$h^2 = 1^2 + 1^2$

$h^2 = 2$

$h = \sqrt{2}$

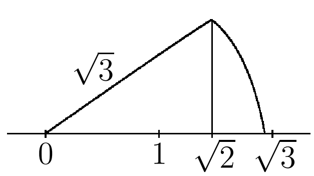


(d) $\sqrt{3}$

$h^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$

$h^2 = 1 + 2$

$h = \sqrt{3}$



Ejercicio.

1. Definina por extensión el conjunto A formado por todos los números naturales divisores de 18.

2. Complete con verdadero o falso según corresponda:

$3 \subset A$	$1 \in A$	$\{1,6,9\} \in A$	$4 \notin A$	$\{3,4,6\} \subset A$

3. Marque con una cruz el o los conjuntos numéricos a los que pertenece cada uno de los siguientes números.

	2	$-\frac{7}{5}$	$0,5$	$\sqrt{3}$	0	e	$1,\overset{\frown}{3}$
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}$							
$\mathbb{Q}$							
$\mathbb{I}$							
$\mathbb{R}$							

1.8 Valor absoluto de un número real

Sea $x \in \mathbb{R}$, esto es, x un número real cualquiera. Llamaremos valor absoluto de x, en símbolo, $|x|$ al número real no negativo (positivo o cero) que simbolizaremos $|x|$ que se obtiene de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0\,, \\ -x & \text{si} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Es decir, si el número real x es positivo o cero, $|x| = x$ y si el número real x es negativo, $|x| = -x$, donde el símbolo $-x$ significa el opuesto (en signo) de x.

NOTA: Notemos que si x es negativo, entonces su opuesto $-x$ es positivo.

Ejemplos.

a) $|3| = 3$ *b*) $|0| = 0$ *c*) $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ *d*) $|-4| = -(-4) = 4$

e) $|-\sqrt{5}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ *f*) $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$.

Observaciones:

1) Decir que un número real x es tal que $x \geqslant 0$ significa que x es positivo o 0 (cero).

2) La notación $x < 0$ significa que x es número negativo, y el símbolo $x > 0$ que x es un número positivo.

3) El símbolo $-x$ representa al opuesto (en signo) del número real x. Por ejemplo, el opuesto de -2, que se simboliza $-(-2)$, es el número 2; el opuesto del 1 (uno) es el -1 y el opuesto del 0 (cero) es el mismo 0.

4) Calcular el valor absoluto de un número real es "hacerlo positivo" si el número es negativo, y dejarlo como está si el número es positivo o cero.

5) Gráficamente, el valor absoluto de un número real m es su distancia al origen (cero).

Propiedades del valor absoluto

- $|a| \geqslant 0$
- $|a.b| = |a|.|b|$
- $|\dfrac{a}{b}| = \dfrac{|a|}{|b|}$ con $b \neq 0$
- $|a + b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a - b| \geqslant |a| - |b|$

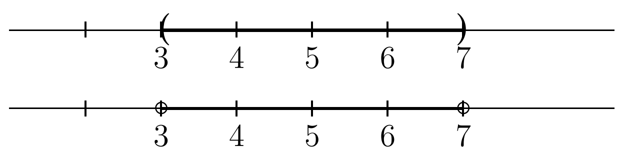
Ejercicio. Verifique con ejemplos cada una de las propiedades anteriores.

1.9 Intervalos

El conjunto de los números reales es un conjunto totalmente ordenado. Esto es dados dos números reales distintos a y b , siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor o mayor.
Es decir, se verifica alguna de las siguientes desigualdades: $a < b$ o $a \geqslant b$ o $a > b$ o $a \leqslant b$.
Frecuentemente se trabaja con subconjuntos de los números reales, en donde aparece alguna relación de orden, por ejemplo: "el conjunto A de los números reales mayores que 3 y menores que 7.
Este conjunto A puede simbolizarse:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}$$

También puede indicarse a través del intervalo abierto $(3, 7)$. El intervalo es abierto porque no contiene los extremos 3 y 7, lo que se indica utilizando el paréntesis. La representación gráfica es la siguiente:



$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leqslant x < 7\}$$

El conjunto B puede indicarse a través del intervalo semiabierto $[3, 7)$.

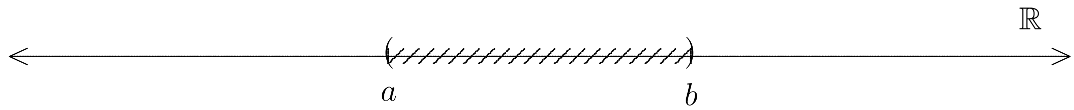
$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leqslant x < 7\} = [3, 7)$$

Dado el intervalo $[a, b)$, con el corchete "[" se indica que a pertenece al intervalo, con el paréntesis ")" se indica que b no pertenece al intervalo.

Se puede decir que:
Los intervalos son subconjuntos de números reales definidos de la siguiente manera:
Dados $a, b \in \mathbb{R}$ definimos:

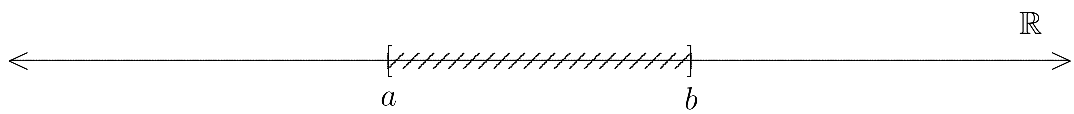
- $(a, b) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R}$ y $a < x < b\}$, llamado intervalo abierto de extremo inferior a y extremo superior b, o simplemente intervalo abierto a, b.

Gráficamente,



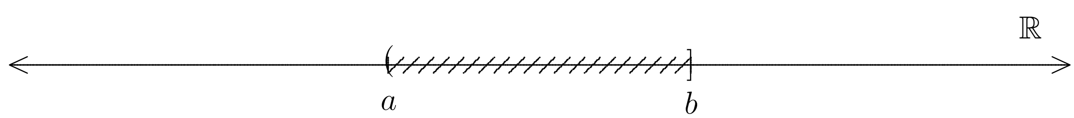
- $[a, b] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leqslant x \leqslant b\}$, llamado intervalo cerrado de extremo inferior a y de extremo superior b, o simplemente intervalo cerrado a, b.

Gráficamente,



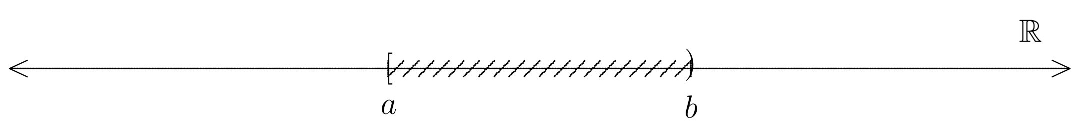
- $(a, b] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a < x \leqslant b\}$, llamado intervalo semiabierto de extremo abierto a y cerrado en b.

Gráficamente,



- $[a, b) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leqslant x < b\}$, llamado intervalo semicerrado de extremo cerrado a y abierto en b.

Gráficamente,



Ejemplos.

a) El intervalo abierto $(1, 5) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } 1 < x < 5\}$, es decir, el intervalo $(1, 5)$ está formado por todos los números reales mayores que 1 y menores que 5 (entre 1 y 5, sin tomarlos). Por ejemplo, los números reales $\pi, \frac{7}{2}, 4, \sqrt{3} \in (1, 5)$.

b) El intervalo cerrado $[0, 2] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, esto es, el intervalo $[0, 2]$ está formado por todos los números reales mayores o iguales que el 0 y menores o iguales que 2 (entre el 0 y 2 inclusive). Por ejemplo, $\sqrt{2}, \frac{1}{3}, 0, 2 \in [0, 2]$.

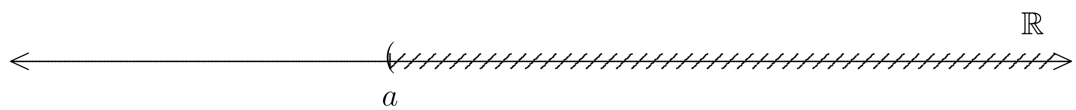
Intervalos infinitos.

En lo que sigue interpretaremos a los símbolos ∞ y $-\infty$ como "infinito" y "menos infinito", respectivamente. Es claro que, para cualquier número real a se verifica que $-\infty < a < \infty$ siempre.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ definimos:

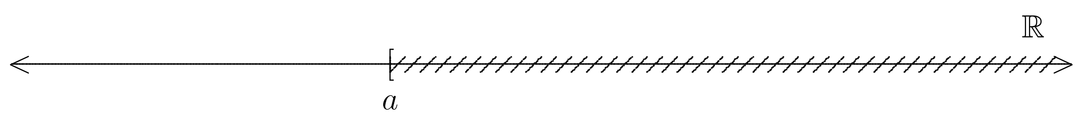
- $(a, \infty) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a < x\}$, llamado intervalo infinito abierto de extremo inferior a.

Gráficamente,



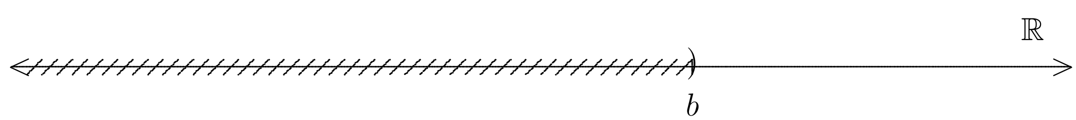
- $[a, \infty) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } a \leqslant x\}$, llamado intervalo infinito cerrado de extremo inferior a.

Gráficamente,



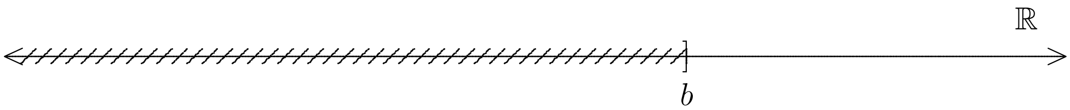
- $(-\infty, b) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } x < b\}$, llamado intervalo infinito abierto de extremo superior b.

Gráficamente,



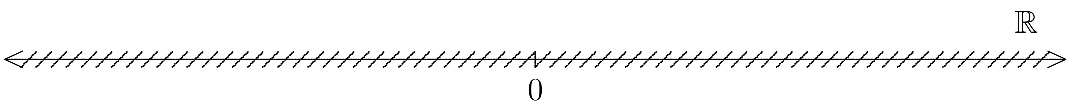
- $(-\infty, b] = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leqslant b\}$, llamado intervalo infinito cerrado de extremo superior b.

Gráficamente,



- $(-\infty, \infty) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R}\}$, es decir, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Gráficamente,



NOTA: Tanto "∞" como "$-\infty$" no pertenecen al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
Observación: Observemos que con esta notación, por intervalos, podemos escribir:

- $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$ y $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.

- Si $|x| < a$ entonces $-a < x < a$, se denota $x \in (-a, a)$

  Si $|x| \geqslant a$ entonces $x \leqslant -a$ o $x \geqslant a$, se denota $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

Ejercicio.

(a) Expresa como intervalos los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es menor que seis}\}$

B el conjunto de los números reales, no menores que -3 pero menores que 8.

$C = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -9\}$.

(b) Grafique los intervalos anteriores.

(c) Halle y grafique $A \cup C$ y $A \cap C$.

1.10 Operaciones en $\mathbb{R}$

Para trabajar con los conjuntos numéricos recordaremos las operaciones y algunas de sus propiedades básicas.

1.10.1 Suma

- Con igual denominador:
  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ donde $b \neq 0$
- Con distinto denominador:
  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(m:b)a + (m:d)c}{m}$ con m el múltiplo común menor
  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Propiedades de la suma

- Conmutativa: $a + b = b + a$
- Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Elemento neutro: 0 (cero) tal que $a + 0 = a$
- Opuesto aditivo: cada número real a tiene su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a + (-a) = 0$
- Cancelativa: si $a + c = b + c$ entonces $a = b$

1.10.2 Producto

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{b} = \frac{a.c}{b.d}, \text{ donde } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Propiedades del producto

- Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Elemento neutro: 1(uno) tal que $a \cdot 1 = a$
- Recíproco: cada número real $a \neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o recíproco $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- Cancelativa: si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$

Propiedad distributiva

- $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
- $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$
- $c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$
- $c\cdot(a-b) = c\cdot a - c\cdot b$
- $(a+b) : c = a : c + b : c$

1.10.3 Cociente

Todo cociente de números fraccionarios puede transformarse en producto.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$

con $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $c \neq 0$

Propiedad

- $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} \quad \text{con} \quad c \neq 0$

1.10.4 Potenciación

$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot}_{n\ veces}$, $n \in \mathbb{N}$

a recibe el nombre de base, y n de exponente.

Regla de los signos

$(+)^{par} = +$ $\qquad$ $(+)^{impar} = +$

$(-)^{par} = +$ $\qquad$ $(-)^{impar} = -$

Propiedades de la potenciación

- Todo número distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1.

  $a^0 = 1$ con $a \neq 0$

- Potencia de exponente negativo.

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \text{con} \quad a \neq 0$

- Producto de potencias de igual base.

  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

- Cociente de potencias de igual base.

  $a^n : a^m = a^{n-m}$

- Potencia de potencia.

  $(a^n)^m = a^{n.m}$

- La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y la división.

  $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$

  $(a : b)^n = a^n : b^n, \qquad b \neq 0$

  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad b \neq 0$

1.10.5 Radicación

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{si y solo si} \qquad b^n = a$$

El número a recibe el nombre de radicando, n es el índice y el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical.
Si n es impar entonces el radicando puede ser cualquier valor real.
Si n es par entonces el radicando debe ser $a \geqslant 0$, en caso contrario el resultado no es un número real.

Regla de los signos

$\sqrt[par]{+} = +$ o $-$ En la resolución de los ejercicios se adoptará $+$

$\sqrt[impar]{+} = +$

$\sqrt[par]{-} =$ no posee solución real

$\sqrt[impar]{-} = -$

Propiedades de la radicación

- Todo raiz puede expresarse como potencia de exponente fraccionario.

  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

  en particular $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

- Raiz de una potencia es la potencia de la raiz.

  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

- n par entonces $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

  n impar entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$

- La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y la división

  $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

  $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad \text{con} \quad b \neq 0$

  $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{con} \quad b \neq 0$

- Raiz de una raiz.

  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

1.11 Extracción de factores fuera del signo radical

Se pueden extraer factores fuera del signo radical cuando el exponente de dichos factores sea mayor o igual que el índice .
Observen como se pueden extraer factores fuera del signo radical:

$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5}$ $\longrightarrow$ Descomponemos 45 como producto de sus factores primos.

$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5}$ $\longrightarrow$ Aplicamos propiedad distributiva de la radicación en el producto .

$= \cancel{\sqrt{}}3^{\cancel{2}} \cdot \sqrt{5}$ $\longrightarrow$ Simplificamos.

$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \cancel{\sqrt[3]{2^3}} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

Operaciones con radicales

Adición y sustracción de radicales:

Dos radicales son **semejantes** cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.Al sumar o restar términos semejantes podemos obtener una expresión de un solo término.

Radicales semejantes

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 6\sqrt{7} & + & 4\sqrt{7} \end{array}$$

$$6\sqrt{7} \ + \ 4\sqrt{7} = (6+4)\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$$
$$8\sqrt{3} \ - \ \sqrt{3} = (8-1)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Si los radicales no son semejantes la suma o resta se resuelve teniendo en cuenta los siguientes pasos:

i) Factorizar los radicandos.

ii) Extraer factores fuera del radical.

iii) Identificar términos semejantes

iv) Operar

Ejemplos.

1) $$\begin{aligned} 5\sqrt{50} \ - \ 2\sqrt{18} \ + \ 9\sqrt{32} &= 5\sqrt{2 \cdot 5^2} \ - \ 2\sqrt{2 \cdot 3^2} \ + \ 9\sqrt{2^5} \\ &= 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \ - \ 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \ + \ 9\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{5^2}} \ - \ 2\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{3^2}} \ + \ 9 \ \cancel{\sqrt{2^2}} \cdot \cancel{\sqrt{2^2}} \ \cdot \sqrt{2} \\ &= 25\sqrt{2} \ - \ 6\sqrt{2} \ + \ 36\sqrt{2} \\ &= (25 - 6 + 36)\sqrt{2} = 55\sqrt{2} \end{aligned}$$

2) $-3\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{4} - 8\sqrt[9]{8} = -3\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{2^2} - 8\sqrt[9]{2^3}$

$= -3\sqrt[3]{2} + \cancel{\sqrt[6]{2^{\cancel{2}}}} - 8\cancel{\sqrt[9]{2^{\cancel{3}}}}$

$= -3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2}$

$= (-3 + 1 - 8)\sqrt[3]{2} = (-10)\sqrt[3]{2}$

3) $4\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{5^4} - \sqrt[3]{3^4} + 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} + 3\sqrt[3]{3}$

$= 4\sqrt[3]{5^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} + 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} + 3\sqrt[3]{3}$

$= 4\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{3}$

$= 4\cancel{\sqrt[3]{5^{\cancel{3}}}} \cdot \sqrt[3]{5} - \cancel{\sqrt[3]{3^{\cancel{3}}}} \cdot \sqrt[3]{3} + 2\cancel{\sqrt[3]{2^{\cancel{3}}}} \cdot \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{3}$

$= 20\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{3}$

$= -3\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} + 20\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5}$

$= (-3 + 3)\sqrt[3]{3} + (20 + 4)\sqrt[3]{5} = 24\sqrt[3]{5}$

Multiplicación y división de radicales.

Para multiplicar y dividir radicales del mismo índice aplicamos la inversa de la propiedad distributiva:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos.

1) $7\sqrt{12} \cdot 5\sqrt{3} = 7 \cdot 5\sqrt{12 \cdot 3}$

$= 35\sqrt{36}$

$= 35 \cdot 6 = 210$

2) $\dfrac{1}{7}\sqrt[5]{-729} : \dfrac{1}{14}\sqrt[5]{3} = \dfrac{1}{7} : \dfrac{1}{14}\sqrt[5]{(-729) : 3}$

$= 2\sqrt[5]{-243} = 2 \cdot (-3) = -6$

3) $10\sqrt[4]{128} : (-5\sqrt[4]{8}) = 10 : (-5)\sqrt[4]{128 : 8}$

$= -2\sqrt[4]{16} = (-2) \cdot 2 = -4$

4) $\sqrt[3]{125}\ \cdot\ (-3\sqrt[3]{5})\ \cdot\ \sqrt[3]{2} = 1\cdot(-3)\cdot 1\sqrt[3]{125\cdot 5\cdot 2}$

$$\begin{aligned}
&= -3\sqrt[3]{1250} = \\
&= -3\sqrt[3]{2\cdot 5^4} = -3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5^4} = -3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5^3\cdot 5} \\
&= -3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{2}\cdot\ \cancel{\sqrt[3]{5^{\cancel{3}}}}\cdot\sqrt[3]{5} \\
&= (-3)\cdot 5\sqrt[3]{2\cdot 5} = -15\sqrt[3]{10}
\end{aligned}$$

Racionalización de denominadores

A veces cuando se resuelven cálculos o problemas se obtienen fracciones con números irracionales en los denominadores, como por ejemplo $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$; $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$; $\dfrac{7}{\sqrt{2}\ -\ \sqrt{5}}$; etc.

Para transformar estas fracciones en otras equivalentes pero con denominadores racionales, se usa un procedimiento llamado racionalización.

Racionalizar un denominador significa transformar una fracción cuyo denominador es un número irracional en otra fracción igual a la dada cuyo denominador sea racional.

Es decir que racionalizar significa hacer desaparecer del denominador todo signo radical.

Se considerarán los siguientes casos:

(a) El denominador es un radical único irreducible de índice 2.

Ejemplo.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \rightarrow \text{Se multiplica numerador y denominador de la fracción}$$

por el mismo radical del denominador.

$$= \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2^{\cancel{2}}}}} \rightarrow \text{se opera y simplifica.}$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{denominador racional.}$$

(b) El denominador es un radical único irreducible de índice distinto de 2.

Ejemplo.

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{7\cdot\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}} \rightarrow \text{Se multiplica numerador y denominador de la fracción}$$

por el radical de igual índice que el de su denominador, con igual radicando, y por exponente elegimos la diferencia entre el índice y exponente inicial. en este caso: 5-3=2.

$$= \frac{7 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{\cancel{\sqrt[5]{2^5}}} \rightarrow \text{se opera y simplifica.}$$

$$= \frac{7 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{2} \rightarrow \text{denominador racional.}$$

En general para racionalizar una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $b \neq 0$, se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

(c) El denominador es un binomio de la forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ó $a \pm \sqrt{b}$ ó $\sqrt{a} \pm b$. Para comprender el procedimiento a usar en este caso, se debe tener en cuenta que $(p+q) \cdot (p-q) = p^2 - p \cdot q + q \cdot p - q^2 = p^2 - q^2$, con $p, q \in \mathbb{R}$.

Ejemplos.

1) $$\frac{7}{2+\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} \rightarrow \text{Se multiplica numerador y denominador}$$

por el conjugado del denominador.

$$= \frac{14 - 7\sqrt{3}}{(2^2 - (\cancel{\sqrt{}}3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{14 - 7\sqrt{3}}{4 - 3} = 14 - 7\sqrt{3}$$

2) $$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\cancel{\sqrt{}}7)^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{}}3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3}$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4}$$

1.12 Los números complejos

En el conjunto de los números reales, podemos realizar casi todas las operaciones conocidas. Al querer calcular, por ejemplo $\sqrt{-4}$, buscamos un número que elevado al cuadrado sea igual a -4. Pero se sabe que el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual que cero, por lo tanto no es posible calcular $\sqrt{-4}$ en $\mathbb{R}$.
Para solucionar este tipo de problema, se introducen los números imaginarios.
Se define como unidad imaginaria, al número

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

De este manera: $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i$, donde $2i$ es un número imaginario.
Los números reales junto a los números imaginarios forman el conjunto de los números *complejos*, simbolizados con $\mathbb{C}$.

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ imaginarios \end{array}\right\} \mathbb{C}$$

Un número complejo z tiene la forma binómica $a + bi$, con a, b números reales e i la unidad imaginaria.

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{si} \;\; z = a + bi$$

$$z = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{parte real de } z}}{a} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{parte imaginaria de } z}}{b}\; i$$

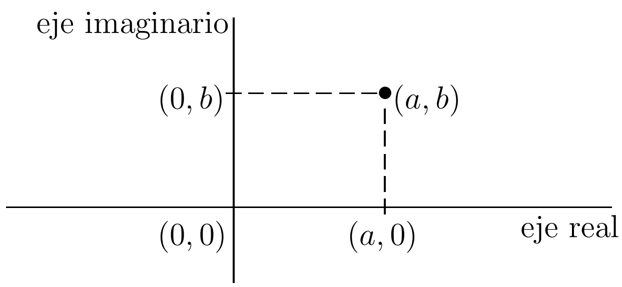
Un número complejo también puede representarse por un par ordenado de números reales $z = (a, b)$.
Por ejemplo:
$z = 2 - 3i$, se puede expresar como $(2, -3)$.

1.12.1 Representación gráfica de los números complejos

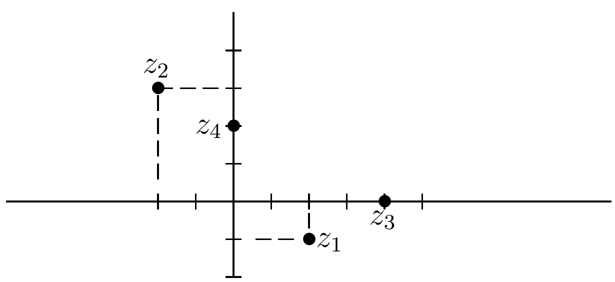
Recordemos que la recta númerica quedó completa con los números reales, ahora para represetar los números complejos, necesitamos el plano.
Tomemos un sistema cartesiano donde el origen $(0, 0)$ representa el número complejo $0 + 0i$.

Todos los puntos sobre el eje horizontal, eje de abscisas, son de la forma $(a, 0)$ que corresponden a los números reales $a + 0i$. Este eje recibe el nombre de eje real.

Todos los puntos sobre el eje vertical, eje de ordenadas, son de la forma $(0, b)$ que corresponden a los números imaginarios puros $0 + bi$. Este eje recibe el nombre de eje imaginario.



Ejemplo.
$z_1 = 2 - i$ $\qquad z_2 = -2 + 3i$ $\qquad z_3 = 4$ $\qquad z_4 = 2i$



1.12.2 Opuesto y conjugado de un número complejo

Dado el número complejo $z = a + bi$,
el opuesto del número complejo es: $-z = -a - bi$
el conjugado del número complejo es: $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo.

a) Si $z = 2 - 3i$ entonces $-z = -2 + 3i$ y $\overline{z} = 2 + 3i$

b) Si $z = 1 + i$ entonces $-z = -1 - i$ y $\overline{z} = 1 - i$

c) Si $z = 4$ entonces $-z = -4$ y $\overline{z} = 4$

d) Si $z = 6i$ entonces $-z = -6i$ y $\overline{z} = -6i$

1.13 Operaciones con números complejos

Suma.
Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos la suma $z + w$ como el nuevo número complejo $(a + c) + (b + d)i$.

Resta.
Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos la resta $z - w$ como el nuevo número complejo $z + (-w) = (a - c) + (b - d)i$, donde $-w$ es el opuesto del w definido con anterioridad.

Producto.
Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, para efectuar el producto $z.w$ seguiremos los siguientes pasos:

- Aplicamos la propiedad distributiva.

$$z.w = (a + bi).(c + di) = a.c + a.di + bi.c + bi.di = a.c + a.di + bi.c + b.di^2$$

- Sustituimos i^2 por -1 en el término que lo contenga.

$$z.w = ac + adi + bci + bd.(-1) = ac + adi + bci - bd$$

- Agrupamos los términos que no contengan i, lo que nos proporciona la parte real del producto, y agrupamos los términos que contengan i, lo que nos dará la parte imaginaria del producto.

$$z.w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Veamos estos pasos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

a) $(3 - 2i)(4 + 3i) = 3.4 + 3.3i - 2.4i - 2.3i^2 = 12 + 9i - 8i + 6 = 18 + i$

b) $(-2 + 4i)(2i) = -4i - 8 = -8 - 4i$

c) $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3.3 - 3.4i + 4.3i - 4.4i^2 = 9 - 12i + 12i + 16 = 25$

Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos el producto $z.w$ como el nuevo número complejo $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Obsérvese el caso c) del ejemplo anterior. El producto de ese número complejo por su conjugado es un número real. Este resultado es cierto en general, ya que

$$z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Cociente.
Vamos a estudiar ahora el cociente de dos números complejos. En primer lugar vamos a ver un ejemplo con dos números concretos. Sean, por ejemplo, los números complejos $3+2i$ y $4-3i$. Sería deseable que su cociente $\frac{3+2i}{4-3i}$ pudiera ser escrito como otro número complejo, que designaremos por $x + yi$. Por la definición del producto de números complejos tenemos

$$3 + 2i = (4 - 3i)(x + yi) = (4x + 3y) + (4y - 3x)i,$$

e igualando las partes reales e imaginarias del primer y el último miembro de la igualdad anterior obtenemos el sistema

$$3 = 4x + 3y$$

$$2 = -3x + 4y$$

que resuelto nos proporciona $x = \frac{6}{25}$ e $y = \frac{17}{25}$. Así pues

$$\frac{3 + 2i}{4 - 3i} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i.$$

Se observa que el proceso exige resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, a veces, puede ser largo y molesto. Veamos un método más directo. Observemos que el denominador de las partes real e imaginaria del cociente es 25. Este número es el cuadrado del módulo del denominador, $4-3i$. Hemos visto anteriormente que $z\overline{z} = |z|^2$. Por tanto, si en el cociente inicial multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, $4 + 3i$, tenemos

$$\frac{3 + 2i}{4 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{12 + 9i + 8i - 6}{25} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i.$$

Así se obtiene el cociente de manera mucho más rápida que por el procedimiento anterior. Podemos generalizar lo que hemos hecho en este ejemplo particular.

Dados los números complejos z y w, con $w \neq 0$, el cociente $\dfrac{z}{w}$ es el nuevo número complejo $\dfrac{z\overline{w}}{|w|^2}$.

2 Ejercitación básica

2.1 Práctica 1: Conjuntos numéricos

Ejercicio 1 *Complete con $\in$, $\notin$, $\subset$ o $\not\subset$ según corresponda.*

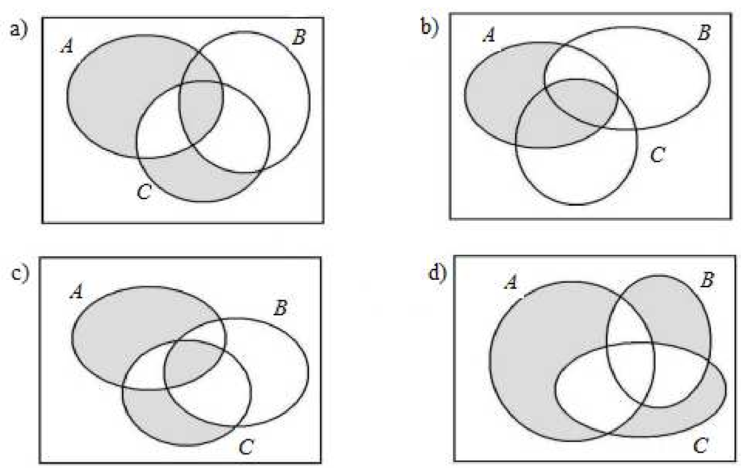
a) $\mathbb{Q}$ ... $\mathbb{Z}$ b) $\sqrt{9}$ ... $\mathbb{Q}$ c) $-\frac{2}{3}$ ... $\mathbb{Z}$ d) $0,7$ ... $\mathbb{I}$ e) $4,1111$...$\mathbb{I}$

f) 0 ... $\mathbb{N}$ g) π ... $\mathbb{Q}$ h) $\sqrt{5}$ ...$\mathbb{R}$ i) -5 ... $\mathbb{N}$ j) $1,4$ ... $\mathbb{R}$

Ejercicio 2 *Si* $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *es el conjunto universal y* $A = \{1,4,7,10\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{x : x \in \mathbb{N}, \textit{pares menores que } 10\}$, *define por extensión y realiza el diagrama de Venn de los siguientes conjuntos:*

a) $A \cup C$ b) $B \cup \emptyset$ c) $\overline{B} \cap (C - A)$ d) $\overline{(A \cap B)} \cup C$
e) $C \cap \mathcal{U}$ f) $(A \cup B) - (C - B)$ g) $\overline{\mathcal{U}}$ h) $A \cup (B \cap \overline{\emptyset})$

Ejercicio 3 *Escribe la expresión que corresponde a la parte sombreada de los siguientes diagramas:*



Ejercicio 4 *De un ejemplo de número:*

a) real no irracional

b) entero no natural

c) racional no entero

d) real no racional

Ejercicio 5 *Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.*

a) Todo número entero es natural. ☐

b) Todo número natural es un número real. ☐

c) No existen números enteros que no sean racionales. ☐

d) Entre dos números enteros existe un número finito de números enteros. ☐

e) Entre dos números racionales hay un número finito de números racionales. ☐

f) algunos números racionales no son enteros. ☐

g) Existen números irracionales cuyo cuadrado es racional. ☐

h) Entre dos números reales hay infinitos números reales. ☐

Ejercicio 6 *Dados los siguientes subconjuntos de los reales:*

a) Exprese cada uno de los conjuntos como intervalos.

b) En caso de ser posible, represente los intervalos en la recta numérica.

$A = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leqslant x \leqslant 1\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{7}{2} < x \leqslant -\frac{1}{2}\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : 1,5 < x < 3\}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant -3\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$ $\quad F = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{3}{2}\}$

$G = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leqslant x \leqslant 12\}$ $\quad H = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < x < 7\}$

$I = \{x \in \mathbb{Z} : 4 \leqslant x < 8\,, x \text{ impar}\}$ $\quad J = \{x \in \mathbb{R} : -\dfrac{3}{2} \leqslant x < 5\}$

Ejercicio 7 *Represente los intervalos en la recta numérica y escriba el conjunto resultante:*

a) $[2,4] \cup \left(3, \dfrac{9}{2}\right)$ b) $[2,4] \cap \left(3, \dfrac{9}{2}\right)$

c) $(-3,1] \cup (1,4]$ d) $(-\sqrt{2},0) \cup [0,\infty)$

e) $\{0, 2\} \cap [0, 2)$ f) $\left(-\frac{4}{5}, 0\right) \cup \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

g) $\left(-\frac{3}{4}, 1\right) \cap (1, 3)$ h) $\left(-\infty, \sqrt{3}\right] \cap \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$

Ejercicio 8 *Resuelva, indique si el resultado es un número natural, y/o entero y represéntelo en la recta numérica:*

a) $16 : (-2) - (-4 + 2) + 5 \cdot (-1) =$ Rta:-11

b) $8 - 6 : (-3) + 4 : (-2) - 3 \cdot (-4) =$ Rta: 20

c) $5 - \{3 - 2 \cdot (-5) - [-(-4) + (-2) + 9 : (-3) - 4 + (-3 + 5)] - 1\} =$ Rta:-10

d) $18 : (-9) - \{-[2 - 5 \cdot (-1)] + 8\} - (-7) =$ Rta: 4

Ejercicio 9 *Tilde el resultado correcto de este cálculo combinado:*

$$-24 : (-6) - \{-3 - [8 : (-4) - (-2 - 3)]\} \cdot 2 + 1 =$$

a) 9 b) 17 c) -1 d) -3

Ejercicio 10 *Calcule, llevando las expresiones decimales exactas y periódicas a fraccionarias, indique si el resultado es un número natural, y/o entero, y/o racional, y represéntelo en la recta numérica:*

a) $0,\widehat{6} + (0,8 - 0,5) : 0,75 =$

b) $(0,5 + 1) - \left(3 + \frac{2}{3}\right) - (-0,2)^{-2} + (1,5 - 2)^3 + 0,\widehat{3} =$

c) $\dfrac{1 - 0,5}{0,75} + \dfrac{1,5 - 1}{2 - 0,25} =$

d) $\dfrac{\left(\frac{1}{2} + 1,\widehat{3}\right)^2}{3 \cdot \left(1 - 0,08\widehat{3}\right)} + 4,\widehat{7} =$

Ejercicio 11 *Elimine paréntesis, corchetes y llaves, y luego resuelva:*

a) $1\,\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1 + \left[\frac{3}{4} - 3 - \left(2\,\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2}\right) - 1\,\frac{1}{4}\right] + 1\,\frac{1}{2}\right\} =$ Rta: $\dfrac{37}{6}$

b) $\frac{2}{3}-\left[-\frac{1}{2}+1-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\right)-2\right]-\frac{1}{4}-\left\{-1+\left[\frac{2}{3}-\left(2\frac{1}{6}-1\frac{1}{4}\right)\right]\right\}=$ Rta:3

c) $-1+\frac{1}{2}-\left\{5-\left[\frac{1}{4}+\left(3-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{5}\right]-\frac{1}{2}\right\}+2-\frac{13}{40}=$ Rta: 0

Ejercicio 12 *Complete con $=$ o $\neq$, justifique su respuesta.*

a) $(a+b)^n......a^n+b^n$

b) $a^b......b^a$

c) $a^{b^c}......(a^b)^c$

d) $a^n\cdot a^n......a^{n^2}$

e) $(p.q)^a......p^a.q^a$

f) $a^n\cdot a^n......a^{2n}$

g) $\sqrt{a+b}......\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Ejercicio 13 *Aplicando propiedades de potenciación, demuestre las siguientes igualdades.*

a) $(a+2)^2-(a-2)^2-4.(2a+1)=-4$

b) $(3.3^{n+1}+3^{n+2})^3:(3^{n+2})^3=8$

Ejercicio 14 *Resuelva, indique a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado y represéntelo en la recta numérica.*

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}+\frac{10}{9}+\left(\frac{2}{3}:\frac{8}{27}\right)^{-1}-\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}\right]^{-1}=$ Rta:

b) $\left(1-\frac{75}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{81}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}=$ Rta: 4

c) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{-24}}+\sqrt[3]{-9}\cdot\sqrt[3]{-24}=$ Rta: $\frac{9}{2}$

d) $\sqrt{\frac{\left(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{6}{5}\right)^{0}}{\frac{2}{3}\cdot(-4,5):(-0,1)^{-1}}}-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2}+(-1)^{-3}=$ Rta:0, 4221

e) $\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^{2}}{\sqrt{\frac{11}{25}+1}}\cdot(-12)=$ Rta: $4,\widehat{4}$

f) $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}+\frac{5}{4}}}{1-\sqrt[10]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}}=$ Rta: $-\frac{7}{2}$

g) $\sqrt{0,04\cdot\frac{1}{4}}+(0,2)^{3}-\frac{1}{2}\cdot 0,4+0,25:\frac{1}{2}=$ Rta: $\frac{51}{125}$

h) $\dfrac{\left[1,3+12\cdot(3-1,6)-3,5+5\cdot(1,2-0,8)\right]^{2}}{5}=$ Rta: 55,112

i) $\left[4,3\widehat{9}-1,4+(2,9\widehat{7}+0,0\widehat{2})\right]^{-1}:(-0,5)^{3}+2,\widehat{6}2=$ Rta: $\frac{128}{99}$

k) $\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-1}+\ 0,7:2,\widehat{3}\ -\ 0,25:0,\widehat{6}}{\sqrt{0,\widehat{7}}\cdot\sqrt{\frac{4}{7}}\ -\left(1-0,\widehat{3}\right)^{-2}+\ 1,5}\right]^{2}=$

l) $\dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}+\left(2.\,0,3+\sqrt{0,04}\right)^{-1}-\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right).\,0,\hat{3}}\ +\ (0,1\,.\,7-3,1).\,0,1\hat{6}}=$

m) $\dfrac{\left(0,\hat{3}+\frac{5}{6}\right):\ 0,\hat{1}-5.\sqrt{\frac{81}{16}}}{0,0\hat{8}.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{4}.\sqrt[3]{8}+\sqrt{\frac{25}{64}}\right]-0,2\hat{6}}=$

Ejercicio 15 *Resuelva.*

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)^{-1}-\sqrt[3]{-8}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+(-2)^{-2}:(-4)^{-1}=$ Rta: 0

b) $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}}\cdot\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}+(-2)^{3}-\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{8^{2}}}\right)=$ Rta: $-\frac{97}{12}+\frac{1}{8}\sqrt{2}$

c) $\sqrt{\left\{\left[20:(-2)^{2}+2^{5}:2^{2}+\sqrt{49}\right]:2\right\}^{4}}=$ Rta: 100

d) $\sqrt[3]{\left[\left(\frac{16}{9}\right)^2 : \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(1+\frac{21}{4}\right)\right] \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2} =$ Rta: 0

Ejercicio 16 *Resuelva, represente el resultado y diga a qué conjuntos numéricos pertenece.*

a) $\frac{15}{10} \cdot \sqrt{28} - \frac{1}{25}\sqrt{700} + 0,1 \cdot \sqrt{7} =$

b) $\left(3 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) \cdot \sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 11 \cdot \sqrt{2} =$

c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{54} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{250} =$

d) $4\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[9]{8} - 3\sqrt[3]{2} =$

e) $3\sqrt[4]{4} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} =$

Ejercicio 17 *Racionalice los siguientes denominadores.*

a) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}} =$

b) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}} =$

c) $\frac{\sqrt[3]{5}+2}{\sqrt[3]{3}} =$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

e) $\frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}} =$

f) $\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} =$

Ejercicio 18 *Aplique propiedades y simplifique.*

a) $\frac{\sqrt{5x} \cdot \sqrt[3]{x \cdot 5^2}}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[6]{5^5 \cdot x}} =$ Rta: $5^{\frac{1}{3}}.^{-\frac{5}{6}}$

b) $\frac{\left(2^3\right)^{-2} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} =$ Rta: 2^{-11}

c) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3^3} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^4 \cdot \sqrt[3]{3^4}} =$ Rta: $2^{-7}5^{-1}$

d) $\frac{\sqrt[3]{ax} \cdot \sqrt[4]{x \cdot a^2}}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot x^2}} =$ Rta: $\sqrt[6]{a^{-5}}\sqrt{x^{-1}}$

e) $\dfrac{x^{-1} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{6} \cdot c^{-1}}{a^{2} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}} =$ Rta: $x^{-\frac{4}{3}} a^{-\frac{7}{3}} b^{\frac{11}{2}} c^{-1}$

f) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}} =$ Rta:

Ejercicio 19 *Para los siguientes números complejos indique la parte real y la parte imaginaria. Los que estén incompletos, escríbalos en forma binómica y clasifíquelos en reales o imaginarios puros.*

(*a*) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\, i$ (*b*) $\sqrt{3} - 2\, i$ (*c*) $-1 + \dfrac{5}{4}\, i$

(*d*) $2 - i$ (*e*) $-\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}\, i$ (*f*) 0

(*g*) i (*h*) $\sqrt{5}$ (*i*) $-2\, i$

Ejercicio 20 *Sean* $z_1 = 2\,i$, $z_2 = -3 + 4\,i$, $z_3 = \dfrac{1}{2} - i$, $z_4 = 2 - \dfrac{3}{2}\, i$ *y* $z_5 = -4$. *Calcule.*

(*a*) $z_2 + z_3 =$ (*b*) $z_4 + z_5 =$

(*c*) $z_2 + z_4 =$ (*d*) $z_1 + z_5 =$

Ejercicio 21 *Sean* z_1, z_2, z_3, z_4 *y* z_5 *los mismos anteriores, para cada uno de ellos calcule el opuesto.*

Ejercicio 22 *Sean* z_1, z_2, z_3, z_4 *y* z_5 *los mismos anteriores, calcule:*

(*a*) $z_2 - z_3 =$ (*b*) $z_3 - z_4 =$

(*c*) $z_2 - z_4 =$ (*d*) $z_1 - z_5 =$

Ejercicio 23 *Sean* z_1, z_2, z_3, z_4 *y* z_5 *los mismos anteriores, calcule:*

(*a*) $z_2 .\, z_3 =$ (*b*) $z_1 .\, z_2 =$ (*c*) $z_3 .\, z_4 =$

(*d*) $z_1 .\, z_5 =$ (*e*) $z_2 .\, z_5 =$

Ejercicio 24 *Sean* z_1, z_2, z_3, z_4 *y* z_5 *los mismos anteriores, para cada uno de ellos calcule el conjugado.*

Ejercicio 25 *Sean* z_1, z_2, z_3, z_4 *y* z_5 *los mismos anteriores, represente gráficamente a cada uno de ellos en el plano complejo.*

Ejercicio 26 *Complete el siguiente cuadro.*

z	$Re(z)$	$Im(z)$	$-z$	$\overline{z}$
$2+3\,i$				
$1-i$				
$2\,i$				
$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,i$				
-3				

Ejercicio 27 *Dados los números complejos* $z=-2+i$, $w=3-2\,i$, $u=-3$ *y* $v=\frac{1}{2}\,i$. *Halle:*

(a) $u.\,z=$ $\quad$ (b) $z.\,w=$ $\quad$ (c) $z.\,(u+v)=$

(d) $-w=$ $\quad$ (e) $w^{\,2}=$

Ejercicio 28 *Resuelve las siguientes operaciones con números complejos.*

(a) $\Big[(2-i)-(3-2\,i)\Big].\,(1+i)=$

(b) $\Big[(3+i)+(1-2\,i)\Big].\,(2-i)=$

(c) $\Big[(1-i)-(2-2\,i)\Big].\,(1-3\,i)=$

(d) $(2+3\,i)^2=$

(e) $(-3-2\,i)^3=$

3 Capítulo 2. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

3.1 Introducción

Las ecuaciones e inecuaciones son de gran importancia, pues la mayor parte de las situaciones problemáticas de la vida cotidiana pueden plantearse a través de ecuaciones. El alumno de matemática deberá adquirir la capacidad de interpretar enunciados, modelar matemáticamente distintas situaciones y resolverlas empleando ecuaciones apropiadas.
Este capítulo estudiaremos la resolución de ecuaciones e inecuaciones de distintos tipos, nos dedicaremos a la formulación y solución de ecuaciones lineales y de ecuaciones cuadráticas con una incógnita, temas que serviran para facilitar el aprendizaje de los temas que siguen.
Al final de la sección se proponen ejercicios que apuntan, en primer lugar, a familiarizarse con los métodos para resolver ecuaciones (e inecuaciones) y, en segundo lugar, a desarrollar la habilidad de plantear problemas mediante el uso de éstas.

3.2 Ecuaciones lineales con una incógnita.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A cada una de esas expresiones se las denomina miembro, llamando primer miembro a la expresión que se encuentra a la izquierda del signo “ = ”, y segundo miembro a la que se encuentra a la derecha.
Resolver una ecuación, consiste en hallar todos los números (o combinaciones de ellos) que al ser reemplazados por las letras que aparecen en la igualdad, la verifican.
Cuando la igualdad es de la forma $ax + b = 0$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, decimos que se trata de una ecuación lineal con una incógnita.
Llamaremos ecuaciones equivalentes a dos o mas ecuaciones cuyas soluciones sean las mismas.
Para resolver una ecuación lineal de una incógnita, lo que haremos será hallar ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas, hasta llegar a un punto en el que la solución sea trivial. Para obtener ecuaciones equivalentes, utilizaremos las siguientes propiedades de la relación de igualdad:

- Si se suma a ambos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.
- Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.

Además, en ambos miembros de la igualdad, asumiremos que las letras representan números reales y usaremos todas las propiedades vistas en el primer capítulo.

Ejemplo. Veamos cómo resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{3}(x+6) - \frac{7}{6}x = \frac{x-1}{2} - 3x + 5 \tag{1}$$

Lo primero que debemos hacer al resolver una ecuación, es dejar todos los términos simplificados. Esto se logra cuando en el término tenemos a lo sumo una letra (en el caso de las ecuaciones con una incógnita) y a lo sumo un número (que puede ser una fracción).

En (1), podemos aplicar la propiedad distributiva en el primer término de cada uno de los miembros. Obteniendo:

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{\cancel{3}_1}.\cancel{6}^2 - \frac{7}{6}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - 3x + 5$$

$$\frac{2}{3}x + 4 - \frac{7}{6}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - 3x + 5 \tag{2}$$

Una vez logrado el primer objetivo, tenemos que agrupar todos los términos que poseen incógnita en uno de los miembros, y todos los términos independientes en el otro. Para esto, sumamos a ambos miembros de (2) la expresión $3x - \frac{1}{2}x - 4$, quedando:

$$\frac{2}{3}x + \cancel{4} - \frac{7}{6}x + 3x - \frac{1}{2}x - \cancel{4} = \cancel{\frac{1}{2}}x - \frac{1}{2} - \cancel{3}x + 5 + \cancel{3}x - \cancel{\frac{1}{2}}x - 4$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}x + 3x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} + 5 - 4 \tag{3}$$

El objetivo ahora es dejar un sólo término en cada miembro. Para ello, sacamos factor común "x" en el primer miembro de (3) y en el segundo, resolvemos. Luego:

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6} + 3 - \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{2} \tag{4}$$

Ahora simplemente multiplicamos ambos miembros de (4) por $\frac{1}{2}$ y obtenemos:

$$2x.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4} \tag{5}$$

Como podemos observar, cada ecuación es equivalente a la anterior, por lo cual, (5) es equivalente a (1). Además, es fácil ver que la solución de (5) es $\frac{1}{4}$, por lo cuál, la solución de (1) también es $\frac{1}{4}$ y escribimos $S = \{\frac{1}{4}\}$. Comprobémoslo:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + 6\right) - \frac{7}{6}.\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} - 3.\frac{1}{4} + 5$$

$$\frac{2}{3}.\frac{25}{4} - \frac{7}{24} = \frac{-\frac{3}{4}}{2} - \frac{3}{4} + 5$$

$$\frac{25}{6} - \frac{7}{24} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{4} + 5$$
$$\frac{93}{24} = \frac{31}{8}$$

Como esta igualdad es válida, hemos verificado que el conjunto solución de (1) es $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

En el ejemplo anterior, podemos ver que el conjunto solución de la ecuación es un conjunto unitario. Como veremos a continuación, al resolver una ecuación lineal con una incógnita, se nos pueden plantear tres situaciones distintas.
Como la forma general de una ecuación de este tipo es $ax + b = 0$, los casos que se pueden presentar son:

- $a \neq 0$. En este caso, el conjunto solución es $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
- $a = 0$ y $b = 0$. En este caso, $S = \mathbb{R}$, pues cualquier número reemplazado por "x" verificará la igualdad.
- $a = 0$ y $b \neq 0$. En este caso podemos observar que al reemplazar cualquier número real por la incógnita, la igualdad no se verificará. Por lo tanto $S = \emptyset$

3.3 Inecuaciones con una incógnita.

A veces en matemáticas, al plantear un problema en lenguaje simbólico, quedan dos magnitudes relacionadas por una desigualdad. Por ejemplo si buscamos un número que sumado al triple de su consecutivo no supere al quíntuple de su anterior, buscamos un número x que verifique la desigualdad

$$x + 3(x + 1) \leqslant 5(x - 1)$$

A este tipo de expresiones se les llama *inecuaciones con una incógnita.*
Resolver una inecuación con una incógnita consiste en encontrar los números reales que verifican la desigualdad considerada. Por ejemplo, en la inecuación recién planteada, los números que verifican dicha desigualdad son todos los números reales mayores o iguales que 8, es decir: $S = [8, \infty)$.
A continuación veremos como resolver algunos tipos de inecuaciones.

3.3.1 Resolución de inecuaciones lineales con una incógnita

Para resolver inecuaciones de este tipo, veremos antes algunas propiedades de las relaciones de desigualdad. Estudiaremos sólo las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$, puesto que las relaciones $<$ y $>$ tienen propiedades similares. Algunas de las propiedades son:

- Si $a \leqslant b$, entonces $a + c \leqslant b + c$.
- Si $a \leqslant b$ y $c > 0$, entonces $a.c \leqslant b.c$.
- Si $a \leqslant b$ y $c < 0$, entonces $a.c \geqslant b.c$.

La primera propiedad, dice que podemos sumar cualquier expresión a ambos miembros de una desigualdad y ésta se mantiene. La segunda y la tercera propiedad, dicen que al multiplicar una desigualdad a ambos miembros por un número real, si este número es positivo, la desigualdad se mantiene, pero si el número es negativo, la misma se invierte.
Veamos cómo aplicar estas propiedades para resolver una inecuación.

Ejemplo. Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$x + 3(x + 1) \leqslant 5(x - 1) \qquad [(1)]$$

Aplicando la propiedad distributiva en ambos miembros de (1), queda:

$$x + 3x + 3 \leqslant 5x - 5 \qquad [(2)]$$

Si ahora sumamos la expresión $-5x - 3$ a ambos miembros de (2), aplicando la primera propiedad nos queda:

$$x + 3x + 3 - 5x - 3 \leqslant 5x - 5 - 5x - 3$$

$$-x \leqslant -8 \qquad [(3)]$$

Por último, si multiplicamos ambos miembros de (3) por -1, por la tercera propiedad quedará:

$$x \geqslant 8 \qquad [(4)]$$

3.3.2 Inecuaciones de segundo grado factorizadas.

Ahora veremos como resolver inecuaciones del tipo $(ax + b).(cx + d) > 0$ o $(ax + b).(cx + d) < 0$. Los casos $(ax + b).(cx + d) \geqslant 0$ y $(ax + b).(cx + d) \leqslant 0$ se resuelven de manera análoga.

(a) Analicemos primero el caso $(ax + b).(cx + d) > 0$.

Esta desigualdad nos está diciendo que el producto de dos magnitudes (a saber, $ax + b$ y $cx + d$) es positivo. Si recordamos la regla de los signos, sabremos que esto ocurre cuando ambas cantidades son positivas, o cuando ambas son negativas, simultáneamente. Traducido al lenguaje simbólico, para que se verifique la primera desigualdad, debe verificarse:

$$(ax + b > 0 \text{ y } cx + d > 0) \text{ o } (ax + b < 0 \text{ y } cx + d < 0)$$

En esta última instancia, todas las desigualdades que aparecen son inecuaciones lineales con una incógnita, por lo cual pueden ser resueltas como vimos en la sección anterior.
Como las inecuaciones que aparecen dentro de los paréntesis deben verificarse simultáneamente, el conjunto de números que verifican ambas inecuaciones, será la intersección entre los conjuntos solución de cada una de esas inecuaciones.
Finalmente, para conocer el conjunto solución de la inecuación original, lo que debemos hacer es unir los conjuntos que resultan de esas intersecciones, puesto que para que un elemento sea solución de esa inecuación, alcanza con que verifique las condiciones que aparecen en uno de los paréntesis.

(b) Analicemos ahora el caso $(ax + b).(cx + d) < 0$.

Lo que esta desigualdad dice es que el producto entre $ax + b$ y $cx + d$ es negativo. Lo cual ocurre cuando ambas magnitudes difieren en el signo. Esto es, para que se verifique la desigualdad, debe verificarse:

$$(ax + b > 0 \text{ y } cx + d < 0) \text{ o } (ax + b < 0 \text{ y } cx + d > 0)$$

De aquí en más, el mecanismo de resolución, es análogo al utilizado en el primer caso.

Ejemplo. Hallar el conjunto solución de la inecuación $(x - 1).(x + 2) > 0$.
Como vimos recién, esto se verifica si, y sólo si:

$x - 1 > 0$ y $x + 2 > 0$, ó si $x - 1 < 0$ y $x + 2 < 0$.

Además esto se verifica si, y sólo si,

$x > 1$ y $x > -2$, ó $x < 1$ y $x < -2$.

El conjunto solución de cada una de estas inecuaciones es, respectivamente, $(1, \infty)$, $(-2, \infty)$, $(-\infty, 1)$ y $(-\infty, -2)$.
Como $(1, \infty) \cap (-2, \infty) = (1, \infty)$ y $(-\infty, 1) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$ entonces, el conjunto solución de la inecuación original, será:

$$S = (-\infty, -2) \cup (1\infty).$$

3.4 Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano xy, de modo que un sistema de dos ecuaciones permite una representación gráfica como dos rectas en el plano xy, siendo la solución del sistema los valores de x e y que verifican las dos ecuaciones; graficamente representa al punto de intersección de estas dos rectas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$

si en estas ecuaciones despejamos y, obtenemos su forma explícita:

$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ Estas dos rectas se cortan en el punto $(2, 3)$

Podemos asegurar que los valores $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ verifican las dos ecuaciones, por lo tanto son solución del sistema dado.

3.4.1 Tipos de solución

Consideremos un sistema como el siguiente:

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

En un sistema de ecuaciones se pueden dar los siguientes casos:

$$\text{Tipos de Sistemas} \begin{cases} \text{Compatibles} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatibles} \end{cases}$$

Sistema compatible

Si admite soluciones.

Sistema compatible determinado

Si admite un número finito de soluciones; en el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, si el sistema es determinado solo tendrá una solución. Su representación gráfica son dos rectas que se cortan en un punto; los valores de x e y de ese punto son la solución al sistema.

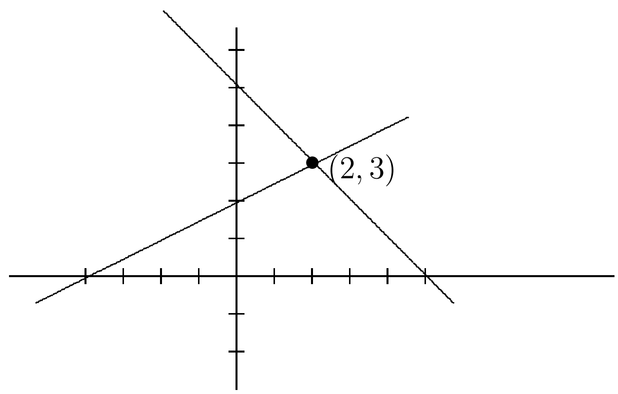
Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es compatible determinado cuando:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

Por ejemplo, dado el sistema:

$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$

Podemos ver, que: $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{2}$
Lo que da lugar a que las dos rectas se corten en un punto.



Sistema compatible indeterminado
El sistema admite un número infinito de soluciones; su representación gráfica son dos rectas coincidentes. Las dos ecuaciones son equivalentes y una de ellas se puede considerar como redundante: cualquier punto de la recta es solución del sistema.
Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es indeterminado si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

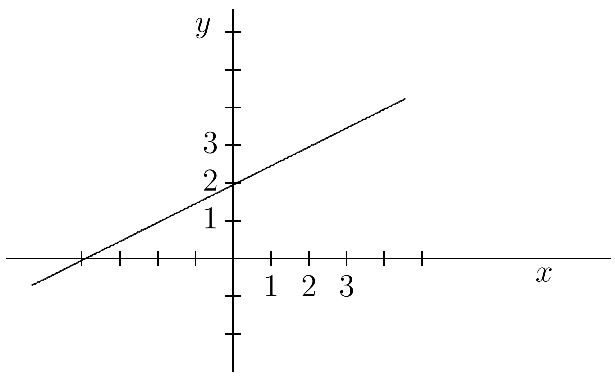
Por ejemplo, con el sistema:
$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$$
Se puede ver, que: $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{4}{12}$
Con lo que podemos decir que la primera ecuación multiplicada por tres da la segunda ecuación, por lo tanto no son dos ecuaciones independientes, sino dos formas de expresar la misma ecuación.
Tomando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, tenemos:

$$-x + 2y = 4 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

Tomando la x como variable independiente, y a y como variable dependiente, según la expresión anterior, asignando valores a x obtendremos el correspondiente de y, cada par (x, y), así calculado será una solución del sistema, pudiendo asignar a x

cualquier valor real.

x	y
-3	$0,5$
-2	1
-1	$1,5$
0	2
1	$2,5$
2	3

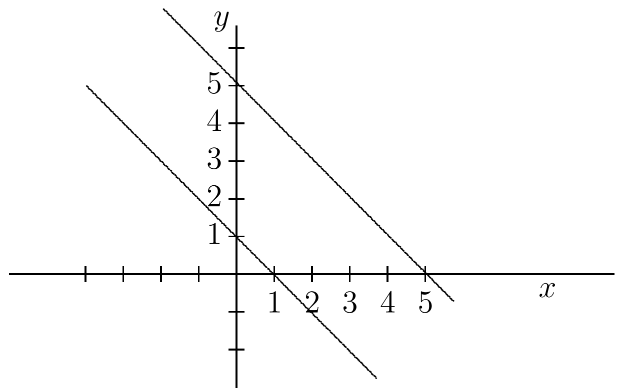


Sistema incompatible

El sistema no admite ninguna solución. En este caso, su representación gráfica son dos rectas paralelas y no tienen ningún punto en común porque no se cortan. El cumplimiento de una de las ecuaciones significa el incumplimiento de la otra y por lo tanto no tienen ninguna solución en común.
Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es incompatible si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

Por ejemplo, dado el sistema:
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
Se puede ver, que: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{5}{1}$
La igualdad: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
Determina la proporcionalidad entre las incógnitas, dos rectas paralelas, pero la diferente proporcionalidad con los términos independientes determina un corte con el eje y, y dos rectas paralelas no se cortan en ningún punto. Dando lugar a la incompatibilidad de las soluciones.



Resumiendo:

$$\text{Tipos de Sistemas}\begin{cases}\textbf{Compatibles}\ \boxed{\text{Tienen solución}} \begin{cases}\textbf{Determinado}\ \boxed{\text{Solución única}}\\ \\ \textbf{Indeterminado}\ \boxed{\text{Infinitas soluciones}}\end{cases}\\ \\ \textbf{Incompatibles}\ \boxed{\text{No tienen solución}}\end{cases}$$

Análisis de tipos de Sistemas

Para poder determinar si, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, corresponde a uno de esos casos, podemos ver, según lo visto anteriormente, el siguiente criterio, partiendo del sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Podemos aplicar el siguiente árbol de decisión, para determinar el tipo de sistema que es:

$$\frac{a}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{e} \begin{cases} \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \begin{cases} \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} \to \mathit{Compatible\ indeterminado} \\ \\ \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \neq \dfrac{c}{f} \to \mathit{Incompatible} \end{cases} \\ \\ \dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e} \to \mathit{Compatible\ determinado} \end{cases}$$

Para ello, comparamos en primer lugar la relación entre los coeficientes de las incógnitas, si la relación entre los coeficientes de x y de y es el mismo, el sistema es compatible indeterminado o incompatible, si este coeficiente también es igual a la relación entre los términos independientes el sistema es compatible indeterminado, y si es distinto en incompatible. Si la relación entre los coeficientes de la x y la y son distintos el sistema es compatible determinado.

3.5 Métodos de resolución.

Partiendo de un sistema lineal compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + b\,y = c \\ d\,x + e\,y = f \end{cases}$$

Si el sistema anterior es compatible y determinado, entonces resolver el sistema consiste en encontrar los valores de x y de y que satisfacen las dos ecuaciones simultáneamente.
Podemos diferenciar dos tipos de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, los básicos, basados en operaciones algebraicas encaminados a despejar el valor de cada una de las incógnitas, y los avanzados, basados en propiedades de los sistemas que determinan los distintos valores de las incógnitas que cumplen las ecuaciones del sistema.
Dentro de los métodos básicos, están el de reducción, igualación y sustitución que mediante distintas operaciones algebraicas despeja el valor de x e y del sistema. Si el sistema fuera incompatible o compatible indeterminado los métodos anteriores no conducen a una solución del sistema.
Entre los métodos avanzados están Regla de Cramer, Eliminaciń de Gauss-Jordan, y mediante la Matriz invertible, entre otros; estos métodos son más sofisticados que los básicos y destinados a la resolución de sistemas de gran dimensión con gran número de ecuaciones que dan lugar, normalmente, al empleo de ordenadores para realizar las operaciones necesarias. Aquí veremos la Regla de Cramer en su forma para tres ecuaciones con tres incógnitas, como complemento a las formas básicas de resolución.

3.5.1 Método de reducción

El método de reducción consiste en:

- Multiplicar cada una de las ecuaciones del sistema por un número no nulo, de forma que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales pero cambiados de signo.

- Conseguido esto, se suman las ecuaciones obtenidas para eliminar esa incógnita, dando lugar a una ecuación con una incógnita, que se resuelve haciendo las operaciones necesarias.

- Conocida una de las incógnitas se sustituye su valor en una de las ecuaciones originales y se calcula la segunda.

Ejemplo.

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2x-y}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y = 10 \\ 2x-y = 6 \end{cases}$$

En este caso la x, no tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones y es necesario hacer alguna operación para lograrlo.

♢ Podemos multiplicar la primera ecuación por (-2):

$$\begin{cases} -2x-6y = -20 \\ 2x-y = 6 \end{cases}$$

♢ Se suman las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{array}{r} -2x-6y = -20 \\ 2x-\ \ y = \ \ \ 6 \\ \hline 0x-7\,y = -14 \end{array}$$

♢ Se resuelve la ecuación que quedó:

$-7y = -14$ entonces $y = \dfrac{-14}{-7}$ entonces $y = 2$

♢ Se sustituye el valor de y en alguna de las ecuaciones originales y se despeja la otra incógnita:

$-2x - 6.2 = -20$ entonces $-2x - 12 = -20$ entonces $-2x = -8$ entonces $x = 4$

El conjunto solución del sistema es: $S = \{(4,2)\}$

3.5.2 Método de sustitución

El método de sustitución consiste en:

- despejar una de las incógnitas en alguna de las ecuaciones y
- sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Ejemplo.
volvamos a tomar el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x+3y = 10 \\ 2x-y = 6 \end{cases}$$

$\diamondsuit$ se despeja x en la primera ecuación: $x = 10 - 3y$

$\diamondsuit$ En la otra ecuación se sustituye x: $2(10 - 3y) - y = 6$

$20 - 6y - y = 6$ entonces $20 - 7y = 6$

$\diamondsuit$ Se resuelve esta ecuación que tiene una sola incógnita: $-7y = 6 - 20$

$$y = \frac{-14}{-7} \quad \text{entonces} \quad y = 2$$

$\diamondsuit$ Se sustituye en la expresión la otra incógnita:

$x = 10 - 3.2$ entonces $x = 10 - 6$ entonces $x = 4$

El conjunto solución del sistema es: $S = \{(4, 2)\}$

3.5.3 Método de igualación

El método de igualación consiste en:

- Despejar la incógnita x (o y) en cada ecuación.
- igualar las expresiones obtenidas y resolver la ecuación con incógnita y (o x) que se forma.
- Reemplazar en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el primer paso, el valor de la incógnita y recién determinada, y así se calcula el valor de la otra incógnita.

Ejemplo Consideremos el ejemplo anterior:
$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$\diamondsuit$ Se despeja la misma incógnita en cada ecuación.
$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3} \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

$\diamondsuit$ Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación con una incógnita que se formó.

$$-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} = 2x - 6$$

$$\frac{10}{3} + 6 = 2x + \frac{1}{3}x$$

$$\frac{3}{7}.\frac{28}{3} = x$$

$$x = \frac{3}{7}.\frac{28}{3}$$

$$\boxed{x = 4}$$

◇ Se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el primer paso, el valor de la incógnita que se ha determinado, y así se calcula el valor de la otra incógnita.

En $y = 2x - 6$ reemplazamos x por el valor obtenido y resulta:

$$y = 2.4 - 6$$
$$\boxed{y = 2}$$

La solución del sistema es el par ordenado $(4, 2)$.

Siempre resulta conveniente verificar si la solución hallada satisface las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} 4 + 3.2 = 10 \\ 2.4 - 2 = 6 \end{cases}$$

3.5.4 Método de determinantes o Regla de Cramer

La regla de Cramer da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704 - 1752).

Determinante de una matriz.

• Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

el valor del determinante de A es el valor $a.d - c.b$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - c.b$$

• Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ & \searrow & & & \\ d & & e & & f \\ & \searrow & & \searrow & \\ g & & h & & i \\ & \searrow & & \searrow & \\ a & & b & & c \\ & & & \searrow & \\ d & & e & & f \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ & & & \swarrow & \\ d & & e & & f \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ g & & h & & i \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ a & & b & & c \\ & \swarrow & & & \\ d & & e & & f \end{array}\right|$$

$$det(B) = (a.e.i + d.h.c + g.b.f) - (c.e.g + f.h.a + i.b.d)$$

Ejemplo. Hallar el determinante de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) B$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) $det(A) = 3.1 - (1.(-2)) = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

(b) $det(B) = [3.3.(-1) + 5.1.(-1) + 2.4.1] - [(-1).3.1 + 4.1.3 + 5.2.(-1)]$

$$= (-9 - 5 + 8) - (-3 + 12 - 10) = -6 - (-1) = -5$$

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Cuando tengamos un sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, podemos aplicar la regla de Cramer, ésta consiste en:

Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{lcll} ax & + & by & = c \\ dx & + & ey & = f \end{array} \right.$

- Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema: $|A|$.
  ($|A| \neq 0$).
- Para encontrar x se calcula el determinante de la matriz A_x, matriz que resulta de reemplazar la columna de las x por la columna de los términos independientes: $|A_x|$
- Se realiza el cociente $\dfrac{|A_x|}{|A|}$.
- $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$.
- Para encontrar y se calcula el determinante de la matriz A_y, matriz que resulta de reemplazar la columna de las y por la columna de los términos independientes: $|A_y|$
- Se realiza el cociente $\dfrac{|A_y|}{|A|}$.
- $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$.
- Análogo para la incógnita z.

Ejemplo.
volvamos al ejemplo anterior:
$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 2.3 = -1 - 6 = -7$$
$$|A| = -7$$
- $|A_x| = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 10.(-1) - 6.3 = -10 - 18 = -28$

$$|A_x| = -28$$
Por lo tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-28}{-7} = 4$
$$\boxed{x = 4}$$

- $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.10 = 6 - 20 = -14$

$$|A_y| = -6$$

Por lo tanto: $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-14}{-7} = 2$

$$\boxed{y = 2}$$

$$S = \{(4, 2)\}$$

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Veremos ahora como resolver un sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, utilizando el método de Cramer.
Seguiremos los mismos pasos anteriores, esto es:
Dado el sistema $\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = j \\ dx & + & ey & + & fz & = k \\ gx & + & hy & + & iz & = l \end{cases}$

- Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema: $|A|$.
  $(|A| \neq 0)$.
- Para encontrar x se calcula el determinante de la matriz A_x, matriz que resulta de reemplazar la columna de las x por la columna de los términos independientes: $|A_x|$
- Se realiza el cociente $\dfrac{|A_x|}{|A|}$.
- $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$.
- Para encontrar y se calcula el determinante de la matriz A_y, matriz que resulta de reemplazar la columna de las y por la columna de los términos independientes: $|A_y|$
- Se realiza el cociente $\dfrac{|A_y|}{|A|}$.
- $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$.

- Análogo para la incógnita z.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [3.3.(-1) + 5.1.(-1) + 1.2.4] - [(-1).3.1 + 4.1.3 + (-1).2.5]$$

$$[-9 - 5 + 8] - [(-3) + 12 + (-10)] = -6 - (-1) = -5$$

$$|A| = -5$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [(-1).1.(-1) + 1.2.(-1) + 1.2.4] - [-1.3.1 + 4.1.(-1) + (-1).2.2]$$

$$(3 - 2 + 8) - (-3 - 4 - 4) = 9 - (-11) = 20$$

$$|A_x| = 20$$

Por lo tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{20}{-5} = -4$

$$\boxed{x = -4}$$

- $|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= [3.2.(-1) + 1.5.(-1) + (-1).1.4] - [(-1).2.1 + 4.1.3 + (-1).(-1).5]$

$$= (-6 - 5 - 4) - (-2 + 12 + 5) = -15 - 15 = -30$$

$$|A_y| = -30$$

Por lo tanto: $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-30}{-5} = 6$

$$\boxed{y = 6}$$

- $|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [3.3.1 + 1.5.(-1) + 2.2.1] - [-1.3.1 + 2.1.3 + 1.2.5]$

$$= (9 - 5 + 4) - (-3 + 6 + 10) = 8 - (13) = -5$$

$$|A_z| = -5$$

Por lo tanto: $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{-5}{-5} = 1$

$$\boxed{z = 1}$$

$$S = \{(-4, 6, 1)\}$$

3.6 Ecuación de segundo grado

¿Cual es el número natural cuyo cuadrado menos su duplo es igual a 15?
Si llamamos al número natural n, esta situación escrita en lenguaje algebraico, nos queda:

$$n^2 - 2n = 15$$

$$n^2 - 2n - 15 = 0$$

La ecuación que modela el problema anterior se llama ecuación de segundo grado con una incógnita o ecuación cuadrática ya que el mayor exponente al que está elevada la incógnita es igual a 2.
Una ecuación de segundo grado con una incógnita, una vez simplificada y ordenada tiene como expresión canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

La ecuación cuadrática es de gran importancia en diversos campos, ya que junto con las ecuaciones lineales, permiten modelar un gran número de relaciones y leyes.

3.6.1 Clasificación

Para que $ax^2 + bx + c = 0$ sea una ecuación de segundo grado, debe suceder que $a \neq 0$. Puede faltar el término lineal, o el término independiente. Esto da lugar a ecuaciones incompletas.
La ecuación de segundo grado se clasifica de la siguiente manera:

- Completa.

  Tiene la forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$, donde los tres coeficientes a, b y c son distintos de cero.

- Incompleta: cuando alguno de los coeficientes b, c, o ambos son iguales cero.

3.7 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita, es encontrar los valores de x que verifiquen la igualdad (1). Las soluciones de la ecuación general se obtienen aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

El doble signo que aparece en la fórmula proporciona los dos valores x_1 y x_2 que son las soluciones la ecuación (1).
La fórmula (2) se llama fórmula de Bhaskara, matemático y astrónomo hindú que vivió entre 1114-1185. Fue el último de los matemáticos clásicos de la India. Descubrió el doble signo de los radicales cuadráticos y el carácter anormal de los mismos cuando el subradical es negativo.
La expresión subradical $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* y y lo simbolizamos con Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Las soluciones x_1 y x_2 se llaman también raíces de la ecuación cuadrática.
Volviendo al problema, la ecuación es:

$$n^2 - 2n - 15 = 0$$

Donde $a = 1$, $b = -2$ y $c = -15$. Aplicando la fórmula encontramos las soluciones:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-15)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4.15}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 8}{2} \qquad x_2 = \frac{2 - 8}{2}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -3$$

3.7.1 Soluciones de una ecuación cuadrática completa

Al observar el discriminante (la expresión dentro de la raíz cuadrada), es posible determinar el tipo de soluciones que tiene la ecuación cuadrática del tipo (1).

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces (soluciones) reales y distintas.

  Ejemplo. Encuentre las soluciones de la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$

  $b^2 - 4ac = 49 - 4.1.12 = 1 > 0$

  $$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-7\pm 1}{2}$$

  Entonces las soluciones: $x_1 = -3 \qquad x_2 = -4$

- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces (soluciones) reales y coincidentes.

  Ejemplo. Resuelva la ecuación $3x^2 - 6x + 3 = 0$

  $b^2 - 4ac = 36 - 4.3.3 = 0$

  $$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6\pm\sqrt{36 - 36}}{6}$$

  Entonces las soluciones: $x_1 = x_2 = 1$

- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene dos raíces (soluciones) complejas conjungadas.

  Ejemplo. Resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$

  $b^2 - 4ac = 16 - 4.1.13 = 16 - 52 = -36 < 0$

  $$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4\pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{36}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{4\pm 6i}{2}$$

  Entonces las soluciones: $x_1 = 2 + 3i \quad y \quad x_2 = 2 - 3i$

3.7.2 Soluciones de una ecuación cuadrática incompleta

Veamos como hallar las soluciones en cada uno de los casos.

♢ $b = 0$

Esto es, la ecuación es de la forma: $ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$ y $c \neq 0$. Se resuelve despejando x:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \text{entonces} \quad |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

Como solución posee dos raíces reales que difieren en el signo si los valores de a y c tienen signo contrario o bien dos números imaginarios que difieren en el signo si los valores de a y c tienen el mismo signo.

Por ejemplo:

$$4x^2 - 16 = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{16}{4} \longrightarrow |x| = \sqrt{4} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

♢ $c = 0$

Se debe resolver una ecuación es de la forma: $ax^2 + bx = 0$. Para esto se saca factor común x:

$$x.(ax + b) = 0$$

Teniendo en cuenta que el producto de dos o mas factores es cero, cuando al menos uno de ellos es cero, resulta:

$$x.(ax + b) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$5x^2 + 2x = 0 \longrightarrow x(5x + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ 5x + 2 = 0 \longrightarrow x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

♢ $b = c = 0$

La ecuación es de la forma: $ax^2 = 0$.

Para este caso resulta las soluciones son: $x_1 = x_2 = 0$

3.8 Resolución de ecuaciones de segundo grado factorizadas

En este caso la ecuación de segundo grado aparece descompuesta en factores e igualada a cero.

Por ejemplo:

$$2(x-1)(x+2)=0$$

Esta igualdad se verifica unicamente si alguno de los paréntesis es cero.

$$2(x-1)(x+2)=0 \qquad si \qquad \begin{cases} x-1=0 \longrightarrow x=1 \\ \\ o \\ \\ x+2=0 \longrightarrow x=-2 \end{cases}$$

Para este caso resulta que las soluciones o raíces de la ecuación son:
$x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.
Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, entonces:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Ejemplo. Encuentre una ecuación cuadrátrica cuyas raíces son 2 y -1.

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

$$a(x-2)(x+1)=0$$

Para $a=3$

$$3(x-2)(x+1)=0$$

$$3(x^2+x-2x-2)=0$$

$$3x^2-3x-6=0$$

Esta es una de las ecuaciones cuyas raíces son las dadas, cambiando el valor de a encontramos otras ecuaciones.

3.9 Propiedades de las raíces de una ecuaciones de segundo grado

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, entonces

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Con estas igualdades podemos reconstruir una ecuación de segundo grado utilizando la forma reducida de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ejemplo. Calcula el valor de dos números, sabiendo que su suma es 7 y su producto es -18.
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -18$
reemplazando en $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ resulta:

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

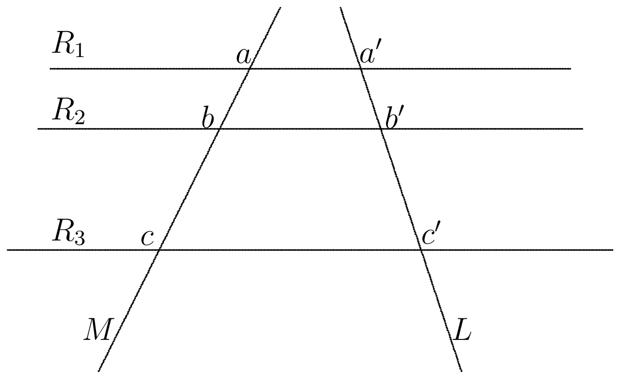
Utilizando la fórmula resolvente:

$$x_1 = 9 \qquad x_2 = -2$$

3.10 Teorema de Thales

La mayor parte de los conceptos geométricos que se estudian en el colegio fueron estudiados por antiguos matemáticos griegos que vivieron alrededor del siglo VI A.C. Thales de Mileto es considerado el primer matemático, y el filósofo de la historia de la filosofía occidental, y fue el fundador de la escuela jónica de filosofía, según el testimonio de Aristóteles. Fue el primero y más famoso de los Sabios de Grecia, y habría tenido como discípulo y protegido a Pitágoras. Fue además uno de los más grandes matemáticos de su época, centrándose sus principales aportes en los fundamentos de la geometría.

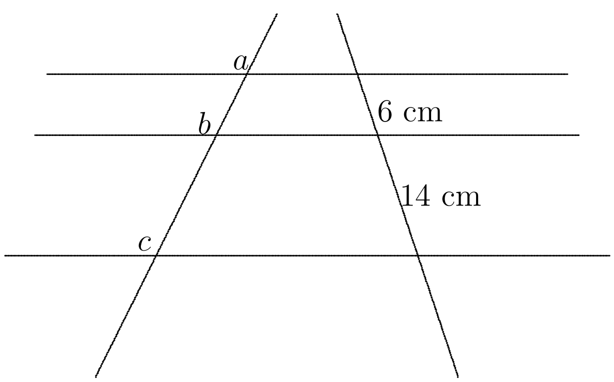
Teorema 3.1 *Si dos rectas cualesquieras se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.*



$R_1//R_2//R_3$
MyL rectas transversales
El teorema asegura:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{b'c'}}$$

Ejemplo. Encuentre el valor de x en la siguiente figura.



$$x = \overline{ab}$$

$$\overline{ab} + \overline{bc} = 40cm$$

De acuerdo al teorema de Thales nos conviene plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{40}{x} = \frac{6+14}{6}$$

Luego:

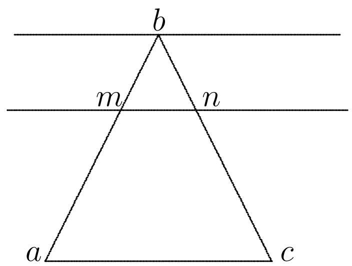
$$\frac{40}{x} = \frac{20}{6}$$

$$x = \frac{40.6}{20}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x = 12}$$

Proposición 3.1 *Toda paralela a un lado de un triángulo que corte a los otros dos lados, determina sobre estos, segmentos proporcionales.*

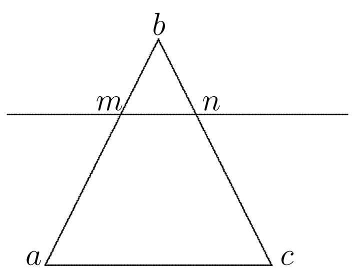


La propiedad asegura:

$$\frac{\overline{bm}}{\overline{ma}} = \frac{\overline{bn}}{\overline{nc}}$$

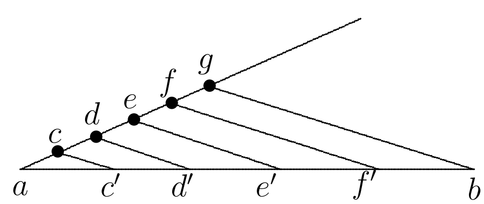
Proposición 3.2 *Si en el triángulo abc se traza una recta paralela a $\overline{ac}$, entonces se verifica*

$$\frac{\overline{bm}}{\overline{ba}} = \frac{\overline{bn}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{mn}}{\overline{ac}}$$



3.10.1 División de un segmento

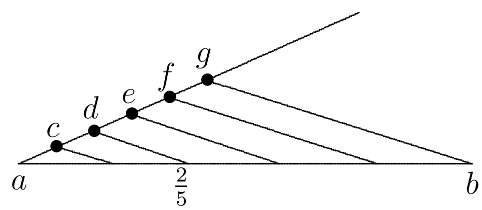
Supongamos que tenemos un segmento $\overline{ab}$ de longitud arbitraria, y queremos dividirlo en cinco partes iguales.



1. Se traza el segmento $\overline{ab}$.
2. Se traza una semirrecta con origen en uno de los extremos del segmento.

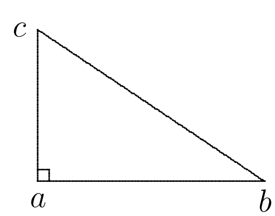
3. Sobre la semirrecta, se construyen 5 segmentos congruentes: $\overline{ac} = \overline{cd} = \overline{de} = \overline{ef} = \overline{fg}$.
4. Se une el punto g al punto b.
5. Se trazan los segmentos paralelos a $\overline{gb}$ por los puntos f, e, d y c. Estos segmentos cortan al segmento $\overline{ab}$ en los puntos f', e', d', c' respectivamente.
6. El segmento $\overline{ab}$ queda dividido en cinco partes congruentes.

Ejemplo. Dado un segmento arbitrario $\overline{ab}$, encuentre el punto que represente a $\frac{2}{5}$ de $\overline{ab}$.



3.11 Teorema de Pitágoras

Un matemático Griego llamado Pitágoras estudió los triángulos rectángulos, y las relaciones entre sus lados. Recordemos que en un triángulo rectángulo a los lados que forman el ángulo recto se les llama *catetos*, y al opuesto al ángulo recto *hipotenusa*. Pitágoras descubrió y probó una propiedad interesante de los triángulos rectángulos: *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

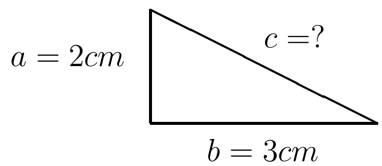


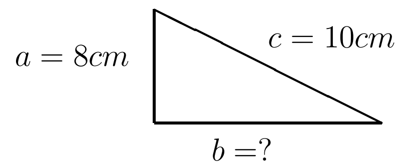
Esta relación está representada por la fórmula:

$$\overline{bc}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ab}^2$$

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

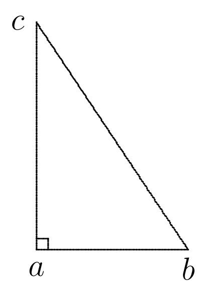
Ejemplo. Para los siguientes triángulo rectángulo, calcule el lado desconocido.





El Teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones en la ciencia, el arte, la ingeniería y la arquitectura.

Ejemplo. Una escalera de 2,5m está apoyada sobre una pared a 1,8m del piso. ¿que distancia hay entre la pared y el pie de la escalera?



$\overline{bc} = 2,5m$
$\overline{ac} = 1,8m$

Por el teorema de Pitágoras sabemos que : $\overline{bc}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ab}^2$

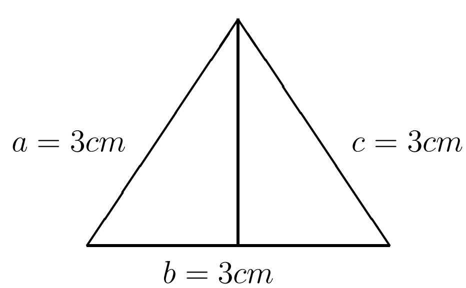
$$2,5^2 = 1,8^2 + \overline{ab}^2$$

$$\overline{ab} = \sqrt{6,25 - 3,24}$$

$$\overline{ab} = \sqrt{3,01}$$
$$\overline{ab} = 1,7349m$$

Rta. El pie de la escalera está hubicada a 3,08 m de la pared.

Ejercicio. Para el siguiente triángulo equilátero, halle el valor de x, el perímetro y el área.



Rta: $P = 9cm, A = 3,9cm^2$

.

4 Ejercitación básica

4.1 Práctica 2: Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 29 *Indique cuál es el valor de la incógnita en cada ecuación.*

1) $7 - x : [3 - 1 \cdot (-2)] - (-8) = 9$

a) 2 b) -2 c) 30 d) 10 e) -15

2) $3 \cdot (2 - 2\,x) - (2\,x + 4) \cdot (-2) = 32$

a) 16 b) -9 c) 20 d) -15 e) 15

Ejercicio 30 *Resuelva.*

a) $4\,x + \dfrac{1}{2}\,x = 27$ Rta: 6

b) $2 \cdot (3x - 2) - (x + 3) = 8$ Rta: 3

c) $(x + 5) \cdot (x - 3) + 7 = x^2 + 8\,x + 4$ Rta: -2

d) $x - \dfrac{\frac{3}{2} - x}{x} = x - 8$ Rta: $\dfrac{1}{6}$

Ejercicio 31 *Resuelva cada una de las ecuaciones y una con la respuesta que corresponda.*

a) $\dfrac{2\,x + 1}{3} = \dfrac{3 - x}{2}$ $x = \dfrac{3}{5}$

b) $\dfrac{3}{2} \cdot \left(2\,x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{3}{4}$ $x = 18$

c) $\dfrac{3}{4}\,x + \dfrac{5}{2} = \left(\dfrac{2}{3}\,x - 4\right) : \dfrac{1}{2}$ $x = 0$

d) $\dfrac{2 - 6\,x}{4} = \dfrac{1 + x}{2}$ $x = 1$

Ejercicio 32 *Escriba en forma simbólica.*

Un número cualquiera:

El siguiente de dicho número:

El siguiente del doble de dicho número:

El anterior a dicho número:

La mitad del número anterior a dicho número:

El cuadrado de dicho número:

El cuadrado del número anterior a dicho número más el quíntuple del siguiente:

Ejercicio 33 *Traduzca al lenguaje simbólico y resuelva.*

1. Un padre tiene 60 años, y su hijo 35. ¿Cuánto tiempo hace que la edad del padre era el doble de la del hijo? $x = 10$

2. Cierta vez le preguntaron la edad a Juan que es muy misterioso, y él respondió: "Tomen tres veces los años que tendré dentro de tres años, réstenle tres veces los años que tenía hace tres años y obtendrán exactamente los años que tengo ahora". ¿Qué edad tiene Juan? $x = 18$

3. El perímetro de un rectángulo es 168 m. Sabemos que la base es 4 m mayor que la altura ¿Cuánto miden la base y la altura? $h = 40, b = 44$

4. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito. $x = 4800\ l$

5. Dos números pares consecutivos suman 474. ¿Cuáles son los dos números? $x = 236, y = 238$

6. Un hombre lleva en hombros a un niño que pesa la mitad que él. El niño, a su vez, carga a un chiquillo que pesa la mitad que él. El chiquillo, a su vez, carga a un bebé que pesa la mitad que él. Con toda esa carga el hombre se pesa en una balanza, y ésta marca 120 kilos. ¿Cuánto pesa el hombre solo? $x = 64\ kg$

7. Tres amigos participan en la compra de un billete de lotería que resulta premiado con \$10000. Calcule cuanto le corresponde a cada uno sabiendo que el primero participa con el doble que el segundo y éste con el triple que el tercero.

8. La suma de dos múltiplos consecutivos de 6 es igual a 66. Calcule esos números. $x = 30, y = 36$

9. Una dactilógrafa tiene que hacer un trabajo en varios días. El primer día escribe la mitad, el segundo día escribe un tercio de lo que le queda, el tercer día escribe un cuarto de lo restante y el cuarto día termina el trabajo, para lo cual tiene que escribir 15 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el trabajo? $x = 60$

10. Halle el número cuyo quíntuplo disminuido en 17, sea igual a su triplo aumentado en 41. $x = 29$

Ejercicio 34 *Compruebe que cualquiera sea el número x que se elija. el resultado siempre será $x - 8$.*

- Dado un número:
- Agregue 3:
- Multiplique por 3 el resultado:
- A lo que queda, reste 9:
- Divida por 3
- Reste 8

Ejercicio 35 *Busca tres números consecutivos de modo que el primero más 10 veces el segundo más 100 veces el tercero, sea igual a:*

a) 987 b) 99

Ejercicio 36 *Represente en la recta numérica, y si es posible, escríbalos como intervalo, a todos los números que cumplan:*

e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} : -\dfrac{1}{3} - x^3 > \dfrac{80}{3}\right\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 5\}$

Ejercicio 37 *Resuelva las siguientes inecuaciones lineales con una incógnita.*

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}x \geqslant -1 + \dfrac{3}{2}x$ Rta: $x \leqslant 2$

b) $\dfrac{x+2}{3} < \dfrac{3-x}{2}$ Rta: $x < 1$

c) $\dfrac{5}{2} + x > \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\,x - 3\right)$ Rta: $x > -7$

Ejercicio 38 *Halle los valores de x que satisfacen:*

i) $-2 \leqslant 3\,x + 4$ y $2\,x + 4 < 7$

ii) $3\,x + 5 < 0$ y $6 < \dfrac{x}{2} - 4\,x$

Ejercicio 39 *Escriba como intervalo la solución de las siguientes inecuaciones.*

a) $-\dfrac{1}{2} < 1 - x < \dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{1}{x} + 2 \leq 0$ c) $-2 \leqslant 4\,x < 0$ d) $(1-x)\cdot(2+x) \geqslant 0$

e) $(x-1)\cdot(x-9) \leqslant 0$ f) $(4-x)\cdot(x+5) > 0$ g) $(3-x)\cdot(2+x) \leqslant 0$

h) $-\dfrac{x}{4} - 4 \geqslant \dfrac{5}{3}\,x - \dfrac{1}{6}$ i) $3,25\,x - 5,007 - x < \dfrac{0,173 - 0,34\,x}{2}$

Ejercicio 40 *El promedio de las calificaciones de Diana y Susana es 7,50. Si la calificación de Susana es la cuarta parte de la de Diana más 5. ¿Qué calificación tiene cada una?* *Rta: $x = 7, y = 8$*

Ejercicio 41 *Dos ángulos suplementarios son tales que la medida de uno de ellos tiene 12° más que el doble de la medida del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?*

Ejercicio 42 *Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500 . Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiramos pagado 3170 . ¿Cul es el precio de cada artículo?*

Ejercicio 43 *Un niño quiere comprar una pelota, pero le faltan \$3. Si la pelota costara la mitad, le sobrarían \$2. ¿ Cuánto cuesta la pelota?, y ¿cuánto dinero tiene el niño?*

Ejercicio 44 *Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Tiene un total de 50 habitaciones y de 87 camas ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?*

Ejercicio 45 *Para realizar un viaje de estudio se contrató un micro para 40 alumnos por \$168. El grupo acordó que las mujeres debían pagar \$3 cada una y los varones \$2 más que las mujeres. ¿Cuántos varones y cuántas mujeres viajan en el micro?*

Ejercicio 46 *En un campeonato de fútbol, la cantidad de partidos empatados por el equipo A fue la tercera parte de la cantidad de partidos ganados, menos* 4. *Si además la suma de los puntos obtenidos en el campeonato fue* 36. *¿Cuántos partidos ganó y cuántos empató?*
(Nota: Por cada partido ganado corresponden 3 *puntos, por cada partido empatado corresponde* 1 *punto y por cada partido perdido corresponde* 0 *puntos).*

Rta:$x = 12, y = 0$

Ejercicio 47 *En una juguetería donde se venden bicicletas y triciclos. Juan Pablo dijo que hay 60 ruedas. Javier agregó que hay 5 bicicletas más que triciclos. ¿Cuántos hay de cada uno?* *Rta:*$b = 15, t = 10$

Ejercicio 48 *Un padre, para estimular a su hijo que estudie Matemática, promete darle* $\$\,3$ *por cada ejercicio bien resuelto, pero, por cada uno que esté mal, el hijo le dará* $\$\,2$. *Ya van por el ejercicio 26 y el muchacho recibe de su padre* $\$\,38$. *¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuántos mal?* *Rta:* $x = 13, y = 13$

Ejercicio 49 *Dos números suman 44. Si el mayor lo dividimos entre 3 y el segundo entre 4, los nuevos números obtenidos se diferencian en 3 unidades. Halle dichos números.* *Rta:* $x = 24, y = 20$

Ejercicio 50 *En un rombo, una diagonal es el triplo de la otra, y la suma de sus medidas es igual a 30 cm. Indique cuál es el área del rombo.* *Rta* $: 84,375cm^2$

Ejercicio 51 *La suma de las dos cifras de un número es 8 y, si se cambia el orden de sus cifras, se obtiene otro número que vale 17 unidades menos que el doble del número de partida. ¿Cuál es el número?*

Ejercicio 52 *Descomponga el número 500 en dos partes, de modo que al dividir la mayor en la menor se obtenga como cociente* 7 *y como resto* 20. *¿Cómo lo descompone?*

Ejercicio 53 *Halle el o los valor/es de* a *para que el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:*

a) tenga infinitas soluciones.

b) no tenga solución.

$$(I)\left\{\begin{array}{rcl} 3\,y & = & 2\,x+5 \\ -\dfrac{2}{3}\,x & = & 2\,a-y \end{array}\right. \qquad (II)\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ 2\,y & = & 3-2\,x \end{array}\right.$$

Ejercicio 54 *De opciones para el valor a de manera que el siguiente sistema de ecuaciones lineales resulte compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, si es posible.*

$$\begin{cases} \frac{a}{2}x + y & = & 1 \\ 2x + a\,y & = & 2 \end{cases}$$

Ejercicio 55 *Asfaltar una calle costó \$ 3300. Los vecinos pagaron el doble de lo que aportó la municipalidad, mientras que la Provincia contribuyó con las dos terceras partes del aporte municipal. ¿Cuánto dinero pusieron los vecinos? Rta:* 1800

Ejercicio 56 *El perímetro de un triángulo es 97 cm. Si el lado más corto es 13 cm menor que el más largo y la longitud del tercer lado es una vez y media la longitud del menor. ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo?*

Ejercicio 57 *En una encuesta para un programa juvenil se entrevistaron 42 jóvenes de 18, 19 y 20 años. El promedio de las edades de todos ellos es 18,5 y se sabe que la cantidad de personas de 18 años supera en 6 a la cantidad de personas de 19 y 20 años que hay en total. ¿Cuántas personas de cada edad fueron encuestados?*

Rta: $x = 24, y = 15, z = 3$

Ejercicio 58 *Alberto tiene cuatro veces la edad de su hija Mariana y hace cinco años su edad era cinco veces la edad de su hija. Calcular las edades de ambos.*

Ejercicio 59 *La edad de Mariano es la tercera parte de la de Hugo y dentro de 15 años la edad de Hugo ser el doble de la de Mariano , disminuida en tres años. Calcular la edad de Mariano y la edad de Hugo.*

Ejercicio 60 *Calcule tres números, sabiendo que:*

a) La suma entre ellos es 176. El primero es la cuarta parte del tercero y este supera al segundo en 40 unidades. Rta: $x = 24, y = 56, z = 96$

b) La diferencia entre el primero y la suma de los otros dos es -175. El segundo es el triple del primero y el tercero es 40 unidades mayor que el segundo.

Rta: $x = 27, y = 81, z = 121$

Ejercicio 61 *María, Clara y Julia hicieron 990 bolsitas que les fueron encargadas. María logró hacer 110 bolsitas en una hora, Clara hizo a razón de 140 bolsitas por hora y Julia sólo pudo hacer 100 en una hora. Entre las tres, trabajaron 8 horas y media. Si Julia trabajó* $3\frac{1}{2}$ *horas ¿Cuánto tiempo trabajaron María y Clara?*

Ejercicio 62 *Cuando tres impresoras, A,B y C operan a un mismo tiempo, imprimen 4250 páginas por hora. Cuando sólo se encuentran activas A y B imprimen 2900 páginas por hora. En cambio, cuando sólo las impresoras B y C están en operación, imprimen 3050 páginas por hora. ¿Cuántas páginas puede imprimir cada impresora en una hora?*

Ejercicio 63 *En una fábrica hay tres máquinas, A,B y C. Cuando las tres están trabajando, producen 222 trajes por día. Si A y B trabajan pero C no, producen 159 trajes por día. Si B y C trabajan pero A no, producen 147 trajes por día. ¿Cuál es la producción diaria de cada máquina?*

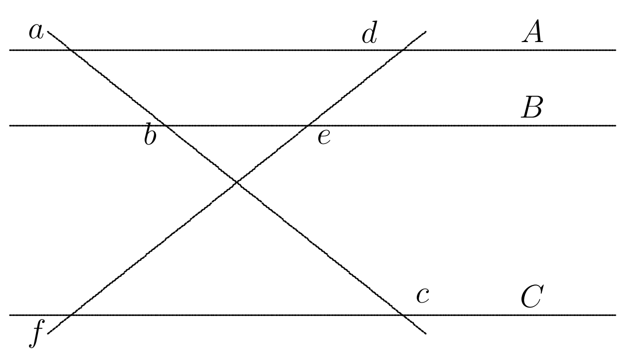
Ejercicio 64 *Marcelo tiene dos hijas, Rocío y Lucía. Rocío le lleva un año a Lucía. Cuando Rocío nació, su padre tenía 22 años. Un día, Marcelo las reunió y les dijo: "Ninguna de las dos podrá casarse mientras la suma de sus edades no supere la mía". ¿A partir de qué edad podrá casarse Rocío? ¿Y Lucía?*

Rta: Lucia después de 11 años,Rocio después de 12 años

Ejercicio 65 *En una camioneta se cargan tres cajas de igual peso y otro bulto de 40 kg. Indique entre qué valores puede oscilar el peso de cada caja sabiendo que la carga máxima de camioneta no supera los 190 kg.*

Ejercicio 66 *Con los siguientes datos, calcule:*

(a)



Datos

$\overline{ab} = 4\,cm$

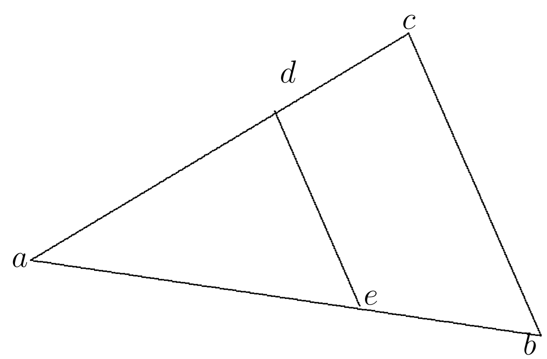
$\overline{bc} = 6\,cm$

$\overline{de} = 5\,cm$

$\overline{ef} = x$

Calcule cuál debe ser la longitud de x para que resulte $A//B//C$

(b)



Datos

$\overline{de}//\overline{cb}$

$\overline{ad} = 3\,x + 2$

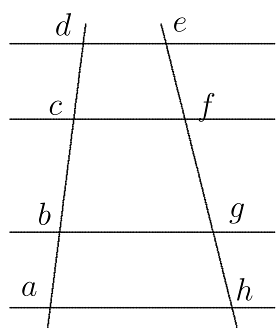
$\overline{ae} = 16\,cm$

$\overline{dc} = 2\,x + 1$

$\overline{eb} = 10\,cm$

Calcule el valor de x, $\overline{ad}$ y $\overline{dc}$

(c)



Datos

$\overline{ab} = 12\,cm$

$\overline{bc} = 18\,cm$

$\overline{cd} = 14\,cm$

$\overline{ef} = x + 3$

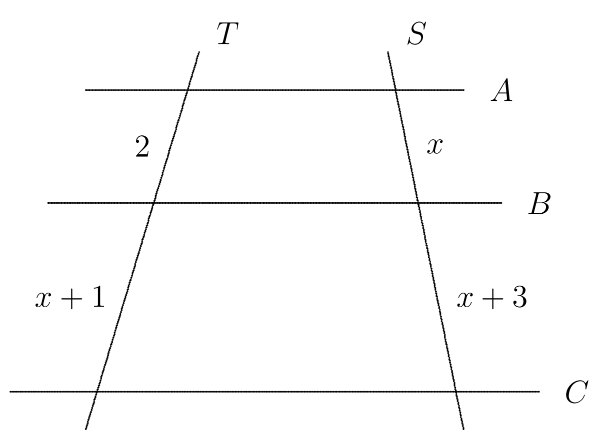
$\overline{fg} = x + 5$

$\overline{gh} = x + 2$

De acuerdo a los datos ¿son paralelas A, B, C y D?

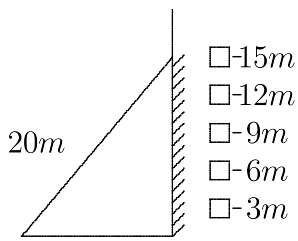
Si no lo son, corrija uno de los datos para que resulte $A//B//C//D$

(d) Encuentre el valor de x, sabiendo que las rectas A, B y C son paralelas.

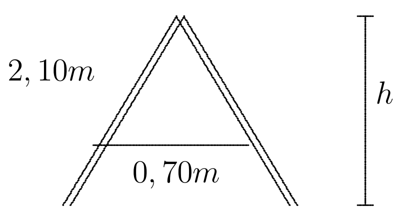


Ejercicio 67 *Un cuadrado tiene 3m de lado. Calcule su diagonal.*

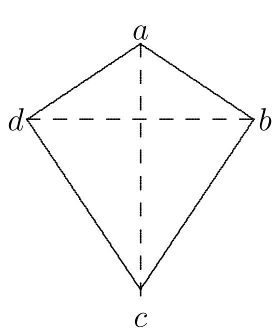
Ejercicio 68 *¿Cuánto debe quedar separada de la pared una escalera de 20m de longitud para que llegue justo al centro de la ventana del quinto piso?*



Ejercicio 69 *La escalera doble de la figura está hecha uniendo dos escaleras de 2,10 m de largo y unidas con una soga de 70 cm, atada en dos escalones que se encuentran a* $\frac{2}{3}$ *de la parte superior y* $\frac{1}{3}$ *de la inferior. Calcule la altura de la escalera.*

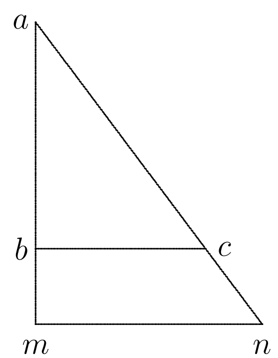


Ejercicio 70 *Encuentre la medida de la diagonal mayor del romboide:*



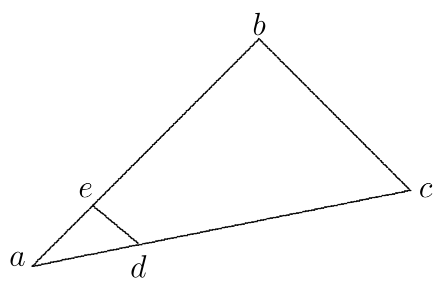
Datos:
El ángulo $\widehat{b}$ es recto
$\overline{ab} = 3\,cm$
$\overline{bc} = 5\,cm$

Ejercicio 71 *Halle el perímetro del triángulo amn, justifique su respuesta.*



$\overline{mn} = 20cm$
$\overline{nc} = 13cm$
$\overline{ab} = 36cm$
$\overline{bc} = 15cm$
$\hat{\mathrm{m}} = 90°$

Ejercicio 72 *Halle el perímetro del trapecio ebcd, justifique su respuesta.*



$\overline{ad} = 10cm$
$\overline{ed} = 6cm$
$\overline{eb} = 17cm$
$\overline{bc} = 18,75cm$
$\hat{\mathrm{e}} = 90°$

Ejercicio 73 *Resuelva en $\mathbb{R}$ las ecuaciones siguientes, represente en la recta numérica los elementos del conjunto solución de cada una de ellas e indique a qué conjunto numérico pertenece:*

a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8} = 1,125 + \frac{1}{2}x$

b) $x^2 - \frac{1}{5} = 2\,x \cdot (x - 0,3)$

c) $48 - 3x^2 = 0$

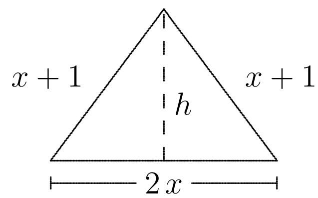
d) $-(x^2 - 19\,x + 2) - 2\,(x - 1) = 2 - 2\,x$

e) $x^2 - 19\,x = 6\,x - 4\,x^2$

f) $2\,x^2 - 4\,x - 6 = 0$

Ejercicio 74 *Las medidas en cm de la hipotenusa y del cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor le faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?*

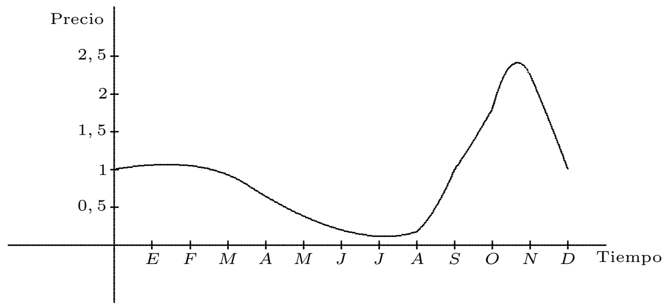
Ejercicio 75 *Calcule la superficie de un triángulo isósceles de base $2\,x$ y de lados iguales $x + 1$, sabiendo que la altura h es igual a 2 cm, como el que se muestra en la siguiente figura:*


$x+1$
$x+1$
h
$2\,x$

.

5 Capítulo 3. Funciones.

Problema: La variación del precio de las manzanas a lo largo de un año está representada en el siguiente gráfico:



Nos preguntamos,
¿en algunos meses, el precio estuvo estable?
¿en que mes del año la manzana tuvo el mejor precio?

Usualmente podemos observar en televisión, periódicos o revistas, información presentada en forma de gráficos, los cuales nos muestran relaciones entre distintas variables, como por ejemplo: la recaudación impositiva durante los meses de un año, la esperanza de vida en cada provincia, el crecimiento de una población en un determinado período, entre otras.
Muchas de estas relaciones son funciones; en algunos casos, es posible describirlas a través de fórmulas matemáticas, las cuales permiten predecir el comportamiento o la tendencia del fenómeno que la relación describe.
En este capítulo estudiaremos el concepto de funciones, tema de gran importancia en la matemática y en las ciencias aplicadas.
Para poder comenzar con este tema de un modo más formal, introduciremos a continuación una serie de conceptos previos.

5.1 Producto cartesiano.

Tomaremos la noción de par ordenado como un concepto primitivo. Diremos que (u, v) es el par ordenado que tiene a u como primera componente y a v como segunda componente. Además diremos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.
Notemos que la diferencia entre un conjunto con dos elementos y un par ordenado, radica en que en el segundo importa el orden, mientras que en el primero no. Es decir que, por ejemplo, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ mientras que $(1, 2) \neq (2, 1)$.
Estamos ahora en condiciones de definir el concepto de producto cartesiano entre dos conjuntos.

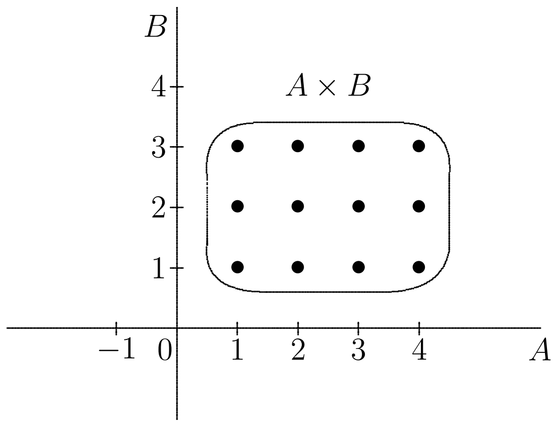
Definición 5.1 *Sean A y B dos conjuntos. Llamaremos* **producto cartesiano** *de A por B, y lo representaremos con $A \times B$, al conjunto:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo 1 *Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, luego:*

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

Una forma gráfica de representar el producto cartesiano entre estos dos conjuntos es la siguiente:



5.2 Relaciones y funciones.

El concepto intuitivo de relación, es el de una correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, podríamos considerar el conjunto de todas las personas de un departamento y definir la correspondencia "... es padre (o madre) de ...". Supongamos que tenemos el conjunto:

$$A = \{\text{Luis, Marta, José, Carlos, Erica, Federico}\},$$

en el cual, Luis (L) es padre de José (J) y Erica (E), y Marta (M) es madre de Carlos (C) y Federico (F). Entonces, si formamos pares de personas que cumplan con la propiedad que define la correspondencia, nos queda:

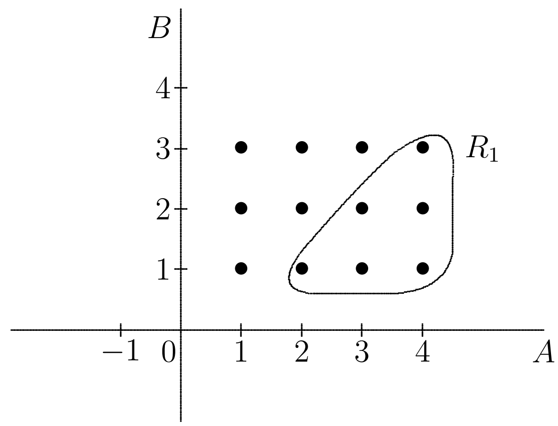
$$R = \{(L, J), (L, E), (M, C), (M, F)\}$$

Formalmente, dados dos conjuntos A y B (en el ejemplo anterior, $A = B$), una relación binaria entre los elementos de A y los de B es cualquier subconjunto de $A \times B$.

Ejemplo 2 *Consideremos los conjuntos A y B del ejemplo 1, y definamos entre ellos la relación "... es mayor o igual que el siguiente de ...". Simbólicamente sería*

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B : x \geq y + 1\} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\} \subseteq A \times B$$

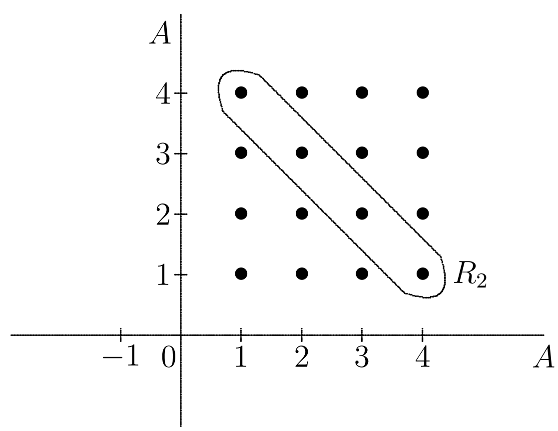
Gráficamente:



Ejemplo 3 *Consideremos ahora sólo el conjunto A del ejemplo 1, y definamos en él la relación binaria "...es igual a 5 menos...". Simbólicamente sería*

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times A : x = 5 - y\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \subseteq A \times A = A^2$$

Gráficamente:



Si analizamos las relaciones R_1 y R_2, se puede ver entre ellas una diferencia sustancial. En R_1, el elemento $1 \in A$ no tiene ningún correspondiente en B, mientras que en R_2 todos los elementos de A están asignados. Además, en R_1 los elementos 3 y 4 tienen más de un correspondiente en B, mientras que en R_2 cada elemento de A tiene sólo un correspondiente en el mismo conjunto. Por cumplir R_2 esas condiciones, puede ser llamada función de A en A.

Diremos que una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función de** A **en** B, si a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.

Para indicar que f es una función de A en B,escribiremos $f : A \longrightarrow B$.
Al elemento $y \in B$ que la función f le asigna al elemento $x \in A$ lo notaremos como $y = f(x)$ y diremos que y es la imagen de x por medio de la función f.
Se dice que el par ordenado $(x, y) \in f$.

Ejercicio. Indique cuales de las siguientes relaciones son funciones. Justifique su respuesta.

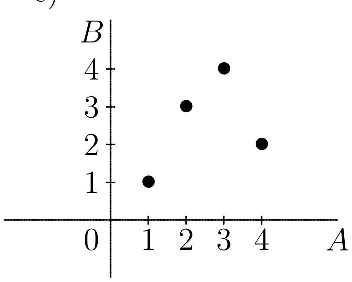
a)

x	2	3	4	5	6
y	1	2	3	4	5

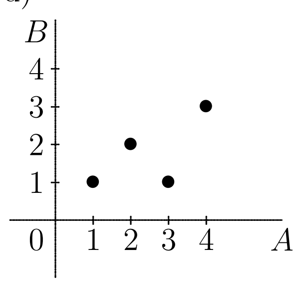
b)

x	0	1	2	3	4
y	1	1	1	1	1

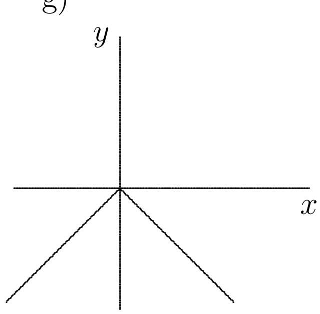
c)



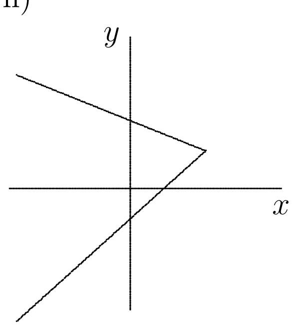
d)



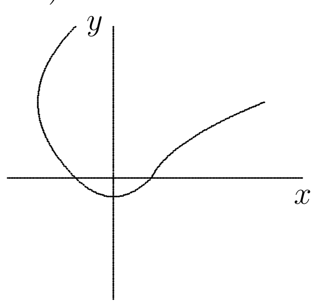
g)



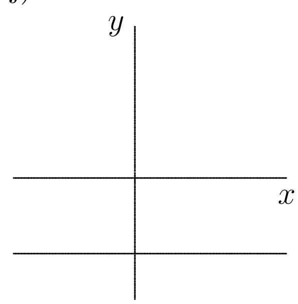
h)



i)



j)



5.3 Dominio, codominio e imagen.

Dada la relación $R \subseteq A \times B$, definimos los conjuntos:

(i) $Dom(R) = \{a \in A :$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R\}$ como el dominio de R.

(ii) El conjunto B es el codominio de R.

(iii) $Im(R) = \{b \in B :$ existe $a \in A$ tal que $(a, b) \in R\}$ como la imagen o rango de R.

Observemos que si $R \subseteq A \times B$, entonces $Dom(R) \subseteq A$ y $Im(R) \subseteq B = Cod(R)$.
En el ejemplo 2, $Dom(R_1) = \{2, 3, 4\}$ y $Im(R_1) = \{1, 2, 3\} = B = Cod(R_1)$.
Mientras que en el ejemplo 3, $Dom(R_2) = \{1, 2, 3, 4\} = A = Im(R_2) = Rg(R_2) = Cod(R)$.
Notemos que si $f : A \longrightarrow B$, entonces $Dom(f) = A$.

Ejercicio. Indique dominio, rango e imagen de las relaciones del ejercicio anterior.

5.4 Imagen y preimagen.

Sean $R \subseteq A \times B$, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Llamaremos:

(i) Imagen de X por medio de R al conjunto:

$$R(X) = \{b \in B : \text{existe } a \in X \text{ tal que } (a, b) \in R\}$$

(ii) Preimagen de Y por medio de R a:

$$R^{-1}(Y) = \{a \in A : \text{existe } b \in Y \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

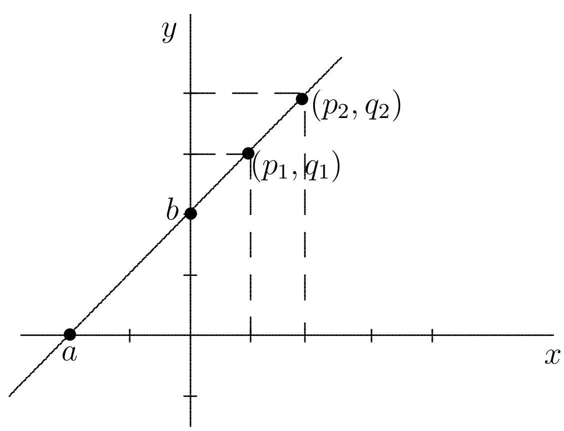
Podemos observar que si tenemos una función $f : A \longrightarrow B$ y un conjunto $Y \subseteq B$, entonces la preimagen de Y por medio de f será:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

5.5 Ecuaciones de la recta en el plano.

Dada una recta en el plano, definiremos los siguientes elementos notables:

- Pendiente. Se simboliza generalmente con la letra m y es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas (eje x). Si se conocen dos puntos que pertenecen a la recta, $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, se puede calcular como
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
- Ordenada al origen. Generalmente se simboliza con la letra b y es el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas (eje y).
- Abscisa al origen. Es el punto de intersección de la recta con el eje de las abscisas y se simboliza con la letra a.



Habiendo definido estos elementos, veremos tres modos distintos de representar una recta en el plano, mediante una fórmula.

Ecuación explícita.
Esta ecuación es de la forma $y = m.x + b$. En ella se pueden determinar rápidamente la pendiente y la ordenada al origen.

Ecuación segmentaria.
Se llama así a la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. En su expresión aparecen la ordenada y la abscisa al origen.

Ecuación implícita.
Es de la forma $A.x+B.y+C=0$. De esta ecuación no se puede extraer directamente ningún elemento notable, sin embargo, se pueden deducir de ella tanto la ecuación explícita como la segmentaria. Es muy frecuente encontrarse con estas ecuaciones al plantear problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones lineales.

Ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$.

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

En ciertas ocasiones, dada una recta en el plano, tendremos interés en hallar la ecuación de alguna recta perpendicular o paralela a ésta. En estos casos, haremos uso de la siguiente herramienta.

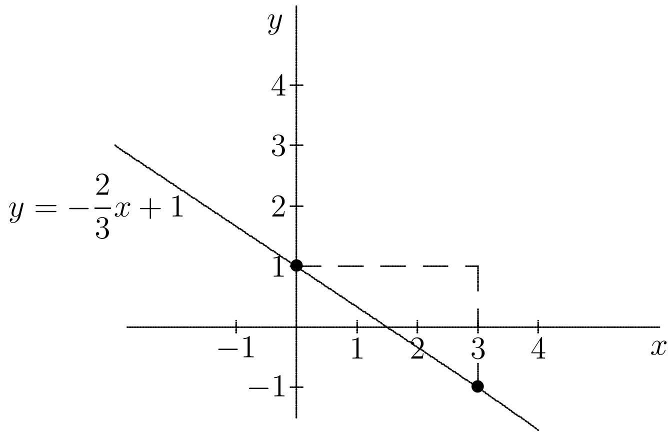
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.
Dadas las rectas $r_1 : y = m_1.x + b_1$ y $r_2 : y = m_2.x + b_2$, entonces:

- $r_1 \parallel r_2$ si, y sólo si, $m_1 = m_2$
- $r_1 \perp r_2$ si, y sólo si, $m_1.m_2 = -1$

5.6 Función Lineal.

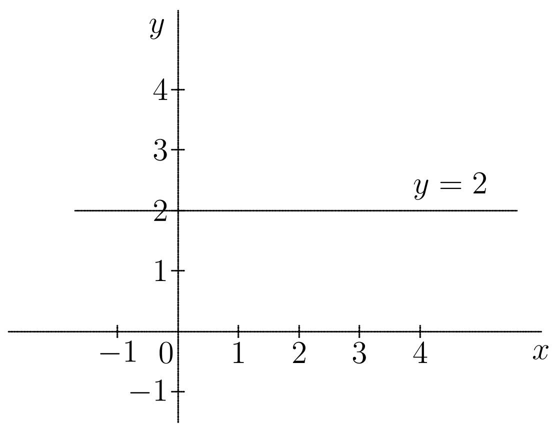
Diremos que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal, si para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = m.x + b$, siendo $m, b \in \mathbb{R}$.
Por lo visto en la sección anterior, se deduce que la gráfica de una función lineal, es una recta en el plano, dada en forma explícita. A continuación veremos los pasos para graficar una función lineal utilizando su pendiente y ordenada al origen.
Para determinar la gráfica de cualquier recta, se necesita sólo conocer dos puntos que pertenezcan a la misma. Uno de ellos, será la ordenada al origen, esto es, marcamos el punto $(0, b)$ que está sobre el eje de las y. A continuación, a partir de ese punto utilizamos el valor m, que por la manera en que está definido, es de la forma $m = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$. Es decir que otro punto que pertenecerá a la recta, será el punto $(\Delta_x, \Delta_y + b)$.

Ejemplo 4



5.7 Función Constante

Una función f es constante si para todo $x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) = k$, con $k = cte$.



5.8 Función cuadrática

Se llama función cuadrática a toda función f definida por una expresión de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

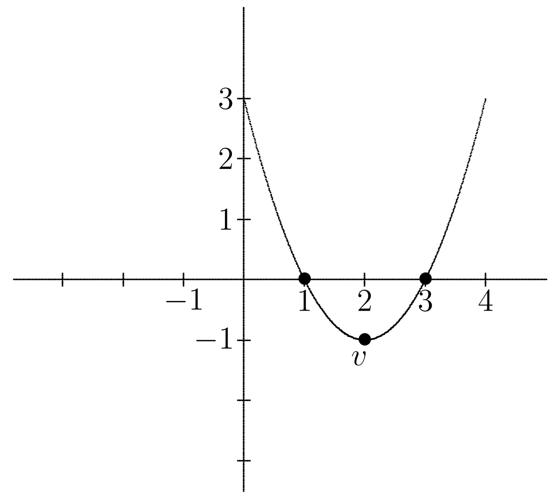
donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es una función cuadrática.

$dom(f) = \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $codom(f) = \mathbb{R}$

Encontremos algunos pares (x, y) que pertenecen a la función:

x	$y = f(x)$
-2	15
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3



La representación gráfica de una función cuadrática o de segundo grado es una curva llamada parábola.
La expresión $y = ax^2 + bx + c$ recibe el nombre de ecuación explícita de la parábola.

Observación.

- En el ejemplo, la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$, y es creciente en $(2, \infty)$.
- En $x = 2$, la función adopta su mínimo valor, $f(2) = -1$.
- El punto $v = (2, -1)$ se llama vértice de la parábola.
- $im(f) = [-1, \infty) = \{y \in \mathbb{R} : y \geqslant -1\}$
- Posee un eje de simetría vertical (paralelo al eje de ordenadas) de ecuación $x = 2$ que contiene al vértice v.
- La intersección de la parábola con el eje x son los puntos $a = (1, 0)$ y $b = (3, 0)$.
- El punto en el que la gráfica corta al eje y es $c = (0, 3)$.

Forma factorizada

Toda función cuadrática se puede factorizar en función de sus raíces. Dada: $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede factorizar como:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siendo a el coeficiente principal de la función. En el caso de que el discriminante sea igual a 0 entonces $x_1 = x_2$, estamos en presencia de raices dobles, por lo que podemos escribir:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Forma canónica

Toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Llamada forma canónica. Siendo a el coeficiente principal y el par ordenado (h, k) las coordenadas del vértice de la parábola.

Resumiendo

$Forma$	Expresión	Parámetro
Explícita o General Polinómica	$y = ax^2 + bx + c, \;\; a \neq 0$	$a, b, c, \;\; (c$ coordenada al origen)
Factorizada	$y = a(x - x_1).(x - x_2), \;\; a \neq 0$	$a, x_1, x_2, \;\; (x_1, x_2 :$ raíces)
Canónica	$y = a(x - x_v)^2 + y_v, \;\; a \neq 0$	$a, x_v, y_v, \;\; (v = (x_v, y_v) :$ vértice)

5.8.1 Representación gráfica de una función cuadrática

Para realizar la construcción del gráfico de una función cuadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, no es necesario confeccionar una tabla.
Sólo es suficiente tener en cuenta las características que posee una parábola: su eje de simetría, su vértice, los puntos de intersección con el eje x (si existen) y el punto de intersección con el eje y.

- El punto de intersección entre la parábola y el eje y tiene abscisa $x = 0$. Por lo tanto si $x = 0$, entonces $f(0) = a0 + b0 + c = c$. Por lo tanto, la parábola corta al eje y en el punto $c = (0, c)$.

- Si la parábola corta al eje x, los puntos de intersección tienen ordenada $y = f(x) = 0$.

  Para determinar los valores de x que satisfacen $y = 0$, se calculan las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

  Puede ocurrir que la ecuación cuadrática tenga:

  (∗) Dos raíces reales y distintas, esto significa que la curva corta al eje x en los puntos

  $a = (x_1, 0)$ y $b = (x_2, 0)$.

  (∗) Dos raíces reales coincidentes, la curva tiene sólo un punto en común con el eje x.

  (∗) Dos raíces complejas conjugadas, no hay contacto entre la parábola y el eje x.

- Las coordenadas del vértice $v = (x_v, y_v)$, pueden calcularse:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

  Si en la fórmula $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

  se remplazan x_1 y x_2 por las expresiones encontradas en la fórmula de Bhaskara se obtiene

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

  Así podemos calcular x_v sin necesidad de determinar previamente las raíces.

Ejemplo. Representar gráficamente la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = -x^2 - 3x + 10$$

- Punto de intersección con el eje y.

  Si $x = 0$ entonces $f(0) = 10$

  El punto de intersección con eje y: $c = (0, 10)$

- Puntos de intersección con eje x.

  Las raíces de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 = -5 \qquad x_2 = 2$$

  Puntos de intersección con el eje x:

$$a = (-5, 0) \qquad b = (2, 0)$$

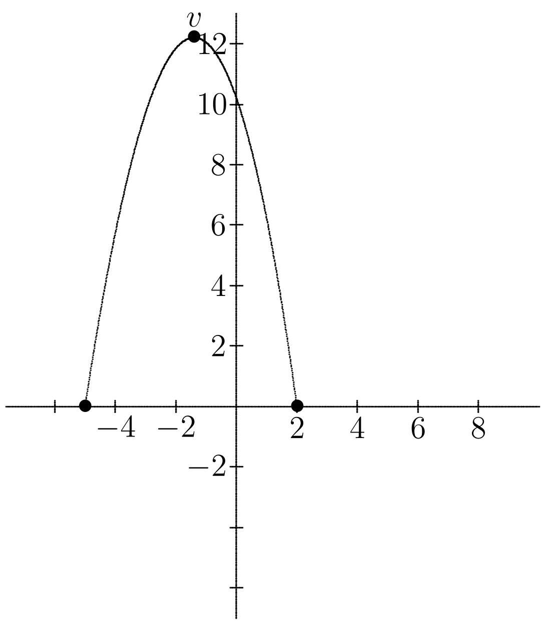
- Coordenadas del vértice.

  $x_v = \dfrac{-5+2}{2} = -\dfrac{3}{2}$

  $y_v = \dfrac{49}{4}$

  Coordenadas del vértice:

$$v = (-\frac{3}{2}, \frac{49}{4})$$



.

Ejemplo. Representar gráficamente la parábola de ecuación $y = x^2 - 4x + 4$

- Punto de intersección con el eje y.

  Si $x = 0$ entonces $f(0) = 4$

  El punto de intersección con eje y: $c = (0, 4)$

- Las raíces o puntos de intersección con eje x.

$$x_{1,2} = \frac{-b^+_-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4^+_-\sqrt{16 - 4.4}}{2} = \frac{4^+_-0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

En este caso hay dos raíces reales coincidentes. La parábola tiene sólo un punto en común con el eje x y éste coincide con el vértice.

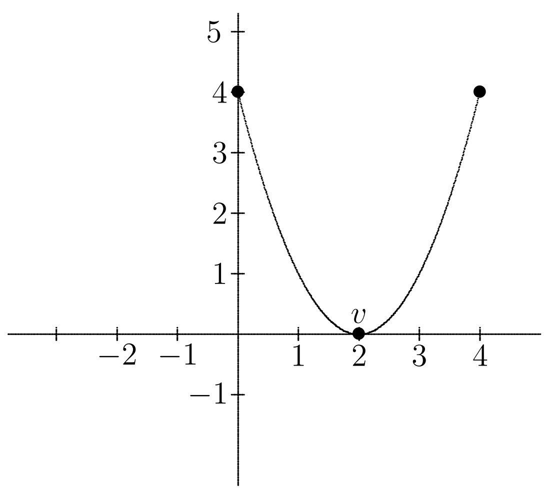
- Coordenadas del vértice.

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2} = 2$

$y_v = 4 - 4.2 + 4 = 0$

Coordenadas del vértice:

$$v = (2, 0)$$



Ejemplo. Representar gráficamente la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$

- Punto de intersección con el eje y.

Si $x = 0$ entonces $y = 5$

El punto de intersección con eje y: $c = (0, 5)$

- Las raíces o puntos de intersección con eje x. Si $y = 0$ entonces $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b^{+}_{-}\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2^{+}_{-}\sqrt{4 - 4.5}}{2} = \frac{2^{+}_{-}\sqrt{-16}}{2} = \frac{2^{+}_{-}4i}{2}$$

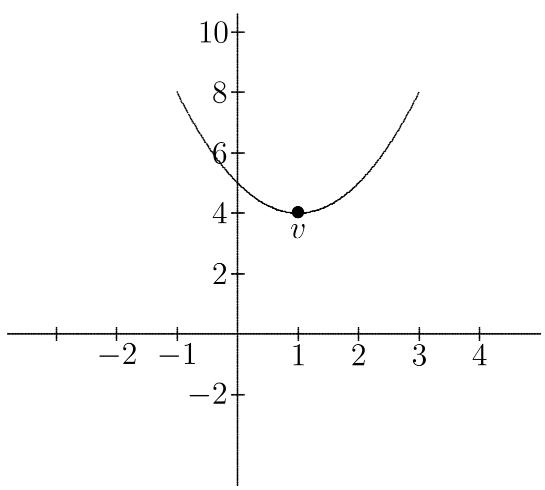
$$x_1 = 1 + 2i, \qquad x_1 = 1 - 2i$$

  Las raíces son complejas conjugadas. La parábola no corta al eje x.

- Coordenadas del vértice.
  $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-2)}{2} = 1$
  $y_v = 1 - 2 + 5 = 4$
  Coordenadas del vértice:

$$v = (1, 4)$$

.



5.9 Función definida por partes

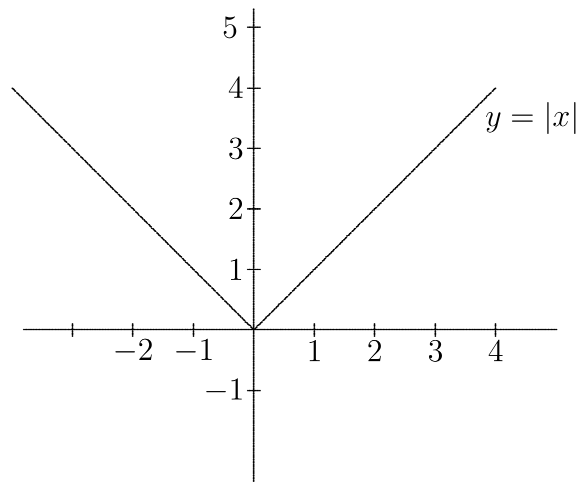
En matemática, muchas veces una función cambia dependiendo del valor de la variable independiente.
Matemáticamente, una función real f (definida por partes) de una variable real x es la relación cuya definición está dada por varios conjuntos disjuntos de su dominio (conocidos como subdominios). Una función f definida a trozos puede estar representada por varias expresiones matemáticas (algebraicas y/o trascendentales) de cualquier tipo.

Las funciones definidas a trozos se expresan con una notación funcional común, donde el cuerpo de la función es una lista de expresiones matemáticas asociadas a un subdominio (intervalo).
Un ejemplo, es la función valor absoluto:

5.9.1 Función Valor absoluto.

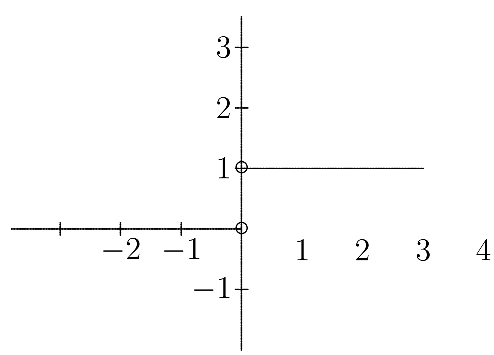
Sea la función $f = |\ |$ definida por: $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0\,, \\ -x & \text{si} \quad x < 0\,. \end{cases}$

.



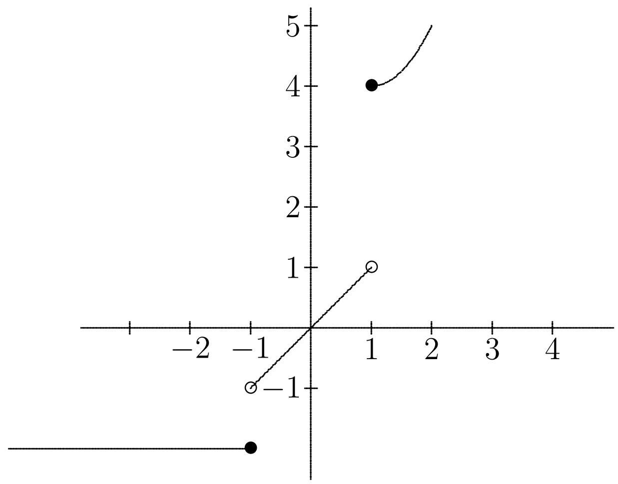
5.9.2 Función escalón o de Heaviside

La función escalón de Heaviside, también llamada función escalón unitario, debe su nombre al matemático inglés Oliver Heaviside. Es una función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier argumento positivo:
Sea la función $f = H$ definida por:
$H : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ 1 & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$
.



Ejemplo. Representar graficamente la siguiente función:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ x & \text{si} \quad x \in (-1, 1) \\ x^2 - 2x + 5 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$



.

5.10 Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es, respectivamente, creciente, estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente en el intervalo (a, b), si para todo par de puntos x_1, x_2 pertenecientes al intervalo, se verifica:

- Si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$
- Si $x_1 \leqslant x_2$ entonces $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- Si $x_1 > x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$
- Si $x_1 \geq x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ejemplo.
(1) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la funcin $f(x) = x^4 - 2x^2$

(2) Las temperaturas en cierta ciudad el día de Año Nuevo siguen la fórmula $f(x) = -\frac{x(x-26)}{13}$ siendo x el número de horas a partir de medianoche. ¿En qué parte del día la temperatura desciende?

5.11 Funciones pares e impares

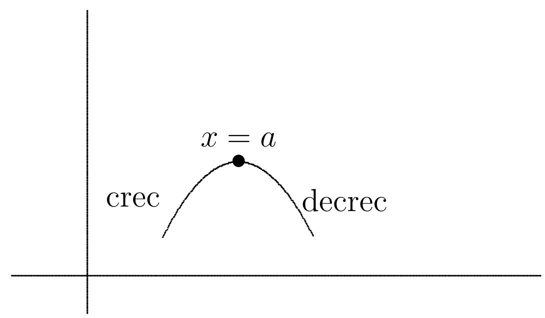
Una función f es:

(a) par, si para todo $x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) = f(-x)$.

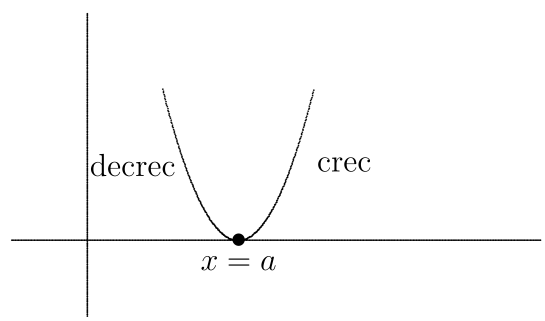
(b) impar, si para todo $x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) = -f(-x)$.

5.12 Máximos y mínimos

Una función $y = f(x)$ tiene en $x = a$ un *máximo* cuando a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.

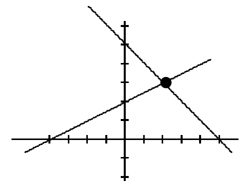
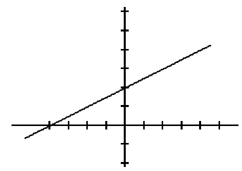
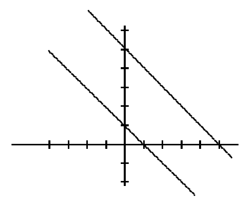


Una función $y = f(x)$ tiene en $x = a$ un *mínimo*, si a su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente.



5.13 Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se representan las dos ecuaciones en un sistema de coordenadas y los puntos de intersección son las soluciones; en este caso, cada ecuación representa una recta.

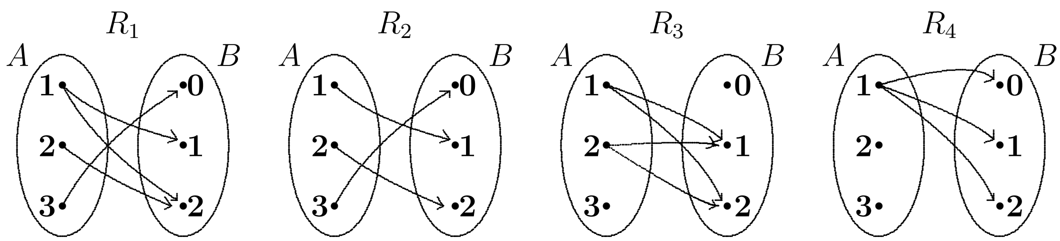
Nombre del sistema	Relación entre las pendientes	Resolución del sistema	Número de soluciones	Resolución gráfica
sistema compatible determinado	distintas	las rectas se cortan en un punto	solución única	
sistema compatible indeterminado	iguales	hay una única recta	infinitas soluciones	
sistema incompatible	iguales	son paralelas	sin solución	

6 Ejercitación básica

6.1 Práctica 3: Funciones

Ejercicio 76 *Dados los conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{0, 1, 2\}$. *Calcule* $A \times B$ *y represéntelo en los ejes cartesianos.*

Ejercicio 77 *Dadas las siguientes relaciones representadas por diagramas, determine cuáles de ellas representan una función de A en B. Justifique su respuesta.*



Ejercicio 78 *Dados los conjuntos* $A = \{0, 1, 2, 3\}$ *y* $B = \{1, 2, 3, 4\}$. *Para cada una de las siguientes relaciones de A en B realice el diagrama sagital y la representación cartesiana. Indique dominio, codominio e imagen. Determine si son funciones o no. Justifique su respuesta.*

(*a*) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B : x + y = 5\} \subseteq A \times B$,

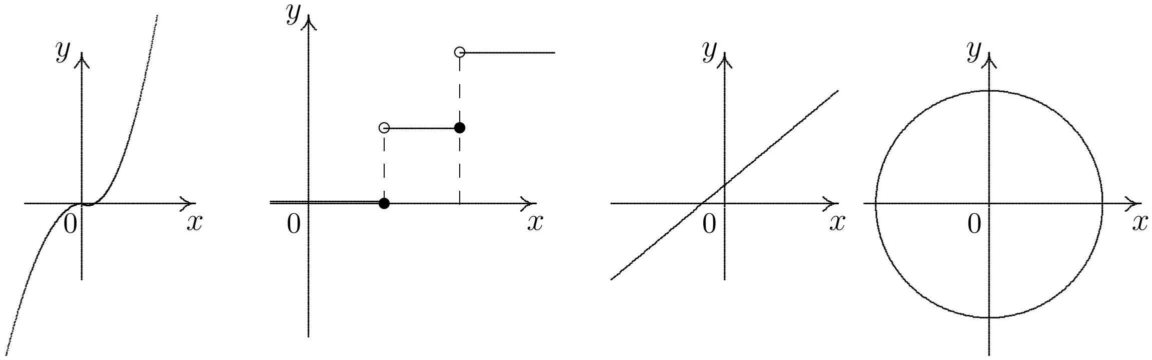
(*b*) $R_2 = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\} \subseteq A \times B$,

(*c*) $R_3 : \begin{array}{c|l} x & y = x + 1 \\ \hline 0 & \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{array}$, sabiendo que $x \in A$, $y \in B$,

(*d*) $R_4 = \{(0, 3), (1, 4), (0, 4), (3, 3), (2, 2)\} \subseteq A \times B$,

(*e*) $R_5 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \subseteq A \times B$.

Ejercicio 79 *¿Representan estos gráficos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? ¿Por qué?*



Ejercicio 80 *Calcule el valor de la función en el punto indicado y represente el par obtenido en un sistema de coordenadas cartesianas:*

(a) $f(x) = x + 2$ en $x = -1$, en $x = 0$, en $x = 4$.

(b) $g(t) = t^2 + 3t$, $g(-2)$, $g(1/2)$, $g(0)$.

(c) $h(x) = \dfrac{3\,x - 5}{2}$, $h(1)$, $h(2)$, $h(0)$.

Ejercicio 81 *Represente gráficamente las siguientes funciones lineales, en un mismo sistema cartesiano, indicando en cada caso la pendiente y la ordenada al origen. Determine dominio, codominio e imagen.*

(a) $y = 3\,x$

(b) $y = 3\,x + 1$

(c) $y = -3\,x + 4$

(d) $y = -\dfrac{1}{3}\,x + 2$

(e) $y = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{3}{2}$

(f) $y = 2\,x - \dfrac{3}{4}$

(g) $y = -\dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{5}{2}$

(h) $y = -\dfrac{5}{4}$

Ejercicio 82 *Dada* $f(x) = 2x - 3$

(a) Calcule $f(0), f(-1), f\left(-\dfrac{2}{3}\right), f\Big(3\,a\Big)$ y $f\Big(b^{\,2}\Big)$.

(b) Cuando sea posible represente los pares $(x, f(x))$

(c) Indique el dominio y la imagen de la función.

Ejercicio 83 *Represente en un mismo sistema, las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:*

$$y = \frac{2}{3}x - 3\ ,\ \ y = -\frac{3}{2}x - 3 \ \text{ e } \ y = -3.$$

(a) ¿Qué tienen en común estas funciones?

(b) ¿Cuál es creciente, cuál decreciente y cuál es constante?

(c) Teniendo en cuenta que la función constante es lineal, ¿cuál es su pendiente?

(d) Compare cada gráfico con la fórmula y completen:

Si la pendiente es .... , la función es creciente.
Si la pendiente es .... , la función es decreciente.
Si la pendiente es .... , la función es constante.

(e) Proponga un ejemplo de cada uno de los casos anteriores y grafique.

Ejercicio 84 *Represente en el mismo sistema cartesiano, las funciones reales:*

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 1\ ,\ g(x) = \frac{2}{3}x \ \text{ y } \ h(x) = -\frac{3}{2}x + 3.$$

(a) Identifique en cada recta la pendiente y la ordenada al origen.

(b) ¿Por qué las rectas que representan gráficamente a f y a g resultaron paralelas?

(c) ¿Por qué las rectas que representan a f y a h resultaron perpendiculares?

Ejercicio 85 *Con 50 km de alambre se quiere alambrar un campo rectangular de largo y y ancho x, gastando todo el alambre.*

(a) Halle la expresión del largo y en función del ancho x. Grafique.

(b) Indique dominio, codominio e imagen de la función anterior.

Ejercicio 86 *Cada champa de césped cuesta \$ 1,50 y la colocación \$ 0,75. Además, el vivero recarga \$ 25 de flete por llevar todos las champas a domicilio.*

(a) Escriba la fórmula del gasto en función de las champas colocadas. Grafíquela.

(b) ¿Cuál es el gasto si se colocan 350 champas?.

(c) ¿Cuántas champas se colocaron si se gastó \$ 668,50?

Ejercicio 87 *Represente gráficamente las siguientes funciones lineales, en un mismo sistema cartesiano, indicando en cada caso el valor de la pendiente y la ordenada al origen:*

(a) $y = -\dfrac{3}{2}\,x$ (b) $y = \dfrac{2}{3}\,x - 1$ (c) $y = \dfrac{3}{2}\,x$

(d) $y = 3\,x - 5$ (e) $y = -\dfrac{2}{3}\,x - 3$ (f) $y = -3\,x$

Ejercicio 88 *Coloque dentro del círculo V (verdadero) o F (falso) para cada enunciado. Justifique.*

(a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\,x + 3$, entonces $f(-1) = 5$. O

(b) En toda función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0)$ es un valor sobre el eje y. O

(c) El punto donde una función lineal corta al eje x tiene ordenada igual a 0. O

(d) Las rectas oblicuas $y = 2\,x + 3$ e $y = \dfrac{1}{2}\,x + 3$ tienen la misma pendiente. O

(e) La función lineal $f(x) = 3\,x + 1$ es una recta que corta al eje x en $-\dfrac{1}{3}$. O

(f) La función $f(x) = x + 1$ definida en $\mathbb{R}$ pasa por el origen de coordenadas. O

Ejercicio 89 *Clasifique las siguientes ecuaciones de la recta en el plano. Diga de qué tipo de recta se trata. Además, represente gráficamente a cada una de ellas.*

(a) $3\,x - 2\,y + 5 = 0$

(b) $y = -\dfrac{4}{3}\,x + \dfrac{3}{2}$

(c) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$

(d) $x + 2 = 0$

(e) $3\,y - 9 = 0$

(f) $x = 0$

(g) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$

Ejercicio 90 *Dada la recta* $r: -3\,y + 6 = x$*, hallar la ecuación de:*

(a) la recta paralela a r que tiene -1 como ordenada al origen. Grafique.

(b) la recta perpendicular a r que pasa por $(0, -3)$. Grafique.

(c) una recta no paralela a r que tenga su misma ordenada al origen. Grafique.

(d) una recta perpendicular a r que tenga como ordenada al origen un número negativo. Grafique.

Ejercicio 91

(a) Dados los puntos $(2, 1)$ y $(1, -1)$ encuentre las ecuaciones implícita y explícita de la recta que pasa por dichos puntos. Grafique la recta encontrada en un sistema de ejes cartesianos.

(b) Dada la recta $x - 2\,y + 3 = 0$ en forma implícita. Halle las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a la recta dada que pasan por el punto $(-1, -2)$.

Ejercicio 92

(a) Halle la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por P. Grafique.

(i) $P = (-2, 3)\,,\ m = 2$ (ii) $P = (1, 5)\,,\ m = 0$

(iii) $P = (3, -4)\,,\ m = -1$ (iv) $P = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)\,,\ m = -\frac{1}{2}$

(b) Encuentre la pendiente de la recta que pase por P y Q.

(i) $P = (1, 2)\,,\ Q = (-4, 3)$ (ii) $P = (2, 4)\,,\ Q = (-3, 4)$

Ejercicio 93 *Determine la ecuación de:*

(a) una recta horizontal que pase por el punto $(-4, 1)$,

(b) una recta que pase por el origen de coordenadas y el punto $(3, -2)$,

(c) una recta paralela a $y = -3x + 2$, y que pase por el $(3, 2)$,

(d) una recta vertical que pase por el $(2, -4)$.

Ejercicio 94

(a) Encuentre en cada caso una función lineal que satisfaga:

(i) $f(2) = 0\,,\ f(0) = -\dfrac{3}{2}$ (ii) $g(-1) = 3\,,\ g\Big(1,5\Big) = 3$

(b) Grafique las funciones lineales halladas en el inciso anterior.

Ejercicio 95 *Considere la función cuadrática $f(x) = x^2$*

(a) Calcule $f(-4)\,,\ f(\sqrt{7})$ y $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

(b) Indique, si es posible, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 100$, $f(x) = 5$, $f(x) = -4$ y $f(x) = 25$.

Ejercicio 96 *Representе gráficamente las siguientes funciones, en un mismo sistema cartesiano. Extraiga conclusiones de los gráficos obtenidos.*

(a) $y = x^2$ $\quad y = \dfrac{3}{4}x^2$ $\quad y = 2\,x^2$ $\quad y = -\,x^2$

(b) $y = \dfrac{1}{2}\,x^2$ $\quad y = \dfrac{1}{2}\,x^2 - 2$ $\quad y = \dfrac{1}{2}\,x^2 + x$ $\quad y = \dfrac{1}{2}\,(x-2)^2$

Ejercicio 97

(a) Represente gráficamente, en el mismo sistema, las funciones cuadráticas $y = x^2 - 2\,x$ e $y = -x^2 + 2\,x$.

(b) Compare estos gráficos. ¿Cómo resultan estas curvas? Explique por qué.

Ejercicio 98 *Dadas las siguientes funciones cuadráticas:*

(a) $y = x^2 + 2\,x - 3$ (b) $y = (x-1)^2 - 1$

(c) $y = -2\,x^2 + 2$ (d) $y = -(x+2)^2$

(e) $y = \dfrac{1}{2}\,(x-3)^2$ (f) $y = 2\,x^2 + 4\,x + 3$

(g) $y = x^2 - 4$ (h) $y = -x^2 + x + 2$

(i) Indica cuáles están en forma polinómica y cuáles en forma canónica.

(ii) Las que están en forma polinómica transformálas en canónica, y viceversa.

(iii) Encuentra en cada caso: vértice, eje de simetría, ordenada al origen y raices (si existen).

(iv) Escriba la forma factorizada de cada función cuadrática.

(v) Representa gráficamente a las parábolas.

(vi) Indica dominio, codominio e imagen en cada caso.

(vii) Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. ¿Para qué valor de x hay un máximo o un mínimo absoluto?

Ejercicio 99 *Halle los posibles valores que puede tener la constante numérica k para que se cumpla la condición pedida en cada caso:*

(a) La función cuadrática $f(x) = -x^2 + x - k$ tenga dos raíces simples.

(b) La párabola de ecuación $y = x^2 - k\,x + 4$ tenga una raíz doble.

(c) El gráfico de la función $h(x) = x^2 + k\,x$ intersecta el eje de las abscisas en dos puntos.

(d) La función cuadrática $g(x) = 2\,x^2 + k$ no tenga raices reales.

Ejercicio 100 *Grafique las siguientes funciones y complete el cuadro indicado:*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Dominio	Codominio	Imagen	Vértice	Raices o Ceros	Ordenada al origen
$f(x) = -2\,x^2$						
$f(x) = x^2 - 2\,x + 1$						
$f(x) = -2\,x^2 + 4x$						
$f(x) = x^2 + 2\,x - 3$						
$f(x) = -3\,x^2 - 12\,x - 18$						

Ejercicio 101 *Escriba la ecuación de la parábola trasladada de la $y = x^2$, llevando el vértice al punto $(2, -3)$. Halle los puntos en que corta a los ejes coordenados. Dibuje su gráfica.*

Ejercicio 102 *Dada* $y = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{2}{3}\,x - \dfrac{5}{3}$, *función cuadrática en forma polinómica:*

(a) realice su gráfica;

(b) indique cuál es la función de segundo grado cuya gráfica es la misma anterior, pero invertida, grafique;

(c) de un ejemplo de una función cuadrática, cuya parábola tenga el mismo vértice que la dada, pero tenga menor abertura y la misma concavidad, verifique gráficamente.

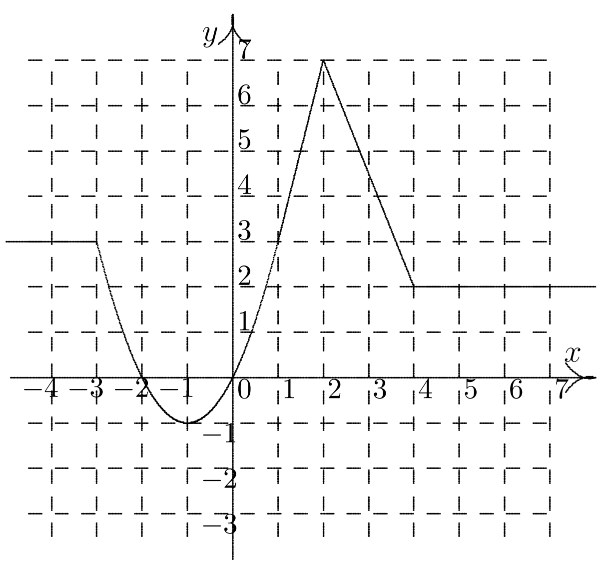
Ejercicio 103 *Grafique en* $\mathbb{R}$ *una función que cumpla las condiciones que se indican en cada caso:*

(a) No tenga ceros.
(b) Tenga sólo una raíz y no sea lineal.
(c) Tiene una raíz positiva y otra negativa.
(d) Tiene infinitas raíces.

Ejercicio 104 *Dadas las funciones* $f(x) = x^2 - 6$ *y* $g(x) = -3\,x + 1$.

(a) Obtenga $f + g$, $f - g$ y $3\,g$ analíticamente. Grafique.
(b) Indique dominio, codominio e imagen de las funciones.

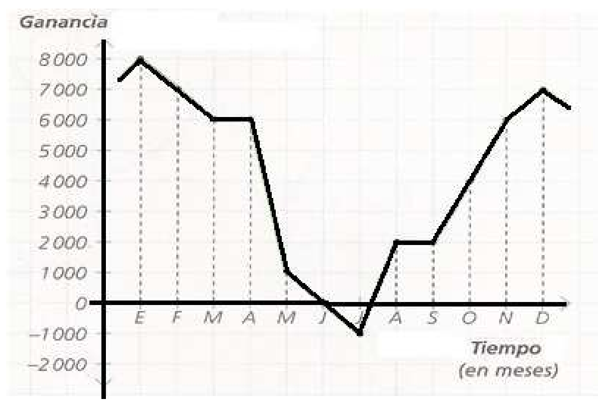
Ejercicio 105 *En la gráfica de la siguiente función:*



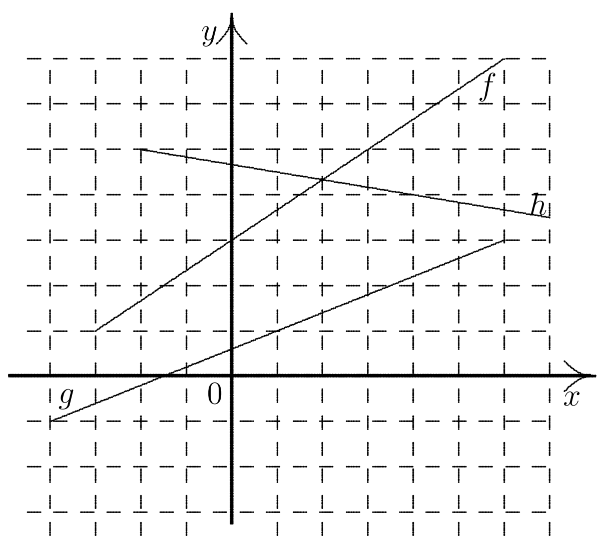
(a) Determine dominio, codominio e imagen.
(b) Indique en qué partes es creciente, en cuáles decreciente y en cuáles constante.
(c) Indique, si existen, los valores de x donde se alcanza un máximo o un mínimo absoluto.

Ejercicio 106

El gráfico muestra las ganancias, en pesos, de una heladería a lo largo de un año.
(a) ¿Cuáles son las variables relacionadas?
(b) Indiquen los períodos de crecimientos de las ganancias de la heladería.
(c) ¿Hubo períodos en que las ganancias se mantuvieron constantes? ¿Cuáles?
(d) ¿Durante qu períodos disminuyeron las ganancias de la heladería?
(e) ¿Qué sucedió en el mes de Junio?
(f) ¿En qué mes las ganancias alcanzaron su valor máximo?¿Y el mínimo?



Ejercicio 107 *Dado el gráfico de las funciones lineales f , g y h.*



Determine:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 5\} = f^{-1}([5, \infty))$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leqslant 1\} = g^{-1}((-\infty, 1])$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : h(x) < 4\} = h^{-1}((-\infty, 4))$

Ejercicio 108 *Trace las gráficas de las siguientes funciones por tramos:*

(a) $f(x) = \begin{cases} 2\,x + 10 & \text{si} \quad x \in (\infty, -2] \\ -x + 5 & \text{si} \quad x \in (-2, 2] \\ 3 & \text{si} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2}x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

(i) Determine dominio, codominio e imagen.

(ii) Escriba, si existen, los intervalos donde las funciones son crecientes, en cuáles decrecientes, en cuáles constante.

(iii) Indique, si existen, cuáles son los valores del dominio en donde se alcanza un máximo o un mínimo (relativo-absoluto).

Ejercicio 109 *Dada* $f(x) = e^{x-2} + 1$

(a) Calcule $f(1), f(-3), f(2)$

(b) Represente los pares $(x, f(x))$

(c) Indique dominio, codominio e imagen de la función.

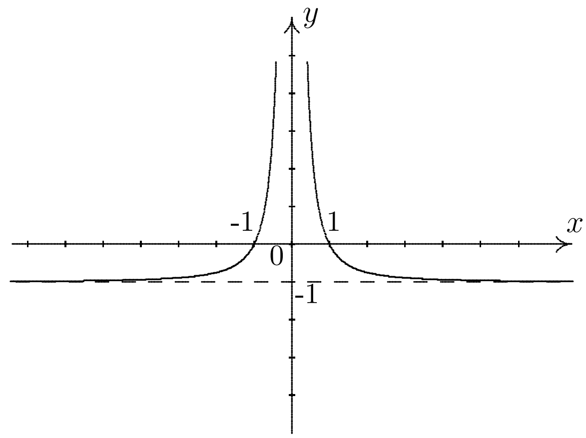
Ejercicio 110 *Usando la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$, *calcule:*

(a) Dominio , codominio e Imagen.

(b) Intersección con los ejes coordenados.

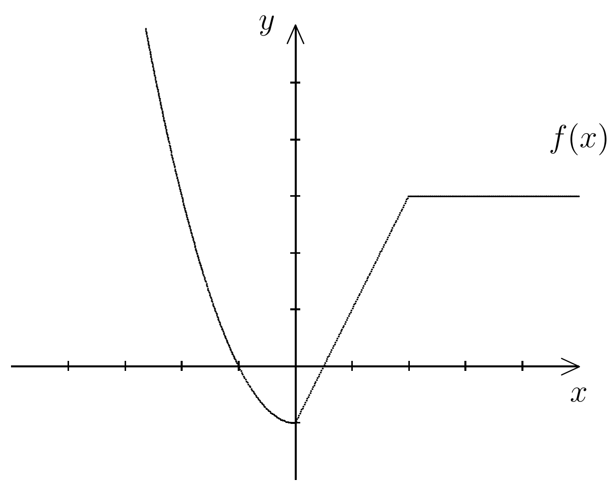
(c) $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}\left(-\dfrac{3}{4}\right)$.

(d) $f^{-1}(-1)$. Interprete el resultado.



Ejercicio 111

La gráfica de la función definida por tramos $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leqslant 0\,, \\ 2\,x - 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 2\,, \\ 3 & \text{si} \quad 2 < x\,. \end{cases}$ es la siguiente:



(a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
(b) Indique dominio, codominio e imagen de f.
(c) Indique intervalos de crecimiento, decrecimiento y donde se mantiene constante. ¿Para qué valor de x hay un mínimo absoluto?
(d) Encuentre gráficamente $f(0)$ y $f^{-1}(0)$. ¿Qué representan de la función?

Ejercicio 112 *Represente gráficamente a la función definida por partes:*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Además:

(a) Determine dominio, codominio e imagen de f.

(b) Calcule $f(-2), f(1)$ y $f(3)$.

(c) Encuentre $f^{-1}(-1), f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(3)$.

(d) Halle gráficamente los ceros de la función y la ordenada .

(e) Indique intervalo de crecimiento y/o decrecimiento. ¿Hay un máximo o mínimo para algún valor de x?

Ejercicio 113 *En los ejercicios sobre sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de la Práctica 2, halle su solución gráfica.*

Ejercicio 114 *Represente gráficamente en el plano cartesiano los semiplanos correspondientes a las siguientes inecuaciones lineales:*

i) $x < y - 3$

ii) $x + y > 1$

iii) $-4\,x \geqslant 4$

iv) $-3\,y \leqslant 6\,x + 9$

Ejercicio 115 *Encuentre gráficamente la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas:*

(a) $\begin{cases} 2\,x - 4\,y \leqslant 8 & (I) \\ 3\,x + 2\,y > 4 & (II) \\ 2\,y - 6 \leqslant 0 & (III) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x + 2\,y > 2 & (I) \\ 3\,x - 3 \geqslant 0 & (II) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3\,x + y \leqslant 4 & (I) \\ -3\,x - y < 1 & (II) \end{cases}$

$(d)\ \begin{cases} 3\,x - 6\,y \geqslant 6 & (I\,) \\ 2\,x + 3\,y < 9 & (II\,) \\ 2\,y + 4 \geqslant 0 & (III\,) \end{cases}$

$(e)\ \begin{cases} -x + 3\,y < 3 & (I\,) \\ 3\,x + 3 \leqslant 0 & (II\,) \end{cases}$

$(f)\ \begin{cases} -2\,x + y < 3 & (I\,) \\ 2\,x - y \leqslant 1 & (II\,) \end{cases}$

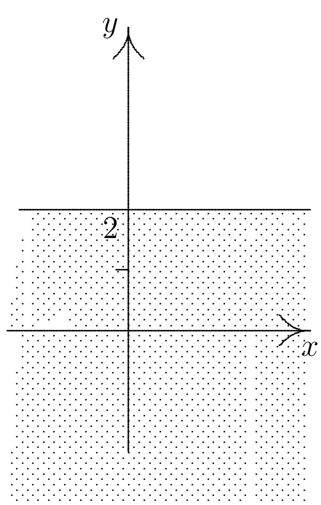
Ejercicio 116 *Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas:*

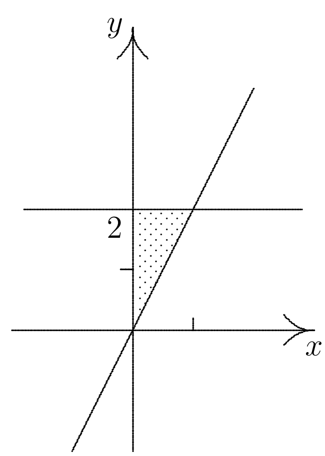
a) $\begin{cases} 4\,x + 1 > 2\,x + 9 \\ 2\,x - 5 > -x - 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2\,y \leqslant 4 \\ y \geqslant -x \end{cases}$

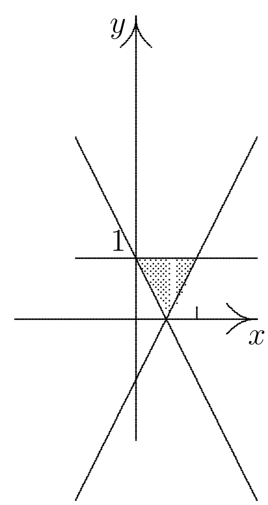
c) $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y < 6 \\ y \geqslant 2\,x \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > y + 2 \\ x < y - 2 \\ y \leqslant -x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4\,x - y \leqslant 1 \\ y \geqslant -2 \\ y > 2 - x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2\,y < 2 \\ x < 0 \\ y \geqslant x - 2 \end{cases}$

Ejercicio 117 *Escribe una inecuación lineal o un sistema de inecuaciones lineales, que responda a cada uno de los siguientes gráficos:*

a)


b)


c)


.

7 Capítulo 4. Polinomios.

Para poder traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual, se utilizan las expresiones algebraicas.
En matemática, se deben operar las expresiones algebraicas de forma tal que se puedan transformar en expresiones equivalentes mas sencillas de manejar.
En este capítulo estudiaremos distintas expresiones algebraicas, operaciones y sus propiedades.

7.1 Expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es una combinación de números representados por letras, números y letras, vinculados entre si por las operaciones suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación . Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas.
Son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$\sqrt[3]{x} - 2x \qquad (x-1)^2 + \frac{1}{y} \qquad \frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} + 2y^4 \qquad 4xy^3z^2$$

7.2 Clasificación de las expresiones algebraicas.

$$\text{Expresiones Algebraicas} \begin{cases} \text{racionales} \begin{cases} \text{enteras} \\ \text{fraccionarias} \end{cases} \\ \text{irracionales} \end{cases}$$

Expresiones algebraicas racionales: es toda combinación de números y variables (que se denotan con letras), en ella las variables están vinculadas por las operaciones: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.
Ejemplo.

$$(x-1)^2 \qquad 2x^3 + 2x + 3$$

Las expresiones algebraicas racionales se clasifican en: expresiones algebraicas racionales enteras y fraccionarias.

Expresiones algebraicas racionales enteras: son expresiones en las que las variables están afectadas por las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación con exponentes naturales.
Ejemplo:

$$(x-3)^2 - 3x \qquad y^4 + 3xy + \sqrt[3]{8}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

esta última es una expresión algebraica racional entera pues las operaciones de radicación y división afectan a los coeficientes y no a las variables.

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias: son expresiones en las que alguna de las variables forma parte de un divisor o presenta exponente negativo.
Ejemplo:

$$\frac{x^2-6x+9}{x-3} \qquad\qquad a^4-\frac{1}{3}y^2+4x^{-2}$$

Expresiones algebraicas irracionales: son expresiones algebraicas en las que alguna de las variables aparece afectada por radicales o exponente fraccionario.
Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x}-2x \qquad\qquad y^{\frac{2}{3}}-x^3-\sqrt[5]{y}$$

Nosotros estudiaremos expresiones algebraicas enteras.

7.3 Monomio.

Los monomios son expresiones algebraicas enteras de un solo término.

Ejemplo.

$$2xy^3 \text{ es un monomio}$$

En todo monomio se diferencian dos partes:
• el *coeficiente*, que es un número,
• la *parte literal*, formada por letras.

7.3.1 Grado de un monomio.

Se llama grado de un monomio a la suma de los exponentes de todas las letras que aparecen en él.

Ejemplo.

$$27y^3xz^2$$

Es un monomio donde: 27 es el coeficiente, y^3xz^2 es la parte literal del monomio, y es de grado 6.
En el monomio $-3x^4y^2z$: -3 es el coeficiente, x^4y^2z la parte literal y el grado es 7.

En este curso vamos a referirnos en general a monomios donde la parte literal es solamente una variable elevada a cualquier potencia natural.

Los monomios con los que trabajaremos tienen asociada una función potencial cuyo dominio es el conjunto $I\!R$ y los notaremos

$$M(x) = a\,x^n$$

donde $a \in I\!R$ y $n \in I\!N_0$.

- Si $a \neq 0$ diremos que $M(x) = a\,x^n$ es un monomio de grado n.
- Si $a = 0$, el monomio no tiene grado, y es llamado *nulo* .

Observación: Un monomio de la forma $a\,x^0$ con $a \neq 0$ representa al número real (no nulo) a, pues $x^0 = 1$, es decir, que el monomio $a\,x^0 = a$ tiene grado 0 (cero). A los monomios que son números reales distintos del cero los llamaremos *constantes*.
NOTA: A los monomios de grado 1 (uno) los llamaremos *lineales*; a los de grado 2 (dos) *cuadráticos* y a los de grado 3 (tres) *cúbicos*.

Ejercicio 1. Determinar el grado de los siguientes monomios:

(i) $M_1(x) = 2\,x$ tiene grado ...

(ii) $M_2(x) = -3\,x^4$ tiene grado ...

(iii) $M_3(x) = \dfrac{1}{4}\,x^2$ tiene grado ...

(iv) $M_4(x) = -\dfrac{5}{2}$ tiene grado ...

(v) $M_5(x) = 0$ tiene grado ? ...

Notaciones:

Sean $a \in I\!R$ y $n \in I\!N_0$ entonces

(1) $a.\,x^n = a\,x^n$,

(2) $(-a)\,x^n = -a\,x^n$,

(3) $0\,x^n = 0$,

(4) $x^n = 1\,x^n$,

(5) $-x^n = -1\,x^n$,

(6) $x^1 = x$.

NOTA: Si $a \in I\!R$ entonces $-a$ representa al *opuesto de a*.

7.3.2 Monomios semejantes.

Dos o más monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplo.

- $-3b^2c$ y $5b^2c$ son monomios semejantes.
- $2\,x^3$ y $-4\,x^3$ son monomios semejantes, porque ambos son de grado 3 o cúbicos.
- $\dfrac{5}{4}\,x^2$ y $-x^2$ son monomios semejantes, porque ambos son de grado 2 o cuadráticos.
- -2 y $\dfrac{1}{3}$ son monomios semejantes, porque ambos son de grado 0 o constantes.
- $-x$ y $5\,x$ son monomios semejantes, porque ambos son de grado 1 o lineales.

Los monomios semejantes pueden sumarse o restarse dando por resultado otro monomio semejante a los anteriores.

Ejemplo.
$-3b^2c + 5b^2c = (-3+5)b^2c = 2b^2c$

7.3.3 Operaciones con monomios semejantes.

Suma de monomios.
Dados dos monomios semejantes $M_1(x) = a\,x^n$ y $M_2(x) = b\,x^n$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$M_1(x) + M_2(x) = (a+b)\,x^n$$

es un monomio semejante a los dados si $a+b \neq 0$. Cuando a y b sean opuestos, es decir, si $a+b=0$ entonces $M_1(x)+M_2(x) = (a+b)\,x^n = 0\,x^n = 0$ (polinomio nulo). En este caso diremos que los monomios M_1 y M_2 son opuestos.

Ejemplos.

(i) $3\,x^2 + 4\,x^2 = (3+4)\,x^2 = 7\,x^2,$

(ii) $-x + 2\,x = -1\,x + 2\,x = (-1+2)\,x = 1\,x = x,$

(iii) $\dfrac{1}{2}\,x^3 + (-2)\,x^3 = \left(\dfrac{1}{2} + (-2)\right)\,x^3 = \left(\dfrac{1}{2} - 2\right)\,x^3 = \left(\dfrac{1-4}{2}\right)\,x^3 = -\dfrac{3}{2}\,x^3,$

(iv) $-4\,x^5 + 4\,x^5 = (-4+4)\,x^5 = 0\,x^5 = 0.$

Multiplicación de monomios.
Dados dos monomios (semejantes o no) $M_1(x) = a\,x^n$ y $M_2(x) = b\,x^k$ de grados n y k respectivamente si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$M_1(x).\,M_2(x) = (a.\,b)\,x^{n+k}$$

es un monomio de grado $n + k$, pues $a.\,b \neq 0$.

Si M_1 fuese una constante (no nula), digamos $M_1(x) = a$ con $a \in I\!R$ y $a \neq 0$ y $M_2(x) = b\,x^n$ con $b \neq 0$, entonces $M_1(x).\,M_2(x) = (a.b)\,x^n$.

Si $a = 0$ entonces M_1 es el polinomio nulo, esto es, $M_1(x) = 0$. Luego el producto es $M_1(x).\,M_2(x) = (0.\,b)\,x^n = 0\,x^n = 0$.

Ejemplos.

(i) $2\,x^3.\,3\,x^2 = (2.\,3)\,x^{3+2} = 6\,x^5$,

(ii) $-\dfrac{1}{2}\,x.\,\dfrac{3}{2}\,x = \left(-\dfrac{1}{2}.\,\dfrac{3}{2}\right).\,x^{1+1} = -\dfrac{3}{4}\,x^2$,

(iii) $-\dfrac{1}{3}\,x^2.\,(-3\,x^4) = \left(-\dfrac{1}{3}.\,(-3)\right).\,x^{2+4} = 1\,x^6 = x^6$,

(iv) $\dfrac{2}{3}.\,\dfrac{1}{4}\,x^3 = \left(\dfrac{2}{3}.\,\dfrac{1}{4}\right)\,x^3 = \dfrac{1}{6}\,x^3$,

(v) $0.\,\dfrac{1}{5}\,x^4 = \left(0.\,\dfrac{1}{5}\right)\,x^4 = 0\,x^4 = 0$.

7.4 Polinomio.

Un polinomio es una suma algebraica de monomios.

Durante el desarrollo de este tema nos referiremos a polinomios donde la parte literal está constituida solamente por una variable elevada a cualquier exponente natural.

Llamaremos *polinomio en la variable* x o simplemente *polinomio* a toda expresión de la forma

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r,$$

donde los $m_1, m_2, \cdots, m_r$ son monomios en la variable x (semejantes o no).

Así, por ejemplo, si $m_1 = 2\,x$, $m_2 = \dfrac{3}{4}\,x^2$, $m_3 = x^3$ y $m_4 = -1$ entonces

$$p = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 2\,x + \frac{3}{4}\,x^2 + x^3 + (-1) \text{ es un polinomio.}$$

Al conjunto de todos los polinomios en la variable x a coeficientes reales lo simbolizaremos con $\mathbb{R}(x)$, es decir, $\mathbb{R}(x) = \{p \,/\, p \text{ es un polinomio}\}$.

Es frecuente presentar a todo polinomio p no nulo de alguna de las dos maneras siguientes, ordenando a los monomios que lo forman según el grado:

EN FORMA DECRECIENTE:

$$(1) \qquad P = a_n\,x^n + \cdots + a_1\,x + a_0, \text{ donde } a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \text{ con } a_n \neq 0,$$

o sino,

EN FORMA CRECIENTE:

$$(2) \qquad P = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n, \text{ donde } a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \text{ con } a_n \neq 0.$$

NOTA: Nosotros utilizaremos la forma (1), es decir, la forma decreciente.

Definición. Sea P un polinomio escrito en la forma (1). Diremos que:

(i) los números reales $a_n, \cdots, a_1, a_0$ son los *coeficientes de* P,

(ii) a_0 es el *término independiente* o *coeficiente constante*,

(iii) $a_n \neq 0$ es el *coeficiente principal*, coeficiente del monomio no nulo de mayor grado,

(iv) n es el *grado del polinomio*, es el mayor de los grados entre todos los monomios no nulos.

Observación.
El polinomio nulo 0 es igual a los monomios $0\,x^5 = 0\,x^2 = \cdots$, etc. y a los polinomios $0\,x^3 + 0\,x^2 + 0\,x + 0 = 0\,x + 0 = \cdots$, etc. todos aparentemente de distinto grado, sin embargo ninguno tiene grado, ya que de acuerdo a la definición *el grado es el mayor exponente de la variable x entre los monomios cuyos coeficientes sean distintos de cero* y en estos casos, ninguno tiene coeficiente distinto de cero; al contrario, todos los coeficientes son ceros.

Definiciones.

(1) Al polinomio que tenga coeficiente principal igual a 1 (uno) lo llamaremos *mónico.*

(2) Al polinomio que tenga dos monomios (términos) no nulos nada más lo llamaremos *binomio.*

(3) Al polinomio que tenga tres monomios (términos) no nulos solamente lo llamaremos *trinomio.*

(4) Al que tenga cuatro monomios (términos) no nulos nada más lo llamaremos *cuatrinomio.*

(5) Y al que tenga más de cinco monomios (términos) no nulos lo llamaremos *polinomio de r términos*, donde $r \in \mathbb{N}$ y $r \geq 5$.

NOTA: El polinomio constante $P = 1$ es mónico, pues su coeficiente principal a_0 (que coincide con el término independiente) es igual 1.

7.4.1 Ordenamiento y completamiento.

Dado un $p \in \mathbb{R}(x)$, éste puede estar representado como suma de monomios en forma desordenada (según el grado de cada uno) y además incompleto, esto es, ausencia de términos intermedios. En caso de ser cierto, lo que hacemos es completar con coeficientes iguales a 0 (cero) los términos faltantes y ordenar en forma decreciente (de mayor a menor) los monomios según el grado de acuerdo con la forma (1).

Ejemplo. Si $P(x) = 3\,x^2 + 2\,x^4 + 5$. Es claro que, este polinomio está desordenado e incompleto (faltan el término cúbico y el lineal). Para completarlo y ordenarlo, procedemos de la siguiente manera:

1°) Hallamos el grado del polinomio P. En el ejemplo, el grado de P es 4.

2°) A partir del monomio de grado 4 empezamos a escribir al polinomio P como suma de monomios, en forma decreciente y completando con coeficientes ceros y potencias de x los términos que faltan hasta llegar al término independiente. En nuestro ejemplo,

$$P = 2\,x^4 + 0\,x^3 + 3\,x^2 + 0\,x + 5.$$

siendo el coeficiente principal $a_4 = 2$ y el término independiente $a_0 = 5$.

Ejercicio 2. Ordene y complete los siguientes polinomios. Además, señalar el grado, coeficiente principal y término independiente de cada polinomio. Indique si hay alguno que sea mónico.

a) $P(x) = -\dfrac{3}{5}\,x^2 + 4\,x^5 - x^3 + 8,$

b) $Q(x) = 2\,x^6 - \dfrac{1}{3}\,x^4 + \dfrac{1}{2} - 3\,x,$

c) $M(x) = \dfrac{2}{3}\,x^2 - x^3 + 4\,x,$

d) $S(x) = -2 + x^2,$

e) $T(x) = x,$

f) $U(x) = x^5 + 1,$

g) $V(x) = 3 - x,$

h) $W(x) = 1.$

7.4.2 Funciones polinómicas.

Cada polinomio

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

tiene asociada una función polinómica f con dominio y codominio en $I\!R$, definida por la fórmula

$$f(x) = a_n x^n + a - n - 1x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Definición. Llamaremos función polinómica a toda función real de variable real $P : I\!R \to I\!R$ cuya fórmula definitoria sea un polinomio. Por ejemplo, $P(x) = x^2 + 1$.

De ahora en adelante, utilizaremos indistintamente la notación P o $P(x)$ para simbolizar a un polinomio de $I\!R(x)$.

En esta unidad se hablará indistintamente de polinomios o de funciones polinómicas.

7.4.3 Valor numérico de un polinomio.

Se llama valor numérico de un polinomio $P(x)$ en $x = k$, al valor que toma el polinomio cuando se reemplaza x por el valor k.
Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces el valor numérico de $P(x)$ en $x = k$ es:

$$P(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_2k^2 + a_1k + a_0$$

Ejemplo.
Sea $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$.
El valor de $Q(x)$ en $x = -2$ es

$$Q(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -43$$

7.5 Operaciones con polinomios.

Sean P y Q dos polinomios en $I\!R(x)$:

7.5.1 Suma.

Teniendo en cuenta la forma (1) de presentar a un polinomio, podemos escribir

$$P(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0, \text{ donde } a_0, a_1, \cdots, a_n \in I\!R \text{ con } a_n \neq 0,$$

$$Q(x) = b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0, \text{ donde } b_0, b_1, \cdots, b_m \in I\!R \text{ con } b_m \neq 0$$

de grados n y m respectivamente, entonces

CASO 1: Si $n = m$, definimos:

$$P + Q = (a_n + b_n)\, x^n + \cdots + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0).$$

En este caso el grado de $P + Q$ es n si $a_n + b_n \neq 0$, caso contrario es menor.

CASO 2: Si $n > m$, definimos:

$$P + Q = a_n\, x^n + \cdots + (a_m + b_m)\, x^m + \cdots + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0).$$

En este caso el grado de $P + Q$ es n.

CASO 3: Si $n < m$, definimos:

$$P + Q = b_m\, x^m + \cdots + (a_n + b_n)\, x^n + \cdots + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0),$$

En este caso el grado de $P+Q$ es m.

Es decir, los coeficientes del polinomio suma se obtienen sumando los coeficientes de los monomios semejantes y el grado del polinomio suma es menor o igual al mayor de los grados de los polinomios dados (según el caso).

Ejemplo. Sean $P(x) = 2\,x^4 - \dfrac{1}{2}\,x^2 - 1 + 3\,x$ y $Q(x) = x^2 + \dfrac{3}{4}\,x^3 + 4$ dos polinomios de grados 4 y 3 respectivamente.

Primero ordenamos y completamos tanto P como Q de la siguiente manera:

$$P(x) = 2\,x^4 + 0\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x - 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{3}{4}\,x^3 + 1\,x^2 + 0\,x + 4.$$

Por lo tanto, al ser $4 > 3$, por el CASO 2 tenemos que:

$$P+Q = 2\,x^4 + \left(0 + \frac{3}{4}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + (3+0)\,x + (-1+4) =$$
$$2\,x^4 + \frac{3}{4}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x + 3.$$

y además el grado de $P+Q$ es 4 (que es el mayor de los grados).

Otra manera de resolver la suma de polinomios es colocarlos, después de ordenarlos y completarlos, uno arriba del otro encolumnando los monomios semejantes, para luego sumar dichos monomios como se vio anteriormente y armar el polinomio suma como sigue:

$$\begin{array}{rl}
P(x) = & 2\,x^4 + 0\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x - 1 \\
Q(x) = & \qquad\quad\ \frac{3}{4}\,x^3 + 1\,x^2 + 0\,x + 4 \\
\hline
P(x) + Q(x) = & 2\,x^4 + \frac{3}{4}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x + 3
\end{array}$$

Así, el grado del polinomio suma $P+Q$ es igual a 4, que es el mayor de los dos grados.

7.5.2 Producto.

Al igual que antes, teniendo en cuenta la forma (1) de presentar a un polinomio, podemos escribir:

$$P(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0, \text{ donde } a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \text{ con } a_n \neq 0, \;\text{ y}$$

$$Q(x) = b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0, \text{ donde } b_0, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R} \text{ con } b_m \neq 0,$$

de grados n y m respectivamente, entonces aplicando la prodiedad distributiva múltiple resulta que

$$\begin{aligned}
P.\,Q &= (a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0).\,(b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0) = a_n\, x^n.\,(b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0) + \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots + a_1\, x.\,(b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0) + a_0.\,(b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0) \\
&= a_n\, x^n.\,b_m\, x^m + \cdots + a_n\, x^n.\,b_1\, x + a_n\, x^n.\,b_0 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&\quad + a_1\, x.\,b_m\, x^m + \cdots + a_1\, x.\,b_1\, x + a_1\, x.\,b_0 + a_0.\,b_m\, x^m + \cdots + a_0.\,b_1\, x + a_0.\,b_0 \\
&= (a_n.\,b_m)\, x^{n+m} + \cdots + (a_n.\,b_1)\, x^{n+1} + (a_n.\,b_0)\, x^n + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&\quad + (a_1.\,b_m)\, x^{1+m} + \cdots + (a_1.\,b_1)\, x^2 + (a_1.\,b_0)\, x + (a_0.\,b_m)\, x^m + \cdots + (a_0.\,b_1)\, x + (a_0.\,b_0) \\
&= (a_n.\,b_m)\, x^{n+m} + \cdots + (a_1.\,b_0 + a_0.\,b_1)\, x + (a_0.\,b_0) = c_{n+m}\, x^{n+m} + \cdots + c_1\, x + c_0,
\end{aligned}$$

donde los coeficientes $c_0, c_1, \cdots, c_{n+m}$ del polinomio producto se calculan con las fórmulas:

$$\begin{aligned}
&c_0 = a_0.\,b_0, \\
&c_1 = a_1.\,b_0 + a_0.\,b_1, \\
&\quad\vdots \\
&c_{n+m} = a_n.\,b_m,
\end{aligned}$$

siendo $n + m$ (que es el grado del polinomio producto).

Observación. Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se verifica que:

$$grado(P(x)Q(x)) = grado(P(x)) + grado(Q(x))$$

Ejemplo. Sean $P(x) = 2\,x^2 + 3$ y $Q(x) = x + 3\,x^3 + 5$, entonces el grado de P es 2 y el de Q es 3. Luego, ordenando y completando ambos polinomios resulta que,

$$\begin{aligned}
P(x) &= 2\,x^2 + 0\,x + 3, \\
Q(x) &= 3\,x^3 + 0\,x^2 + 1\,x + 5.
\end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
P(x).\,Q(x) &= (2\,x^2+0\,x+3).\,(3\,x^3+0\,x^2+x+5) = \\
&= 2\,x^2.\,(3\,x^3+0\,x^2+x+5)+0\,x.\,(3\,x^3+0\,x^2+x+5)+3.\,(3\,x^3+0\,x^2+x+5) = \\
&= 6\,x^6+0\,x^4+2\,x^3+10\,x^2+0\,x^4+0\,x^3+0\,x^2+0\,x+9\,x^3+0\,x^2+3.\,x+15 = \\
&= 6\,x^5+(0+0)\,x^4+(2+0+9)\,x^3+(10+0)\,x^2+(0+3)\,x+15 = \\
&= 6\,x^5+0\,x^4+11\,x^3+10\,x^2+3\,x+15,
\end{aligned}
$$

y el grado de $P.\,Q$ es $5 = 2+3$.

Otra forma de resolverlo es colocando los polinomios uno arriba del otro, después de ordenarlos y completarlos, para después multiplicar los monomios entre sí empezando por los términos independientes, encolumnando según el grado los resultados y finalmente sumar. Luego,

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & p = & 2\,x^2 & +\,0\,x & +\,3 \\
 & & .\ q = & 3\,x^3 & +\,0\,x^2 & +\,x & +\,5 \\
\hline
 & & & & 10\,x^2 & +\,0\,x & +\,15 \\
+ & & & 2\,x^3 & +\,0\,x^2 & +\,3\,x & \\
 & & 0\,x^4 & +\,0\,x^3 & +\,0\,x^2 & & \\
 & 6\,x^5 & +\,0\,x^4 & +\,9\,x^3 & & & \\
\hline
p.\,q = & 6\,x^5 & +\,0\,x^4 & +\,11\,x^3 & +\,10\,x^2 & +\,3\,x & +\,15
\end{array}
$$

Producto de un real por un polinomio.
Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y k es un número real, entonces:

$kP(x) = (ka_n)x^n + (ka_{n-1})x^{n-1} + ... + (ka_2)x^2 + (ka_1)x + (ka_0)$

Ejemplo.
Si $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2$,
$(-3)P(x) = -15x^3 - 6x^2 + 15x - 6$
El grado de $(-3)P(x)$ es 3

7.5.3 Resta.

Antes veamos la noción de polinomio opuesto. Dado un polinomio p llamamos polinomio opuesto de p al polinomio que notamos $-P$ y que se obtiene multiplicando a P por -1, esto es, $-P = -1.\,P$.

Así, por ejemplo, si $P(x) = 5\,x^4 - \dfrac{3}{2}\,x^2 + 1$ entonces

$$-P(x) = -1.\left(5\,x^4 - \frac{3}{2}\,x^2 + 1\right) = -5\,x^4 + \frac{3}{2}\,x^2 - 1.$$

Observación.
El polinomio opuesto de P se obtiene cambiando de signo a cada uno de los términos del polinomio P y tiene el mismo grado que el polinomio P.

Ahora sí, estamos en condiciones de definir la resta de polinomios.

Sean $P, Q \in I\!R(x)$ de grados n y m respectivamente, definimos el polinomio resta

$$P - Q = P + (-Q),$$

Es decir, restar dos polinomios es sumarle al primero el opuesto del segundo y el grado del polinomio resta es (como ya se dijo para el polinomio suma) menor o igual que el grado mayor de los dos.

Ejemplo.

Sean $P(x) = 3\,x^4 - \dfrac{1}{2}\,x^2 + 4\,x - 1$ y $Q(x) = -x^3 + 2\,x^2 - 3\,x$ dos polinomios de grado 4 y de grado 3 respectivamente. Calcular $P - Q$.

Lo primero que hay que hacer es ordenar y completar ambos polinomios. Luego,

$$P(x) = 3\,x^4 + 0\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,x - 1$$
$$\text{y} \quad Q(x) = -x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 0.$$

Después se halla el polinomio opuesto de Q que es:

$$-Q(x) = x^3 - 2\,x^2 + 3\,x - 0$$

NOTA: Cambiarle el signo a un término que tenga coeficiente igual a 0 (cero) no tiene sentido, porque el número 0 no tiene signo, aunque en la práctica lo hagamos.

Por lo tanto, de acuerdo con la definición y por el CASO 2 de la suma al ser $4 > 3$ resulta que:

$$P - Q = P + (-Q) = \left(3\,x^4 + 0\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 4\,x - 1\right) + (x^3 - 2\,x^2 + 3\,x - 0) =$$
$$= 3\,x^4 + (0+1)\,x^3 + \left(-\frac{1}{2} + (-2)\right)\,x^2 + (4+3)\,x + (-1 + (-0)) =$$

$$= 3\,x^4 + 1\,x^3 + \left(-\frac{5}{2}\right)\,x^2 + 7\,x + (-1) = 3\,x^4 + x^3 - \frac{5}{2}\,x^2 + 7\,x - 1.$$

Así, el polinomio resta $P - Q = 3\,x^4 + x^3 - \dfrac{5}{2}\,x^2 + 7\,x - 1$ es de grado 4, que es el mayor de los grados.

NOTA: De ahora en más escribiremos $gr(P)$ para indicar el grado de P.

7.5.4 Potencias de un polinomio.

Definición. Sea $P \in I\!R(x)$, definimos las potencias de P por medio de las reglas:

$P_1)$ $P^0 = 1$,

$P_2)$ $P^{n+1} = P^n.\,P$ con $n \in I\!N_0$.

Luego,
$$\begin{aligned} p^1 &= p^{0+1} = p^0.\,p = 1.\,p = p, && \text{[por } P_2),\ P_1) \text{ y } R_6)] \\ p^2 &= p^{1+1} = p^1.\,p = p.\,p, && \text{[por } P_2) \text{ y lo anterior]} \\ p^3 &= p^{2+1} = p^2.\,p = (p.\,p).\,p = p.\,p.\,p, && \text{[por } P_2), \text{ el anterior y } R_5)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así siguiendo, resulta que el caso general:

$$p^n = \underbrace{p.\,p.\,\cdots.\,p}_{n-\text{veces}}.$$

Propiedades de la potencias de polinomios.

Dados $p, q \in I\!R(x)$ y $n, m \in I\!N_0$, se verifican las siguientes propiedades:

$P_3)$ Distributiva del exponente con respecto al producto:
$(p.\,q)^n = p^n.\,q^n = (p.\,q)^n$,

$P_4)$ Producto de potencias de igual base: $p^n.\,p^m = p^{n+m}$,

$P_5)$ Cociente de potencias de igual base: $p^n : p^m = p^{n-m}$, con $n \geqslant m$,

$P_6)$ Fracción de potencias de igual base: $\dfrac{p^n}{p^m} = p^{n-m}$, con $n \geqslant m$,

$P_7)$ Potencia de potencia: $(p^n)^m = p^{n.\,m}$.

NOTA: Tanto las propiedades de las operaciones elementales como la de la potenciación con polinomios son análogas (las mismas) que las vistas el año anterior para números reales.

Algunos productos especiales.
Algunos de los siguientes productos suelen presentarse con frecuencia en cálculos algebraicos.

• Diferencia de cuadrados.
$(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$

$$\boxed{(x+a).(x-a) = x^2 - a^2}$$

• Cuadrado de un binomio.
$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2$

$$\boxed{(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

$(x-a)^2 = (x-a)(x-a) = x^2 - ax - ax + a^2$

$$\boxed{(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2}$$

Se le llama Trinomio cuadrado perfecto.

• Cubo de un binomio.

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x+a)(x+a)(x+a) = (x^2+2ax+a^2)(x+a) = x^3+2ax^2+a^2x+x^2a+2a^2x+a^3 \\ &= x^3 + 3a^2x + 3x^2a + a^3\end{aligned}$$

$$\boxed{(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3}$$

$$\boxed{(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3a^2x - a^3}$$

Se le llama Cuatrinomio cubo perfecto.

7.5.5 Cociente.

La división de polinomios se efectúa empleando el mismo procedimiento que se usa para dividir los números reales.
El siguiente resultado es muy importante:

“Dados dos polinomios $P, Q \in I\!R(x)$ con $Q \neq 0$, existen dos únicos polinomios C y $R \in I\!R(x)$ tales que:

$$P = Q.\, C + R,$$

donde $R = 0$ o $gr(R) < gr(Q)$.”

Es usual la siguiente terminología, llamar al polinomio:

P: *dividendo*
Q: *divisor*
C: *cociente*
R: *resto.*

Realizar el cociente entre P y Q es hallar los polinomios C y R.

Método para hallar el cociente y el resto.

Sean $P, Q \in I\!R(x)$ tales que $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$.

1) Si $n < m$, e.d., $gr(P) < gr(Q)$ entonces $C = 0$ y $R = P$.

2) Si $n \geqslant m$, e.d., $gr(P) \geqslant gr(Q)$ entonces:

2.1) Escribimos a P y Q en la forma (1)

$P(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0$, y

$Q(x) = b_m\, x^m + \cdots + b_1\, x + b_0$ (completando cuando haga falta).

2.2) Luego,

$$\begin{array}{l|l} P & \quad Q \\ \cline{2-2} P_1 & \dfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} \end{array} \quad , \qquad \text{donde} \quad P_1 = P - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}.\, Q.$$

2.3) (i) Si $gr(P_1) < gr(Q)$ entonces $C = \dfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}$ y $R = P_1$.

(ii) Si $k = gr(P_1) \geqslant gr(Q)$, hallamos $P_2 = P_1 - \dfrac{c_k}{b_m}\, x^{k-m}.\, Q$, donde C_k es el coeficiente principal de P_1.

$\vdots$

Seguimos este proceso hasta llegar a un P_j tal que $gr(P_j) < gr(Q)$.

NOTA: Recordar que el coeficiente $\dfrac{a_n}{b_m} = a_n : b_m$.

Ejemplo.

Sean $P(x) = -\,2\,x^3 + x^4 + 2\,x - 1$ y $Q(x) = 2\,x^2 - x + 1$ tales que

$$gr(P) = 4 > 2 = gr(Q).$$

Lo primero que debemos hacer es completar y ordenar los polinomios:

$$P(x) = x^4 -\ 2\,x^3 + 0\,x^2 + 2\,x - 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = 2\,x^2 - x + 1.$$

Luego, colocamos el polinomio dividendo y el polinomio divisor en la forma tradicional y realizamos la división:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 -\ 2\,x^3 +\ 0\,x^2 +\ 2\,x -\ 1 & \quad 2\,x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
+ & & \\
 & \underline{-\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2} & \quad \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{4}\,x - \frac{5}{8} \\
 & -\frac{3}{2}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 2\,x & \\
+ & & \\
 & \underline{\frac{3}{2}\,x^3 - \frac{3}{4}\,x^2 + \frac{3}{4}\,x} & \\
 & -\frac{5}{4}\,x^2 + \frac{11}{4}\,x - 1 & \\
+ & & \\
 & \underline{\frac{5}{4}\,x^2 - \frac{5}{8}\,x + \frac{5}{8}} & \\
 & \frac{17}{8}\,x - \frac{3}{8} &
\end{array}
$$

donde $C(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 - \dfrac{3}{4}\,x - \dfrac{5}{8}$ es el polinomio cociente y $R(x) = \dfrac{17}{8}\,x - \dfrac{3}{8}$ es el polinomio resto tal que $gr(R) = 1 < 2 = gr(Q)$.

NOTA:

- La división $P(x) : Q(x)$ puede efectuarse siempre que $gr(P(x)) \leqslant gr(Q(x))$.
- El grado del resto debe ser menor que el grado del divisor, $gr(R(x)) < gr(Q(x))$ o bien $R(x) = 0$.
- $gr(C(x)) = gr(P(x)) - gr(Q(x))$.

Ejercicio 3. Dados:

$P(x) = 3\,x^4 - \dfrac{1}{2}\,x^2 + x, \quad Q(x) = 3\,x - 2\,x^3 + 1, \quad R(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 - 1, \quad S(x) = x - 2,$
y $\quad T(x) = -x^2 + \dfrac{1}{3}.$

Resolver las siguientes operaciones entre polinomios:

a) $P + Q =$

b) $Q - P =$

c) $P.\,Q =$

d) $P : Q =$

e) $Q.\,S - R.\,T =$

f) $(P + Q.\,R) : S =$

Propiedades de las operaciones.

Para todo $P, Q, R \in I\!R(x)$ se verifican las siguientes propiedades:

R_1) Asociatividad de la suma: $P + (Q + R) = (P + Q) + R = P + Q + R.$

R_2) Conmutatividad de la suma: $P + Q = Q + P.$

R_3) Existencia del elemento neutro de la suma: Existe $0 \in I\!R(x)$, llamado polinomio nulo, tal que $P + 0 = 0 + P = P$, donde el símbolo 0 es el número real cero.

R_4) Existencia del opuesto: Para todo $P \in I\!R(x)$ existe $-P \in I\!R(x)$, llamado el polinomio opuesto de P, tal que $P + (-P) = -P + P = 0.$

R_5) Asociatividad del producto: $P.\,(Q.\,R) = (P.\,Q).\,R = P.\,Q.\,R.$

R_6) Existencia del elemento neutro del producto:

Existe $1 \in I\!R(x)$ tal que $P.\,1 = 1.\,P = P$, donde el símbolo 1 es el número real uno.

R_7) Conmutatividad del producto: $P.\,Q = Q.\,P.$

R_8) Distributivadad del producto con respecto a la suma:
- A derecha: $P.(Q+R) = P.Q + P.R.$
- A izquierda: $(P+Q).R = P.R + Q.R.$

R_9) Uniformidad de la suma y el producto:
- Si $P = Q$ entonces $P + R = Q + R$ para todo $R \in I\!R(x)$.
- Si $P = Q$ entonces $P.R = Q.R$ para todo $R \in I\!R(x)$.

R_{10}) Cancelación de la suma y simplificación del producto:
- Si $P + R = Q + R$ para todo $R \in I\!R(x)$ entonces $P = Q$.
- Si $P.R = Q.R$ para todo $R \in I\!R(x)$, con $R \neq 0$, entonces $P = Q$.

R_{11}) $0.P = P.0 = 0.$

R_{12}) $-1.P = P.(-1) = -P.$

Propiedades de la potencias de polinomios.

Dados $P, Q \in I\!R(x)$ y $n, m \in I\!N_0$, se verifican las siguientes propiedades:

P_3) Distributividad del exponente con respecto al producto:
$(P.Q)^n = P^n.Q^n = (P.Q)^n,$

P_4) Producto de potencias de igual base: $P^n.P^m = P^{n+m},$

P_5) Cociente de potencias de igual base: $P^n : P^m = P^{n-m}$, con $n \geqslant m$,

P_6) Fracción de potencias de igual baase: $\dfrac{P^n}{P^m} = P^{n-m}$, con $n \geqslant m$,

P_7) Potencia de potencia: $(P^n)^m = P^{n.m}.$

Ejercicio 5. Aplicando las fórmulas del cuadrado y del cubo de un binomio, y usando las propiedades adecuadas, resolver las siguientes potencias de polinomios.

a) $(x+1)^2 =$

b) $(2 - 3\,x)^2 =$

c) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 =$

d) $(x^2+1)^3 =$

e) $(2x-1)^3 =$

f) $(3-x)^3 =$

Ejercicio 6. Dado $Q(x) = -\dfrac{1}{4}\,x^2 + x - 1$. Hallar:

i) $Q(1) =$ *ii)* $Q(0) =$ *iii)* $Q(2) =$

iv) $Q(-2) =$ *v)* $Q\left(-\dfrac{2}{3}\right) =$ *vi)* $Q(0) =$

7.6 Regla de Ruffini.

Este método sirve para hallar los coeficientes del polinomio cociente, que es el resultante de la división entre un polinomio P cualquiera tal que $gr(P) \geqslant 2$ y otro polinomio Q de la forma $x - a$.

NOTA: Notemos que el polinomio divisor Q es lineal y mónico, es decir, $gr(Q) = 1$ y el coeficiente principal $a_1 = 1$.

Supongamos que $gr(P) = n \geqslant 2$. Luego ordenamos y completamos P. Así, $P(x) = a_n\,x^n + \cdots + a_1\,x + a_0$, con $a_n \neq 0$ y consideremos $Q(x) = x - a$.

$$
\begin{array}{r c|c c c c c|c l}
 & & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & \\
 & & \downarrow & & & & & & + \\
\text{opuesto del térm. indepte. de } q \longrightarrow & a & & a.\,a_n & a.b_{n-2} & \cdots & \cdots & a.\,b_0 & \\
\hline
 & \times & a_n & b_{n-2} & \cdots & \cdots & b_0 & \boxed{r} & \longleftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

coeficientes de c

donde $b_{n-2} = a_{n-1} + a.\,a_n$ y $r = a_0 + a.\,b_0$.

Luego, tomando $a_n = b_{n-1}$ como coeficiente principal del polinomio cociente y los demás coeficientes del polinomio son los valores obtenidos en la tabla (exceptuando el resto) se arma el polinomio $C = b_{n-1}\,x^{n-1} + b_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + b_1\,x + b_0$ de manera tal que $gr(C) = n - 1$, es decir, un grado menos que el grado del polinomio P.

Ejemplo. Sean $P(x) = 3\,x^5 - 2\,x^3 + \dfrac{1}{3}\,x^2 - x + \dfrac{3}{2}$ y $Q(x) = x - 1$. Calcular $P : Q$.

Primero ordenamos y completamos P.

Así, $\quad P(x) = 3\,x^5 + 0\,x^4 - 2\,x^3 + \dfrac{1}{3}\,x^2 - x + \dfrac{3}{2}.$

Luego, colocamos los coeficientes de P en la tabla como así también el opuesto del término independiente de Q y aplicamos la regla:

$$
\begin{array}{c|ccccc|cl}
 & 3 & 0 & -2 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{3}{2} & \\
 & \downarrow & & & & & & + \\
1 & & 3 & 3 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \\
\hline
\times & 3 & 3 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \boxed{\frac{11}{6}} & \longleftarrow \text{ resto}
\end{array}
$$

donde $3,\ 3,\ 1,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}$ son los coeficientes del polinomio cociente C, que es de un grado menos que el $gr(P) = 5$, es decir, $gr(C) = 4$.
Por lo tanto, $C(x) = 3\,x^4 + 3\,x^3 + 1\,x^2 + \dfrac{4}{3}\,x + \dfrac{1}{3}$ y $\quad R(x) = \dfrac{11}{6}$ es el polinomio resto.

7.7 Teorema del resto.

Un resultado muy importante dentro de la teoría de polinomios es el siguiente:

"El resto de dividir un polinomio $P(x)$ tal que $gr(P(x)) \geqslant 1$ por un polinomio de la forma $x - a$, es igual al valor numérico de $P(x)$ en $x = a$, esto es, el resto $R(x) = P(a)$."

NOTA: Si el polinomio divisor fuese de la forma $x + a$ se considera $x + a = x - (-a)$ para así poder aplicar el teorema del resto, obteniendo en ese caso que el resto $R(x) = P(-a)$, donde $-a$ es el opuesto de a.

Ejemplo. Para calcular el resto de la división entre $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ y $Q(x) = x - 2$, es suficiente determinar el valor numérico de $P(x)$ en $x = 2$.
$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 16$
El resto es $R(x) = 16$.

Ejercicio 7. Dados $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - x - 2$ y

(i) $Q_1(x) = x + 1$,

(ii) $Q_2(x) = x - 2$,

(iii) $Q_3(x) = x = x + 0 = x - 0$

aplicando la regla de Ruffini verificar que $R_1(x) = P(-1)$, $R_2(x) = P(2)$ y $R_3(x) = P(0)$, donde $R_i(x)$ es el resto de la división de $P(x)$ por $Q_i(x)$ con $i = 1, 2, 3$.

7.8 Divisibilidad.

Definición. Si al realizar la división de P por Q resulta que $R = 0$, esto es, el resto da cero, diremos que Q divide a P o, lo que es lo mismo, P es divisible por Q y lo simbolizaremos con $Q\,/\,P$.

Así, por el resultado importante del comienzo, tenemos que:

"Si $Q\,/\,P$ entonces existe $C \in I\!R(x)$ tal que $P = C.\,Q$, y viceversa".

NOTA: Notemos que, en ese caso, también $C\,/\,P$.

Definición. Si $P = C.\,Q$, diremos que C y Q son factores de P.

Ejemplo.
Sean $P(x) = 3\,x^2 - 5\,x - 2$ y $Q(x) = x - 2$. Entonces haciendo el cociente $P : Q$ obtenemos:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 3\,x^2 - 5\,x - 2 & \big|\ \ x - 2 \\ \cline{3-3}
+ & \underline{-3\,x^2 + 6\,x} & \quad 3\,x + 1 \\
 & 1\,x - 2 & \\
+ & \underline{-1\,x + 2} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

donde $C(x) = 3\,x + 1$ y $R(x) = 0$. Así, $P(x) = c.\,q$, esto es, $3\,x^2 - 5\,x - 2 = (3\,x + 1).\,(x - 2)$.

Por lo tanto, p es divisible por q.

Ejercicio 4. Aplique la regla de Ruffini para resolver el ejercicio hecho en el ejemplo anterior y verifique que el resto $r = 0$.

Raices de un polinomio.
Un número real x_0 es una raiz (real) de $P(x)$ si el valor del polinomio en x_0 da 0.
Esto es: $x = x_0$ es raiz de $P(x)$ si y solo si $P(x_0) = 0$.

Ejemplo
$x = 1$ es raíz de $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ porque $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$

Existen polinomios en $\mathbb{R}(x)$ que no tienen raices en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 + 1$ no tiene raices en el conjunto de los números reales, esto es, para todo $r \in \mathbb{R}$: $P(r) = r^2 + 1 \neq 0$, pues para todo número real r: $r^2 \geqslant 0$ siempre. (Verificarlo en algunos casos.)

Un polinomio $P(x)$ de grado n tiene a lo sumo n raices reales, es decir, 0 (ninguna), 1 (una), 2 (dos), $\cdots$ o n (ene) raices como máximo.

Las raíces pueden ser todas distintas, todas coincidentes (iguales), o distintas algunas y coincidentes otras.

A las raíces que no se repitan las llamaremos raíces simples y a las raíces que se repitan, esto es, a las coincidentes las llamaremos raíces multiples (doble, triple, cuádruple, etc. según la cantidad de veces que se repitan).

Diremos que una raiz tiene orden de multiplicidad k si se repite k veces, con $k \in \mathbb{N}$. Luego, una raiz simple tiene orden de multiplicidad 1, una doble tiene orden de multiplicidad 2, una triple tiene multiplicidad 3 y así siguiendo.

Ejercicio 8. Dado el polinomio $P(x) = 2\,x^3 - 14\,x - 12$ verificar que $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ y $x_3 = -2$ son raíces del polinomio $P(x)$.

7.9 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es transformarlo en un producto de dos o mas polinomios primos.

Hay diversos procedimientos que permiten hacerlo, el primero que veremos es el *factor común.*

7.9.1 Factor común

El factor común es el monomio que se forma con el divisor común mayor de los coeficientes del polinomio y la variable elevada al menor de los exponentes.

Ejemplos.

(a) $12x^5 - 9x^3 + 6x^4 = 3x^3(4x^2 - 3 + 2x)$

(b) $\dfrac{5}{6}x^4 + \dfrac{10}{9}x^7 - \dfrac{20}{27}x^4 - \dfrac{25}{12}x^6 = \dfrac{5}{3}x^2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}x^5 - \dfrac{4}{9}x - \dfrac{5}{4}x^4\right)$

7.9.2 Factor común por grupos

El factor común por grupos se aplica a los polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos. Se forman grupos de igual cantidad de términos de manera tal que en cada grupo haya un factor común, y a partir de la factorización de cada grupo, se obtiene un *nuevo factor común.*

Ejemplo.

(a) $x^3 + x^2 + 5x + 5 = x^2 \underbrace{(x+1)}_{\text{nuevo f.c.}} + 5 \underbrace{(x+1)}_{\text{nuevo f.c.}} = (x+1)(x^2+5)$

(a) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x \underbrace{(x-2)}_{\text{nuevo f.c.}} - 3 \underbrace{(x-2)}_{\text{nuevo f.c.}} = (x-2)(x-3)$

7.9.3 Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza como el cuadrado de un binomio.

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

Ejemplos.

(a) $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$

(b) $81 - 36x + 4x^2 = 9^2 - 2.9.2 + (2x)^2 = (9-2x)^2$

7.9.4 Cuatrinomio cubo perfecto

Un cuatrinomio cubo perfecto se factoriza como el cubo de un binomio.

$$\boxed{a^3 + 3a^2.b + 3a.b^2 + b^3 = (a+b)^3}$$

Ejemplos.
(a) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 3.x^2.3 + 3.x.3^2 + 3^3 = (x+3)^3$

(b) $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = (2x^3) + 3.(2x^2).(-5) + 3.2x.(-5)^2 + (-5)^2 = (2x-5)^3$

7.9.5 Diferencia de cuadrados

El producto entre la suma y la diferencia de dos monomios es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2}$$

Esto es:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Ejemplos.
(a) $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

(b) $25x^4 - 81 = (5x^2+9)(5x^2-9)$

7.9.6 Suma y resta de potencias de igual exponente

Para factorizar polinomios de la forma $x^n + a^n$ o bien $x^n - a^n$, se debe encontrar el valor de x para el cual el valor numérico del polinomio sea 0.

Ejemplos.
(a) $P(x) = x^3 + 8 = x^3 + 2^3$ entonces $P(-2) = (-2)^3 + 2^3 = -8 + 8 = 0$

Por el teorema del resto: $x^3 + 8$ es divisible por $x + 2$.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
-2 & & -2 & 4 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

$(x^3+8):(x+2) = x^2-2x+4$ entonces $x^3+8 = (x^2-2x+4)(x+2)$

7.10 Teorema de Gauss

Recordemos que la raiz de un polinomio es el valor de x que verifica que su valor numérico es 0 y puede tener a lo sumo tantas raices reales como el valor de su grado.

Todo polinomio de grado **n***, con* **n** *raíces reales, puede ser factorizado como:*

$$\boxed{P(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}$$

Ejemplo.
El polinomio $P(x) = x^2 - x - 6$ tiene como raices: $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$, entonces el polinomio puede escribirse como:

$$P(x) = x^2 - x - 6 = (x-x_1)(x-x_2) = (x-3)(x+2)$$

7.11 Expresiones algebraicas fraccionarias

Una *expresión algebraica fraccionaria* es el cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

7.11.1 Simplificación

Nuestro objetivo ahora será tratar de simplificar expresiones algebraicas fraccionarias, para ello primero se debe factorizar numerador y denominador y luego cancelar los factores que sean comunes a ambos.

Ejemplo. Simplificar las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias.

a) $\dfrac{x^2-9}{x^3-3x^2}$

$$\frac{x^2-9}{x^3-3x^2}=\frac{(x+3)(x-3)}{x^2(x-3)}=\frac{x+3}{x^2}$$

b) $\dfrac{x^2+6x+4}{x^3+2x^2+3x+6}$

$$\frac{x^2+6x+4}{x^3+2x^2+3x+6}=\frac{(x+2)^2}{x^2(x+2)+3(x+2)}=\frac{x+2}{x^2+3}$$

7.11.2 Multiplicación y división

Para multiplicar o dividir dos expresiones fraccionarias se procede como si fuesen fracciones.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\div\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).S(x)}{Q(x).R(x)}$$

7.11.3 Adición y sustracción

Para sumar o restar dos expresiones fraccionarias, se factorizan los denominadores de cada una y se procede de igual modo que con las fracciones.

Ejemplo. Resolver $\dfrac{x}{x^2+2x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}$

$$\frac{x}{x^2+2x+1}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{2x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)+2x(x-1)}{x+1}$$

$$=\frac{x^2+2+2x^2-1}{x+1}=\frac{3x^2+1}{x+1}$$

.

8 Ejercitación básica

8.1 Práctica 4: Polinomios

Ejercicio 118 *Indique cuáles de las siguientes expresiones son polinomios.*

a) $\frac{1}{3} - 5\,x^3$ b) $x^2 - \frac{1}{3}\sqrt{x} + 2$ c) $x - 2\,x^{-2} + 3$

d) $\frac{1}{5}\,x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + 1 - 3\,x$ e) $2\,x^3$ f) $x^4 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}$

g) $\frac{1}{x} + 2\,x^2 + \frac{2}{x^2}$ h) $\frac{3}{4}$

Para las que sean polinomios, indique cuántos términos tiene, el grado y el coeficiente principal.

Ejercicio 119 *Ordene en forma decreciente y complete los siguientes polinomios. Además, indique el grado, coeficientes, coeficiente principal y término independiente de cada polinomio. ¿Hay alguno que sea mónico?*

a) $P(x) = -\frac{3}{5}\,x^2 + 4\,x^5 - x^3 + 8,$ *b)* $Q(x) = 2\,x^6 - \frac{1}{3}\,x^4 + \frac{1}{2} - 3\,x,$

c) $S(x) = \frac{2}{3}\,x^2 - x^3 + 4\,x,$ *d)* $T(x) = -2 + x^2,$

e) $U(x) = x,$ *f)* $V(x) = x^5 + 1,$

g) $W(x) = 3 - x,$ *h)* $Y(x) = 1.$

Ejercicio 120

a) Sean $P(x) = x^6 - x^4 - 3\,x^3 - 8 - x^5$, $Q(x) = x^5 + 2\,x^2 - x^3 + 4\,x^4 - 8\,x$ y $S(x) = 3\,x^4 - 2\,x.$

Calcule: i) $P + Q$ ii) $P - Q$ iii) $P \cdot Q$

iv) $P : Q$ v) $P \cdot S$ vi) $P : S$

b) Sean $P(x) = 3\,x^4 - 2\,x + 1 - x^3$, $Q(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 4$ y $R(x) = 5\,x^2 + 4\,x - 3.$

Calcule: i) $P + Q + R$ ii) $P - Q - R$ iii) $P + Q - R$

c) Calcule $(5\,x^4 - 3\,x^3 + 6\,x^2 - 2\,x - 6) : (x^2 + x - 1)$

d) Calcule $(x^4 - 2\,x^2 + 1) : (x - 1)$

En todos los casos indique el grado, el coeficiente principal y el término independiente de los polinomios dados y de los hallados.

Ejercicio 121 *Dadas las funciones polinómicas:*

$$p(x) = -x^2 + \frac{3}{2}\,x - 1\ ,\quad q(x) = x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{8}$$

a) Escriba el grado de los polinomios asociados.

b) Calcule el valor de los polinomios en $x = -2$, en $x = 0$ y en $x = \dfrac{2}{3}$

Ejercicio 122 *Resuelva aplicando la Regla de Ruffini y verifique con el Teorema del resto:*

a) $(x^3 - 8) : (x - 2)$

b) $\left(x^4 - 3\,x^2 + \dfrac{1}{2}\right) : (x + 1)$

c) $(2\,x^3 - x^5 + 3\,x) : \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

d) $\left(2\,x^3 + \dfrac{1}{4}\,x + 3\,x^2\right) : (x - 1)$

Ejercicio 123 *Resuelva aplicando la regla de Ruffini:*

a) $\left(-4\,x^5 + x^4 - 5\,x^3 + \dfrac{2}{3}\,x - 1\right) : x^2$

b) $(-x^5 - x^3 + 3\,x^2 - 2\,x) : (x - 4)$

c) $(4\,x^6 - 3\,x^5 - 2\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2) : (2\,x - 4)$

Ejercicio 124 *Dado el polinomio* $P(x) = 4\,x^5 - 5\,x^2 + k\,x + 6$

a) Encuentre la función polinómica $p(x)$ asociada al polinomio P y calcule $p(2)$.

b) Calcule el valor de k sabiendo que el valor de $p(x)$ para $x = -1$ es -9.

Ejercicio 125

a) Calcule los valores de a, b, c y d para que $P(x) = -5\,x^3 + a\,x^2 + b$ y

$Q(x) = c\,x^3 - 9\,x^2 + d\,x + 1$ sean opuestos.

b) Determine los valores de k y h para que la división de $P(x) = 2\,x^3 + k\,x^2 + h\,x - 1$ por $R(x) = 2\,x^2 - x - 1$ sea exacta.

c) Calcule P sabiendo que P dividido en Q da como resultado C y por resto R, siendo $Q(x) = x^2 + 2$, $C(x) = 3\,x - 5$, $R(x) = 2$.

Ejercicio 126 *Halle el valor de m para que el polinomio $-3\,x^3 + 2\,x^2 - m\,x + 1$ sea divisible por $x + 3$. Compruebe realizando la división por Regla de Ruffini.*

Ejercicio 127 *Halle el valor de la constante numérica k para que el siguiente polinomio sea divisible por el polinomio $x - 1$,*

$$3\,x^3 + 2\,x^2 + k\,x - 4$$

Ejercicio 128 *Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.*

a) $P(x) = x^5 - 32$ es divisible por $x + 2$

b) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es múltiplo de $x - 1$

c) Al sumar dos polinomios de sexto grado se puede obtener un polinomio de segundo grado.

d) Al dividir un polinomio de quinto grado por uno de la forma $x + a$, con $a \in \mathbb{R}$ se obtiene un polinomio de cuarto grado.

e) Dado el polinomio $P(x) = (x - 2)(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$:

   i) $P(x)$ es múltiplo de $x - 2$

   ii) $P(x)$ no es múltiplo de $x - \frac{1}{2}$

   iii) $x + 3$ es un divisor de $P(x)$

   iv) $P(x)$ es divisible por $x - 2$

   v) $P(x)$ es divisible por $(x - 2)(x + 3)$

   vi) $P(x)$ es divisible por $(x + 3)^2$

Ejercicio 129 *Encuentre las n raíces reales de los siguientes polinomios de grado n y factorícelos usando el Teorema de Factorización:*

a) $P(x) = 3\,x - 2$ b) $Q(x) = 2\,x^2 - 8$ c) $S(x) = 3\,x^2 + 6\,x$

d) $R(x) = x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 8$ e) $T(x) = 2\,x^3 + 6\,x^2 + 6\,x + 2$

Ejercicio 130 *Determine el polinomio:*

a) de coeficiente principal -3 y raíces $0; -2; 1$

b) mónico cuadrático y raíces $-1; 1$

c) de grado 3, de coeficiente principal -1, raíz doble 3 y raíz simple -2

Ejercicio 131

a) Halle una función polinómica f cúbica, que corte al eje x en los puntos $(2,0), (-1,0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Calcule $f(4)$.

c) Halle una función polinómica g, de grado 3, que corte al eje x en los mismos puntos que f y que además verifique $g(4) = 5$.

Ejercicio 132 *Se sabe que el gráfico de* $f(x) = 3\,x^4 + x^3 - 8\,x^2 + 4\,x$ *corta al eje* x *en el punto* $(-2, 0)$.

a) Encuentre todos los puntos donde el gráfico de f corta al eje x.

b) Haga un gráfico aproximado de f.

Ejercicio 133 *Factorice los siguientes polinomios:*

a) $12\,x^5 + 16\,x^4 - 40\,x^2$

b) $x^3 - 2 + x - 2\,x^2$

c) $4\,x^2 + 4\,x + 1$

d) $x^2 - 3\,x + \dfrac{9}{4}$

e) $2\,x^5 + 4\,x^3 - 6\,x^4 - 12\,x^2$

f) $9\,x^4 - 30\,x^2 + 25$

g) $\dfrac{1}{2}\,x^3 + \dfrac{3}{2}\,x - x^2 - 3$

h) $x^2 - 81$

i) $x^6 - 6\,x^5 + 12\,x^4 - 8\,x^3$

j) $\dfrac{x^3}{9} + 512 - \dfrac{8}{9}\,x^2 - 64\,x$

k) $x^3 + 1$

l) $512 + x^3$

m) $x^4 - 2\,x^3 + x^2 - 2\,x + 1 + x^2$

n) $x^2 - 0,01$

ñ) $-x^3 - x^2 - \dfrac{1}{3}\,x - \dfrac{1}{27}$

o) $4\,x^5 - 36\,x^2 - 4\,x^3 + 36$

p) $x^4 - 0,0625$

q) $x^2 - x - 2$

Ejercicio 134 *Determine máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.*

a) $x^2+x\,;\ \ x^2+2\,x+1$

b) $x^3+3x^2+3x+1\,;\ \ x^2-1$

c) $2\,x^2+x-3\,;\ \ x^2+x-2$

d) $2\,x^6-32\,x^2\,;\ \ 8\,x^4-16\,x^3\,;\ \ 20\,x^8-160\,x^5$

e) $3\,;\ \ 9\,x^3+9\,x^2\,;\ \ 6\,x^2+12\,x+6$

f) $x^2-4\,;\ \ x^2+4\,x+4\,;\ \ x^3+8$

g) $x^4-2\,x^2+1\,;\ \ x^3-x\,;\ \ x^2-x$

h) $4\,x^2-4\,x+1\,;\ \ 4\,x^2-1\,;6\,x^2-3\,x$

Ejercicio 135 *Factorice, simplifique y encuentre la mínima expresión.*

a) $\dfrac{4\,x^2+12\,x+9}{4\,x^2-9}$

b) $\dfrac{t^4-10\,t^3+25\,t^2}{t^5-25\,t^3}$

c) $\dfrac{a^2-2\,a+1}{a\,x^2-a-x^2+1}$

d) $\dfrac{x^3-x^2+4\,x-4}{x^4-16}$

Ejercicio 136 *Efectúe la operación indicada, factorizando y simplificando cuando sea posible.*

a) $\dfrac{3\,x-6}{x+2}\cdot\dfrac{x^2+4\,x+4}{6\,x}\cdot\dfrac{4\,x}{x^2-4}=$

b) $\dfrac{2\,x^2}{x^3+27}\cdot\dfrac{x+3}{3\,x}\cdot\dfrac{x^2-3\,x+9}{12}=$

c) $\dfrac{n^3-8}{n+2}\cdot\dfrac{2\,n^2-8}{n^3-4\,n}\cdot\dfrac{n^3+2\,n^2}{n^3+2\,n^2+4\,n}=$

d) $\dfrac{x^2+4}{x^4-16}:\dfrac{x^3-9\,x^2+27\,x-27}{x^2+x-6}=$

e) $\left(\dfrac{3}{2\,x}-\dfrac{8}{4\,x^2}-\dfrac{3}{6\,x}\right)+\dfrac{x-2}{2x^3}=$

f) $\dfrac{1-x}{2+x}:\dfrac{x^2-x}{x^2+2\,x}=$

g) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x^2-2\,x+1}=$

h) $\left(\dfrac{4\,x^2}{3\,x-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x-1}{2\,x}\right)^4=$

i) $\left(\dfrac{1+3\,x}{1-3\,x}-\dfrac{1-3\,x}{1+3\,x}\right)+\left(\dfrac{x}{3\,x-1}-\dfrac{x}{3\,x+1}\right)=$

j) $\left(\dfrac{2\,x^2+1}{3\,x^2}-\dfrac{2\,x+1}{4\,x^2-1}\cdot\dfrac{4\,x^2-4\,x+1}{3\,x}\right):\dfrac{x^2+2\,x+1}{9\,x^3}=$

k) $\dfrac{\dfrac{x^2-25}{x^2+5\,x}}{\dfrac{2\,x-10}{x+5}}-\dfrac{5+x}{2\,x}=$

l) $\dfrac{\dfrac{4\,x+12}{x^2-9}}{\dfrac{x^2-x-2}{4\,x-12}}+\dfrac{16\,x+32}{x^2-4}-\dfrac{\dfrac{15-3\,x}{x-5}}{x^2+4-4\,x}=$

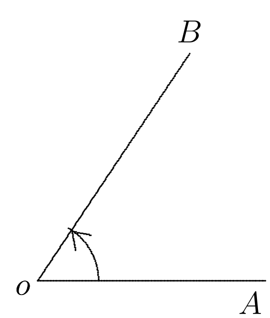
m) $\dfrac{(x^3-27).(x^2-9)}{(x^2-6x\ +9).(x^3+9x^2+27x+27)}\ :\ \dfrac{x^2+3x+9}{x^2+3x}\ -\ \dfrac{3}{x^2-9}=$

9 Capítulo 5. Funciones Trigonométricas.

Antiguamente, la astronomía de los matemáticos griegos, consistía fundamentalmente en descripciones y especulaciones. Con el tiempo fue necesario hacer de la astronomía una ciencia más exacta, que permitiera predecir con precisión los eclipses y los movimientos de los astros, para hacer los calendarios más exactos y la navegación más segura. En el siglo II A.C., con griego Hiparco nace la trigonometría.
Muchos de los teoremas que utilizamos en trigonometría, ya eran conocidos y utilizados en esa época.
Trigonometría proviene del griego *trigonos= triángulo* y *metría= medida*, esto es, etimológicamente, la palabra trigonometría significa medida de triángulos. Es la rama de la matemática que estudia o analiza las relaciones que existen entre la medida de los lados y los ángulos de un triángulo.
En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronoía, pero luego con el desarrollo de la ciencia, se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente.

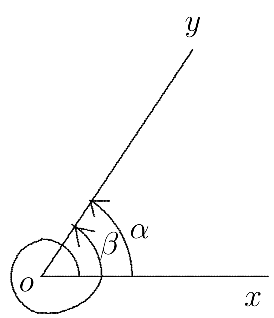
9.1 Ángulos Orientados

Un ángulo es la figura engendrada por una semirrecta que gira alrededor de su origen en un sentido determinado.
La posición inicial se llama *lado inicial*, OA, la posición final se llama *lado terminal*, OB. El punto fijo se llama *vértice*, O.



Si el giro (rotación) se realiza en sentido antihorario (levógiro) el ángulo se considera positivo, como en la figura, en caso contrario negativo (dextrógiro).
Es posible representar los ángulos orientados referidos a un par de ejes perpendiculares x e y, llamados ejes cartesianos ortogonales. Si el vértice de un ángulo lo colocamos en el origen del sistema de coordenadas cartesianas y su lado inicial

coincide con el semieje positivo de las x, decimos que el ángulo está en *posición normal*.
Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro partes, llamados cuadrantes. De acuerdo con el cuadrante en que está ubicado el lado terminal del ángulo, lo clasificamos como ángulos del primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante.
La semirrecta A puede llegar a la posición de B después de 1, 2, o más giros completos. Estos ángulos se llaman congruentes.



$$\alpha + 360^\circ = \beta$$

α y β son ángulos congruentes.

9.2 Medida de ángulos

Para medir ángulos existen varios sistemas de medición, los sistemas más usados son: el *sexagesimal* y el *circular*.

• **Sexagesimal** La unidad de medida angular en este sistema es el grado sexagesimal (°), que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes;

$$1^\circ = \frac{1}{360}$$

Al ángulo generado por una vuelta completa, ángulo giro, se le asigna un valor de 360°
El grado tiene dos submúltiplos: el minuto (′) y el segundo (″).

$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

Un ángulo llano mide 180° y un giro completo mide 360°.

NOTA: Las calculadoras científicas tienen este sistema identificado con la sigla **DEG**.

- **Circular**

En este sistema la unidad es el *radián* (rad).
Un ángulo central de un radián es aquel que determina un arco que tiene una longitud igual al radio. Este es, la medida de un ángulo α en radianes se define como:

$$\alpha = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{radio}}$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Un radián es aquel ángulo cuya longitud de arco es igual a la longitud del radio.
La ventaja de este sistema es que se miden los ángulos en radianes, que son números reales.

NOTA:
• El radián es la unidad oficial del SI y del SIMELA. Las calculadoras tienen este sistema identificado con la sigla **RAD**.
• Este sistema se basa en el hecho de que dado un ángulo, la relación entre l y r es constante e independiente del radio. Debe tenerse en cuenta que l y r deben expresarse en la misma unidad de longitud.

Pasaje de un sistema a otro

Para pasar de un sistema a otro tendremos en cuenta que:

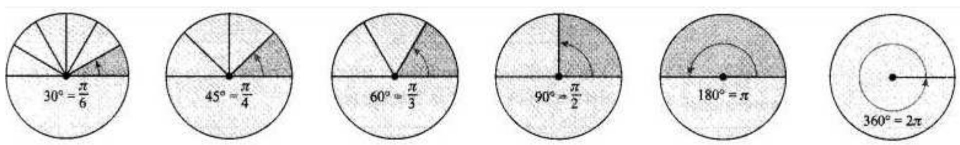
DEG	*RAD*
360°	$\frac{l}{r} = \frac{2\pi.r}{r} = 2\pi = 6,28...rad$
180°	$\pi = 3,14159...rad$
90°	$\frac{\pi}{2} = 1,57...rad$

$1° = \frac{\pi}{180}rad = 0,0174rad$

$$1rad = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,296^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

NOTA: La letra π representa al número irracional $3,14159.....$, y no a un ángulo de 180°.

Es conveniente tener presente las conversiones de los ángulos más usuales, los cuales se muestran en la siguiente figura:



Ejercicio 1. Indique de que cuadrante es cada uno de los siguientes ángulos:

a) $\alpha = 75^\circ$ b) $\beta = 310^\circ$

c) $\gamma = -120^\circ$ d) $\delta = 170^\circ$

Ejercicio 2. Exprese en radianes los siguientes ángulos:

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\beta = 120^\circ$

c) $\gamma = 45^\circ 20'$ d) $\delta = 300^\circ$

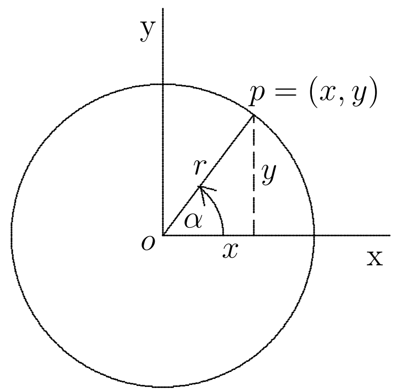
Ejercicio 3. Exprese en grados los siguientes ángulos:

a) $\alpha = 1,24rad.$ b) $\delta = \frac{2\pi}{5}$

c) $\beta = 0,26rad.$ d) $\gamma = \frac{4\pi}{9}$

9.3 Razones trigonométricas

La trigonometría plana tiene como objetivo resolver triángulos. Cada triángulo está constituido por seis elementos, tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo significa determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos.
Dada una circunferencia de radio r, y un ángulo α, tenemos un punto $p = (x, y)$. Con el cociente de estos elementos se definen las razones trigonométricas del ángulo α.



Las razones trigonométricas no dependen de la longitud de los lados, sólo dependen de la medida del ángulo, a estas razones se las llama *razones trigonométricas.*
Para definir las razones trigonométricas del ángulo α se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en los sucesivo será:

- hipotenusa (r) es el lado opuesto al águlo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.

- cateto opuesto (y) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.

- cateto adyacente (x) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o $180°$). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ radianes.

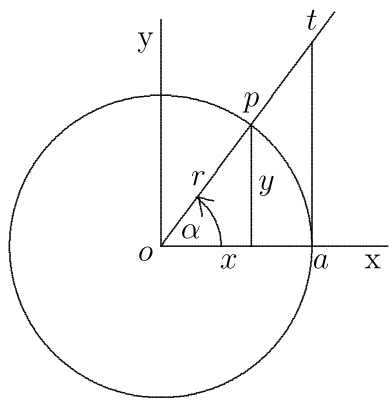
Las siguientes razones, definen las funciones trigonométricas.

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad tg\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$cosec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad cotg\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

9.4 Circunferencia trigonométrica

Podemos observar gráficamente el seno, coseno y tangente de un ángulo en un sistema cartesiano, si consideramos un punto P sobre una circunferencia con centro en el origen de un sistema de coordenadas y de *radio* 1, llamada *circunferencia trigonométrica o circunferencia unidad.*



Analicemos que sucede con las *razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica*, esto es consideremos $r = 1$

$sen\,\alpha = \dfrac{\mathrm{c\,o}}{\mathrm{hip}} = \dfrac{y}{r} = y$ el seno del ángulo α coincide con la ordenada del punto p

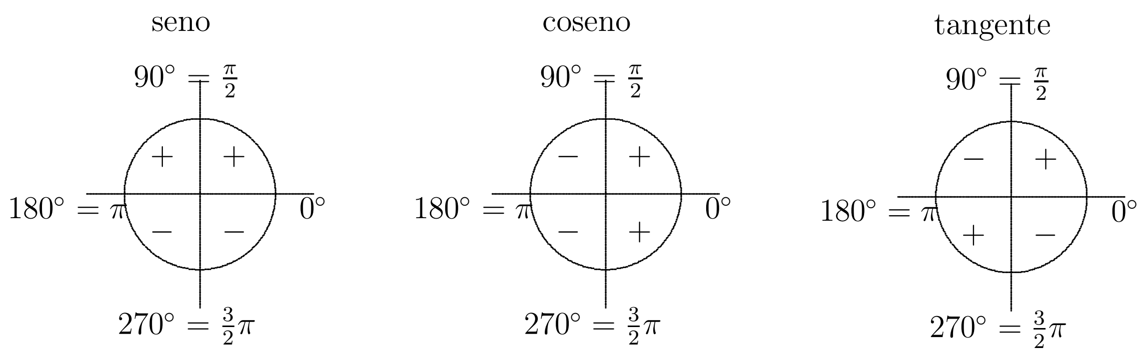
$cos\alpha = \dfrac{\mathrm{c\,a}}{\mathrm{hip}} = \dfrac{x}{r} = y$ el coseno del ángulo α coincide con la abscisa del punto p

$tg\alpha = \dfrac{\mathrm{c\,o}}{\mathrm{c\,a}} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\overline{ta}}{r}$ por ser triángulos semejantes entonces la

tangente del ángulo α es la medida de $\overline{ta}$

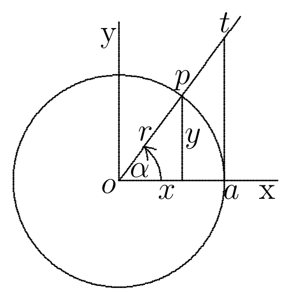
9.5 Signo de las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica

Los signos de las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tg*, en la circunferencia trigonométrica son los siguientes:



9.6 Relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo

Observando el siguiente gráfico, recordamos que:



$$sen\,\alpha = \frac{y}{r} \qquad cos\,\alpha = \frac{x}{r}$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

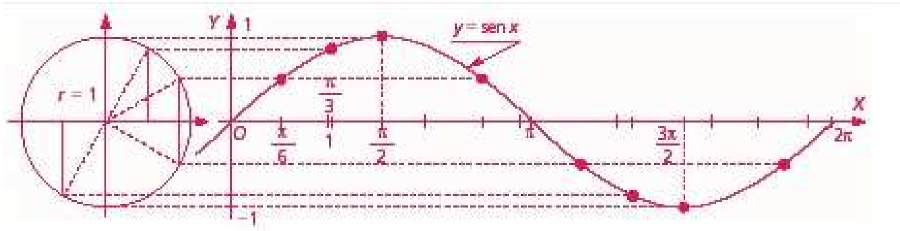
$$\boxed{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$$

La mas importante de las identidades, llamada *identidad trigonométrica* o *relación Pitagórica*, de ella se deduce:

$$\boxed{sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1} \qquad \boxed{cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha}$$

$$\boxed{sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}} \qquad \boxed{cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}}$$

$$\boxed{tg^2\,\alpha = sec^2\,\alpha - 1} \qquad \boxed{sec^2\,\alpha = 1 + tg^2\,\alpha} \qquad \boxed{cosec^2\,\alpha = 1 + cotg^2\,\alpha}$$



9.7 Funciones trigonométricas

Una función trigonométrica es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que deberá estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente y sus respectivas inversas, cosecante, secante y cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares o trigonométricas inversas: arco seno, arco coseno, etctera.

9.7.1 La función seno.

Se denomina función seno, y se denota por sen, a la aplicación que asigna a cada variable x expresada en radianes el valor de la razón trigonométrica seno.

Características de la función seno.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = sen\, x$$

El modelo de la gráfica de la función seno, se puede obtener transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. La función seno del ángulo utiliza la y de los arcos de la circunferencia unitaria. El ciclo fundamental de la función seno del ángulo comienza en 0 y termina en 2π. En la siguiente figura observamos la relación entre la circunferencia unitaria y la gráfica de la función seno del ángulo x.
Observando la gráfica vemos que:

- La función seno es periódica, de periodo 2π: $senx = sen(x + 2\pi)$.
- es una función continua.
- $dom(sen) = \mathbb{R}$
- es una función acotada: $-1 \leqslant sen \leqslant 1$.

- es impar: $sen(-x) = -senx$. Su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- el gráfico de la función corta al eje x en todos los puntos $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- el gráfico corta al eje y en $(0, 0)$.

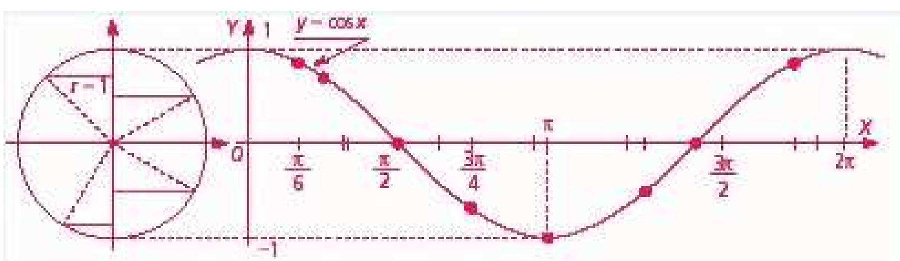
9.7.2 La función coseno.

Se denomina función coseno, y se denota por cos, a la aplicación que asigna a cada variable x expresada en radianes el valor de la razón trigonométrica coseno.

Características de la función coseno.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = cos\, x$$

El modelo de la gráfica de la función coseno, se puede obtener transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. La función coseno del ángulo utiliza la x de los arcos de la circunferencia unitaria. El ciclo fundamental de la función coseno del ángulo comienza en 0 y termina en 2π. En la siguiente figura observamos la relación entre la circunferencia unitaria y la gráfica de la función coseno del ángulo x.



Observando la gráfica vemos que:

- La función coseno es periódica, de periodo 2π: $cos\, x = cos\,(x + 2\pi)$.
- es una función continua.
- $dom(cos) = \mathbb{R}$
- es una función acotada: $-1 \leqslant cos \leqslant 1$.
- es par: $cos(x) = cos(-x)$. Su gráfica es simétrica respecto al eje y.

- el gráfico de la función corta al eje x en todos los puntos $((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- el gráfico corta al eje y en $(0, 1)$.

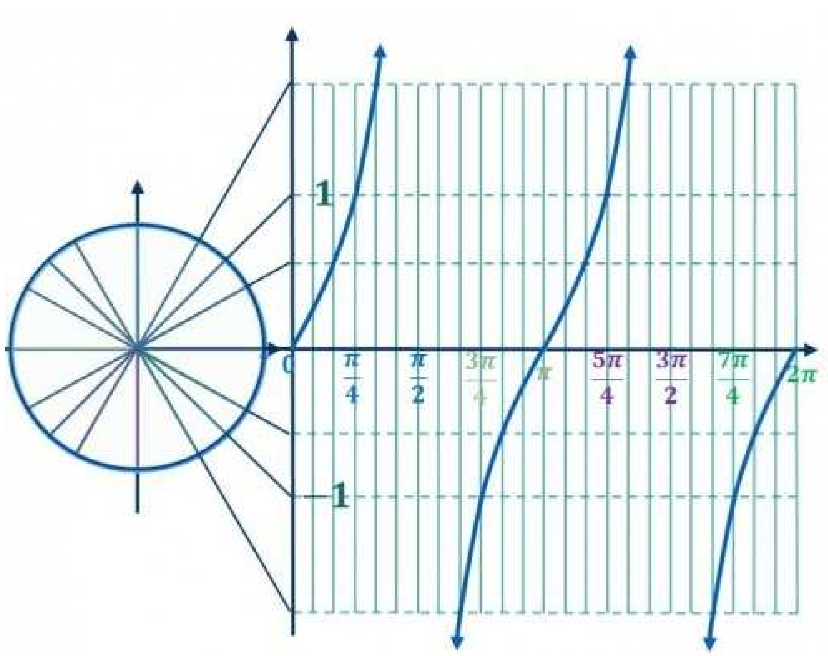
9.7.3 La función Tangente.

Se denomina función tangente, y se denota por tg, a la aplicación que asigna a cada variable x expresada en radianes el valor de la razón trigonométrica tangente.

Características de la función tangente.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = tg\, x$$

El modelo de la gráfica de la función tangente, se puede obtener transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. Recordemos que la función tangente del ángulo es el cociente de la y y la x de los arcos de la circunferencia unitaria. El ciclo fundamental de la función tangente del ángulo comienza en $-\frac{\pi}{2}$ y termina en $\frac{\pi}{2}$. En la siguiente figura observamos la relación entre la circunferencia unitaria y la gráfica de la función tangente del ángulo x.

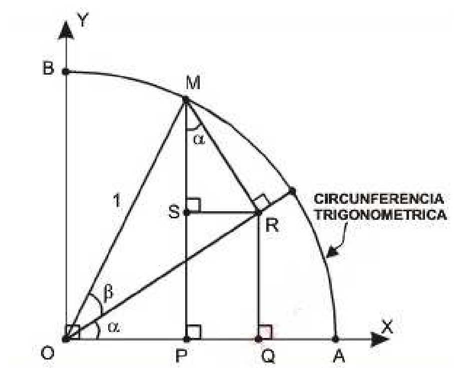


Observando la gráfica vemos que:

- La función tangente es periódica, de periodo π: $tg\, x = tg\,(x+\pi)$.
- es una función no es continua.
- $dom(tg) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- es una función no está acotada: $Im(tg) = \mathbb{R}$.
- es impar: $tg(-x) = -tg(x)$. Su gráfica es simétrica respecto al origen.
- el gráfico de la función corta al eje x en todos los puntos $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- el gráfico corta al eje y en $(0,0)$.

9.7.4 Identidades trigonométricas para dos ángulos.

Identidades trigonométricas para la suma de dos ángulos.



- $sen(\alpha+\beta) =?$

$$sen(\alpha+\beta) = mp = ps + sm = qr + sm \qquad (1)$$

Además:

$$sen\,\alpha = \frac{qr}{or} \quad \text{entonces} \quad or{\cdot}sen\,\alpha = qr \quad \text{entonces} \quad cos\,\beta{\cdot}sen\alpha = qr \ (2)$$

$$cos\,\alpha = \frac{sm}{mr} \quad \text{entonces} \quad mr{\cdot}cos\,\alpha = sm \quad \text{entonces} \quad sen\,\beta{\cdot}cos\alpha = sm \ (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

• $cos(\alpha+\beta) = ?$

$$cos(\alpha+\beta) = op = oq - qp = oq - sr \qquad (1)$$

Además:

$$cos\,\alpha = \frac{oq}{or} \quad \text{entonces} \quad oq = or \cdot cos\,\alpha \quad \text{entonces} \quad oq = cos\,\beta \cdot cos\alpha \ (2)$$

$$sen\,\alpha = \frac{sr}{mr} \quad \text{entonces} \quad sr = mr \cdot sen\,\alpha \quad \text{entonces} \quad sr = sen\,\beta \cdot cos\alpha \ (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

También se pueden deducir:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

$$\boxed{sen\,2\alpha = 2sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

$$\boxed{cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

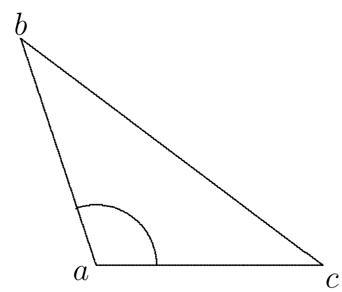
9.8 Resolución de triángulos oblicuángulos. Teoremas del seno y del coseno.

Muchas veces, en la vida cotidiana, surgen problemas que requieren la resolución de triángulos que no son rectángulos. Para esos casos, se pueden aplicar los siguientes teoremas, que relacionan los lados de cualquier triángulo con sus ángulos interiores.

9.8.1 Teorema del Seno

En todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

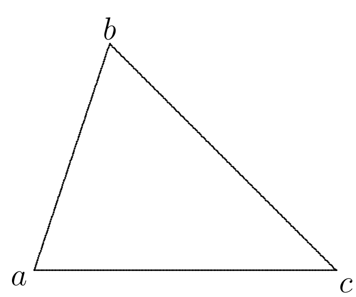
$$\frac{\overline{ab}}{\sin \hat{c}} = \frac{\overline{ac}}{\sin \hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{\sin \hat{a}}$$



9.8.2 Teorema del coseno

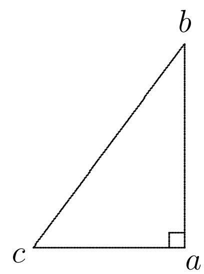
El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos \hat{a}$$
$$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{bc}.\cos \hat{b}$$
$$\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 - 2.\overline{ac}.\overline{bc}.\cos \hat{c}$$



El **teorema de Pitágoras** es un caso particular del teorema del coseno.

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos\hat{a}$$
$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos 90^\circ$$
$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.0$$
$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$$



10 Ejercitación básica

10.1 Práctica 5: Trigonometría.

Ejercicio 137 *Completa los siguientes cuadros:*

medida radial	$\frac{3}{8}\pi$		3π		$\frac{7}{9}\pi$	
medida sexagesimal		$72°$		$56°15'$		$125°$

medida radial	$\frac{\pi}{16}$		2π		$\frac{11}{4}\pi$	
medida sexagesimal		$108°$		$115°32'$		$85°$

Ejercicio 138 *Complete las siguiente tablas:*

cuadrante	*signo de* $\operatorname{sen}\alpha$	*signo de* $\cos\alpha$	*signo de* $\tan\alpha$
I			
II			
III			
IV			

cuadrante	*signo de* $cotg\,\alpha$	*signo de* $sec\,\alpha$	*signo de* $cosec\,\alpha$
I			
II			
III			
IV			

SUGERENCIA:

Intente demostrar que los valores consignados en el cuadro anterior son correctos, utilizando la circunferencia trigonométrica y argumentos geométricos. Realizar lo indicado suministra una valiosa formación.

Nota. A continuación indicaremos sin demostración algunas identidades trigonométricas que podrán ser utilizadas para comprobar otras identidades trigonométricas.

Cualesquiera sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ se verifican:

(I1) $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1\,,$

(I2) $sen\,(-\,\alpha) = -\,sen\,\alpha\,,$

(I3) $cos\,(-\,\alpha) = cos\,\alpha\,,$

(I4) $sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha.\,cos\,\beta + cos\,\alpha.\,sen\,\beta\,,$

(I5) $sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha.\,cos\,\beta - cos\,\alpha.\,sen\,\beta\,,$

(I6) $cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha.\,cos\,\beta - sen\,\alpha.\,sen\,\beta\,,$

(I7) $cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha.\,cos\,\beta + sen\,\alpha.\,sen\,\beta\,.$

Recordemos también que:

(I8) $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$,

(I9) $cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$,

(I10) $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$,

(I11) $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$.

Ejercicio 139 *Verificque las siguientes identidades trigonométricas:*

(a) $sen\,2\,\alpha = 2\,sen\,\alpha.\,cos\,\alpha$,

(b) $sen\,\alpha = 2\,sen\,\left(\dfrac{\alpha}{2}\right).\,cos\,\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

(c) $cos\,2\,\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha$,

(d) $cos\,\alpha = cos^2\,\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - sen^2\,\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

(e) $1 + cos\,2\,\alpha = 2\,cos^2\,\alpha$,

(f) $1 + cos\,\alpha = 2\,cos^2\,\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

(g) $1 - cos\,2\,\alpha = 2\,sen^2\,\alpha$,

(h) $1 - cos\,\alpha = 2\,sen^2\,\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Ejercicio 140 *Verifique las siguientes identidades trigonométricas:*

(i) $1 + tg^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$,

(ii) $1 + cotg^2\,\alpha = cosec^2\,\alpha$,

(iii) $(1 + tg\,2\,\alpha).\,sen^2\,\alpha = tg^2\,\alpha$,

(iv) $(1 - cos^2\,\alpha).\,(1 + cotg^2\,\alpha) = 1$,

(v) $2\,cosec\,2\,\alpha = sec\,\alpha.\,cosec\,\alpha$,

(vi) $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = sec\,\alpha.\,cosec\,\alpha$,

(vii) $\dfrac{1 + cos\,\alpha}{cotg\,\alpha + cosec\,\alpha} = sen\,\alpha$,

(viii) $\dfrac{1}{1 + cos\,\alpha} + \dfrac{1}{1 - cos\,\alpha} = 2\,cosec^2\,\alpha$.

(ix) $1 + \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{tg^2\,\alpha}{sec\,\alpha - 1}$,

(x) $\dfrac{cosec\,\alpha}{cos\,\alpha} = (1 + tg^2\,\alpha).\,cotg\,\alpha$,

(xi) $sec^2\,\alpha - cos^2\,\alpha = sen^2\,\alpha + tg^2\,\alpha$,

(xii) $sec\,\alpha - \dfrac{cos\,\alpha}{1 + sen\,\alpha} = tg\,\alpha$.

Ejercicio 141 *Halle la medida sexagesimal y la medida radial de los ángulos $\hat{\alpha}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$a)$ $2\,tan^2\,\hat{\alpha} - tan\,\hat{\alpha} - 1 = 0;$

$b)$ $2\,cos^2\,\hat{\alpha} - 1 = 0;$

$c)$ $2\,sen^2\,\hat{\alpha} + sen\,\hat{\alpha} = 1;$

$d)$ $tan^2\,\hat{\alpha} + tan\,\hat{\alpha} = 0;$

$e)$ $sen^2\,\hat{\alpha} - sen\,\hat{\alpha} = 0;$

$f)$ $tan^2\,\hat{\alpha} - 4 = 0;$

$g)$ $4\,cos^2\,\hat{\alpha} - 3 = 0;$

$h)$ $2\,sen^2\,\hat{\alpha} = 1;$

$i)$ $3\,tan^2\,\hat{\alpha} - 3 = 0.$

11 Autoevaluación.

Los siguientes son modelos de Evaluaciones. Su resolución ayudará a su autovaluación.

Universidad Nacional de San Juan - Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Departamento de Matemática - Profesorado y Licenciatura en Matemática
Curso de Nivelación

Primera Evaluación

Ejercicio 1. Represente en la recta e indique a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado del siguiente ejercicio combinado:

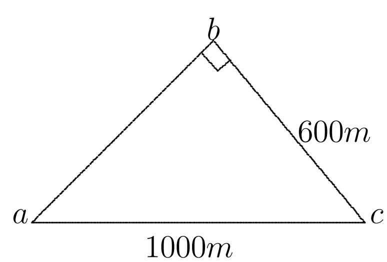
$$\frac{15}{4}.0,2\widehat{6}+5^{-1}-\sqrt{0,25}=$$

Ejercicio 2. Utilice propiedades y técnicas convenientes para resolver:

(i) $\dfrac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (ii) $2\sqrt[4]{9}-4\sqrt{27}+6\sqrt{12}-\sqrt{75}$

Ejercicio 3. En una fábrica de camisas, las máquinas A, B y C trabajan en conjunto y producen 1.050 camisas por día. Si sólo trabajan las máquinas B y C, producen un total de 850 camisas. Se sabe, además, que la máquina B produce en un día 100 camisas más que el doble de las producidas por A en el mismo tiempo. ¿Cuántas camisas produce cada una de las máquinas en un día?

Ejercicio 4. ¿Cuánto debe recorrer una persona que desea ir desde a hasta c pasando por la cima del cerro? Se sabe que la distancia desde la cima al punto c es 600 m y que desde a a c hay 1000 m. Justifique su respuesta.



Universidad Nacional de San Juan - Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Departamento de Matemática - Profesorado y Licenciatura en Matemática
Curso de Nivelación

Segunda Evaluación

Ejercicio 1. Sea $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Represente gráficamente la función.
b) Indique dominio, codominio e imagen de f.
c) Halle $f(0)$, $f(2)$, $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(-1)$.
d) Determine los ceros y la ordenada al origen de la función.
e) Indique los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento. ¿Para qué valor de x la función f alcanza un máximo o un mínimo?

Ejercicio 2.

(i) Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta $y = 2x + 3$

(ii) Grafique ambas rectas.

Ejercicio 3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación $R = \{(x, y) \in A \times A : x - y = 1\} \subseteq A \times A = A^2$

(i) Analice si la relación dada es una función.
(ii) Grafiquéla.
(iii) Halle dominio, imagen y codominio.

Universidad Nacional de San Juan - Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Departamento de Matemática - Profesorado y Licenciatura en Matemática
Curso de Nivelación

Tercera Evaluación

Ejercicio 1: Resuelva:

$$\frac{x^2-1}{x^2+2\,x+1}+\frac{3\,x^3-3}{3\,x^2-6\,x+3}\;:\;\frac{x+1}{x-1}\quad=$$

Ejercicio 2: Exprese en grados sexagesimales los siguientes ángulos e indique a que cuadrante pertenecen:

a) $\widehat{\alpha}=\dfrac{2}{5}\pi$

b) $\widehat{\beta}=\dfrac{5}{9}\pi$

Ejercicio 3: Halle un polinomio de cuarto grado que sea divisible por x^2-4 y se anule para $x=3$ y $x=5$.

Ejercicio 4:

a) Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$cos^2x-3sen^2x=0$$

b) Verifique la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{sec\,\hat{\alpha}\;-\;cos\,\hat{\alpha}}{tg\,\hat{\alpha}}=sen\,\hat{\alpha}$$

12 Bibliografía

1. Apuntes del Curso de Ingreso de los Departamentos de Matemática de la U.N.S.J. y de la U.N.S.

2. Matemática 1 (Polimodal). Editorial Santillana.

3. Matemática 2. (Polimodal). Editorial Santillana.

4. Matemática 1. (Polimodal). Editorial Kapeluz.

5. Matemática 2. (Polimodal). Editorial Kapeluz.

6. Matemática 1. (Polimodal). Editorial Puerto de palos.

7. Matemática 1. Editorial Vicens Vives

8. Matemática 2 y 3(Tapia). Editorial Estrada