INGRESO 2021

Módulo de Matemática

Dpto. de Física y Química

Profesorados de Física, Química y Tecnología

Prof. Eliana Prado

Curso de Nivelación en matemática.

Queridos alumnos este material está pensado para repasar temas que seguro aprendieron en nivel medio y les permita poder ingresar a la carrera que decidieron estudiar.

Aquí, comienza una etapa de responsabilidad y compromiso, donde deberán estudiar diariamente y resolver la ejercitación que en este cuadernillo se presenta.

Es importante que frente a cualquier inconveniente, siempre acudan al docente responsable del curso de nivelación.

¡Mucha suerte!

Prof. Eliana Prado

ÍNDICE

Unidad N° 1: "Números reales".

Conjuntos numéricos (Reales, Racionales, Irracionales, Enteros y Naturales). Operaciones con números reales y propiedades. Radicales. Extracción de factores fuera del radical. Operaciones con radicales. Racionalización de denominadores.

1. Introducción

En esta unidad se da una construcción intuitiva de los conjuntos numéricos ya conocidos.

1.1 Los números naturales

El conjunto de los números naturales está formado por aquellos que se utilizan para contar. Se los designa con la letra $\mathbb{N}$ y se representan:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

PROPIEDADES:

- El conjunto de los números naturales posee primer elemento y es 1.
- Entre dos números naturales hay un número finito de naturales, esto es, el conjunto de los números naturales es un conjunto discreto.
- Todo subconjunto no vacio del conjunto A de los naturales tiene un elemento mínimo.
- El conjunto de los naturales es un conjunto totalmente ordenado, es decir que, dados dos elementos cualesquiera pueden ser siempre comparados entre sí.
- Todo numero natural a posee su sucesor $a + 1$.
- Todo número natural a se puede expresar como producto de números naturales, llamados factores de a.
- **La suma y el producto de números naturales es un número natural.**

¿Es posible encontrar un número natural que al restárselo a 2 dé por resultado 8?

En el lenguaje algebraico: $2 - x = 8$

La respuesta es NO, es decir, es imposible encontrar un número natural que cumpla con estas condiciones. En este caso, decimos que la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales, $S = \emptyset$.

Esto justifica la necesidad de crear un nuevo conjunto de los números naturales, el cero y los opuestos de los números naturales.

1.2 Los números enteros

El conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto $\mathbb{N}$.

El conjunto de los enteros está formado por el conjunto de los números naturales, sus correspondientes opuestos y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbb{N}\\ 0\ (cero)\\ \mathbb{N}^-\end{array}\right\}\mathbb{Z}$$

PROPIEDADES:

- $\mathbb{Z}$ es un conjunto discreto.
- $\mathbb{Z}$ no tiene primero ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- El conjunto de los números enteros es totalmente ordenado.
- Todo numero entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$
  Dos números enteros opuestos son aquellos que se encuentran a la misma distancia del cero (en unidades). Uno positivo y uno negativo.
- **La suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre es un número entero.**

¿Pasará lo mismo con la división?

$$6 \div 2 = 3 \qquad \textit{ya que} \qquad 3 \cdot 2 = 6$$

$$-10 \div 5 = -2 \qquad \textit{ya que} \qquad -2 \cdot 5 = -10$$

En general:

$$a \div b = c, b \neq 0 \textit{ si se cumple que } c \cdot b = a$$

¿Cuál es el resultado de $5 \div 3$*?, esto es, ¿existe algún numero entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 5?*

La respuesta es NO, es decir, no es posible encontrar un número entero que cumpla con esta condición.

Para resolver este problema hay que introducir un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números racionales.

1.3 Los números racionales

Cuando el dividendo no es un múltiplo del divisor, aparece la necesidad de crear los números fraccionarios.

El conjunto de los racionales unido a los números enteros forma el conjunto de los números racionales. Se simboliza con $\mathbb{Q}$.

$$\left.\begin{matrix} \mathbb{Z} \\ fracciones \end{matrix}\right\} \mathbb{Q}$$

PROPIEDADES:

- $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, esto es, entre dos números racionales existen infinitos racionales. como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- $\mathbb{Q}$ no tiene primero ni último elemento.
- El conjunto de los racionales es un conjunto totalmente ordenado.
- Todo numero racional puede escribirse como cociente de dos números enteros:

  $$\frac{\boldsymbol{a} \quad (numerador)}{\boldsymbol{b}\ (denominador)}$$

  Con la condición de que el denominador sea distinto de cero.

Todo número racional admite una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

$$\frac{2364}{12} = 197$$

$$-\frac{30}{10} = -3$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$\frac{7}{4} = 1\,\frac{3}{4} = 1{,}75\ (número\ mixto)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 0{,}33333\ \ldots = 0,\hat{3}\ (expresión\ decimal\ periodica\ pura)$$

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666666666\ \ldots = 0{,}1\hat{6}\ (expresión\ decimal\ periodica\ mixta)$$

Algunas de estas expresiones presentan un número finito de cifras decimales mientras que otras tienen un desarrollo decimal periódico. Esto da lugar a dos tipos de expresiones decimales, las exactas y las periódicas.

$$\boldsymbol{Expresiones\ decimales}\begin{cases}\boldsymbol{exactas}\\ \boldsymbol{periódicas}\begin{cases}\boldsymbol{puras}\\ \boldsymbol{mixtas}\end{cases}\end{cases}$$

Recíprocamente, dada una expresión decimal exacta o periódica, puede encontrarse una expresión racional.

$$-3 = -\frac{3}{1} = -\frac{30}{10}$$

$$\frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$0,\hat{3} = \frac{3}{9}$$

$$0{,}1\hat{6} = \frac{016 - 1}{90}$$

Para esto se debe tener en cuenta: si la expresión decimal es exacta o periódica.

- ✓ **Pasaje de expresión decimal EXACTA a fracción:**
  Dado un número decimal, por ejemplo:

  $$\mathbf{0,18}$$

  Escrito como fracción será: $\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{100}}$

En el **numerador** se escribe el número completo sin la coma, y en el **denominador** se coloca el número 1 y tantos ceros como números se encuentren después de la coma, pues el denominador es una potencia de 10.

✓ **Pasaje de expresión decimal PERIÓDICA a fracción:**

Dentro de las expresiones decimales periódicas se encuentran las expresiones **periódicas puras** y las **periódicas mixtas**.

Las expresiones decimales **periódicas puras** son aquellas expresiones donde una cifra o más de una de la parte decimal se repite infinitamente.

A la/s cifra/s que se repiten infinitamente las colocamos bajo un "arquito".

Ejemplos:

- $0{,}666666666\ldots = 0{,}\widehat{6}$
- $1{,}454545454545\ldots = 1{,}\widehat{45}$

Las expresiones decimales **periódicas mixtas** son aquellas expresiones donde una o cifras de la parte decimal no se repite y la otra parte compuesta por una cifra o más de una se repite infinitamente.

A la/s cifra/s que se repiten infinitamente las colocamos bajo un "arquito".

Ejemplos:

- $0{,}86777777777777\ldots=0{,}86\widehat{7}$
- $1{,}498989898989898\ldots=1{,}4\widehat{98}$

❖ Para pasar de una **expresión decimal periódica pura a una fracción** se procede de la siguiente forma:

Dada una expresión periódica pura, por ejemplo:

$$\mathbf{12{,}\widehat{36}}$$

Escrita como fracción será:

$$\frac{\mathbf{1236-12}}{\mathbf{99}}=\frac{\mathbf{1224}}{\mathbf{99}}$$

Donde:

El **numerador** es la resta entre el número completo (sin coma y sin arquito) y el número que queda delante del arquito.

El **denominador** estará compuesto con tantos nueves como cifras se encuentren debajo del arquito.

❖ Para pasar de una **expresión decimal periódica mixta a una fracción** se procede de la siguiente forma:

Dada una expresión periódica mixta, por ejemplo:

$$\mathbf{1{,}90\widehat{36}}$$

Escrita como fracción será:

$$\frac{\mathbf{19036-190}}{\mathbf{9900}}=\frac{\mathbf{18846}}{\mathbf{9900}}$$

Donde:

El **numerador** es la resta entre el número completo (sin coma y sin arquito) y el número que queda delante del arquito.
El **denominador** estará compuesto con tantos nueves como cifras se encuentren debajo del arquito y tantos ceros como cifras se encuentren fuera del arquito y después de la coma.

- ✓ **Pasaje de número mixto a fracción:**

Dado el número mixto $a\frac{b}{c}$.

1. Se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción, esto es: $a \times c$
2. Al resultado anterior se le suma el numerador: $(a \times c) + b$, de esta manera se obtiene el numerador de la fracción.
3. El denominador será el mismo que tenía el número mixto.

$$a\frac{b}{c} = \frac{(a \times c) + b}{c}$$

Por ejemplo, si queremos transformar el número mixto $6\frac{7}{9}$:

$$6\frac{7}{9} = \frac{(6 \times 9) + 7}{9} = \frac{61}{9}$$

- ✓ **Pasaje de fracción a número mixto:**

Para transformar una fracción en un número mixto, se debe dividir el numerador entre el denominador. El cociente será la parte entera del número, y el resto será el numerador de la fracción restante, que tendrá el mismo denominador que la original.
Tomemos como ejemplo la fracción $\frac{22}{5}$.
Al realizar la operación 22÷5, obtenemos como resultado 4 y sobran 2. Es decir, el cociente es cuatro y el resto es dos.

$$\begin{array}{r|l} 2\ 2 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 2\ 0 & 4 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

El número mixto será:

$$4\frac{2}{5}$$

1.4 Los números irracionales

Existen algunos números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números se llaman irracionales, pues no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.
El conjunto de los números irracionales se simboliza con $\mathbb{I}$. Son ejemplos de números irracionales:

- ✓ Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural.
  Por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{8}, etc.$
- ✓ Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero.
  Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{-5}, \sqrt[7]{13}, etc.$
- ✓ El numero π, utilizado para calcular la longitud de la circunferencia.
  $$\pi \approx 3{,}14159265358979323846 \ldots$$
- ✓ El numero e, base de los logaritmos naturales.
  $$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995 \ldots$$

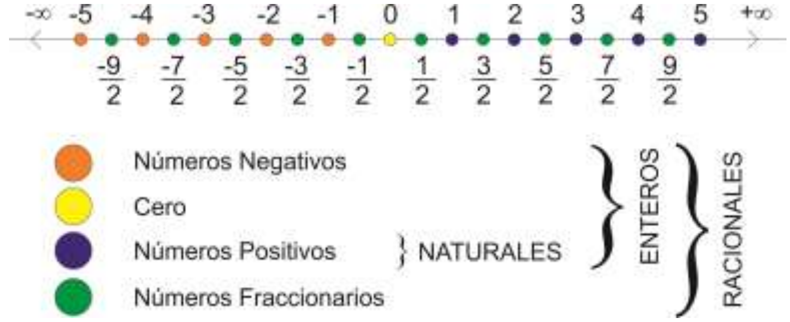
La representación decimal de un número racional *termina o se repite*.
La representación decimal de un número irracional *nunca termina ni se repite*.

1.5 Los números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números Reales y se lo simboliza con $\mathbb{R}$.
Por lo tanto, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, con " $\cup$" se indica la unión entre conjuntos.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}Naturales\ \mathbb{N}\\ 0\ (cero)\\ Negativos\end{array}\right\}\ Enteros\ \mathbb{Z}\\ \qquad\qquad Fracciones\end{array}\right\}\ Racionales\ \mathbb{Q}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad Irracionales\ \mathbb{I}\end{array}\right\}\ Números\ reales\ \mathbb{R}$$

El conjunto de los números reales se representa sobre una recta numérica o recta real.
Cada punto de la recta numérica representa a un único número real y recíprocamente a cada número real le corresponde un único punto de la recta.
Se fija el cero, se considera un segmento unidad, a la derecha del cero se representan los reales positivos y a la izquierda los reales negativos.



Para comparar dos números reales a y b. Si $b-a$ es positivo, entonces $a<b$ y el punto asociado a b está a la derecha del punto asociado a a. Si $b-a$ es negativo, entonces $b<a$ y el punto asociado a b está a la izquierda del punto asociado a a.
Ejemplo:

1.6 Valor absoluto de un número real.

Sea $x \in \mathbb{R}$, esto es, x un número real cualquiera. Llamaremos valor absoluto de x al número real no negativo (positivo o cero) que simbolizaremos con $|x|$ que se obtiene de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ } si \text{ } x \geq 0 \\ -x \text{ } si \text{ } x \leq 0 \end{cases}$$

Es decir, si el número real x es positivo o cero, $|x|=x$ y si el número real x es negativo, $|x|=-x$, donde el símbolo $-x$ significa el opuesto (en signo) de x.
NOTA: si x es negativo, entonces su opuesto $-x$ es positivo.
Ejemplos:
a) $|3|=3$
b) $|0|=0$
c) $|-\pi|=-(-\pi)=\pi$
d) $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

Observaciones:

1) Decir que un número real x es tal que $x \geq 0$ significa que x es positivo o 0 (cero).
2) La notación $x<0$ significa que x es un número negativo, y el símbolo $x>0$ qué x es un número real positivo.
3) El símbolo $-x$ representa el opuesto (en signo) de número real x. por ejemplo, el opuesto de -2, que se simboliza $-(-2)$, es el número 2; es opuesto del 1 (uno) es el -1 y el opuesto del 0 (cero) es el mismo 0.
4) Calcular el valor absoluto de un número real es "hacerlo positivo" si el número es negativo, y dejarlo como está si el número es positivo o cero.
5) Gráficamente, el valor absoluto de un número real m es su distancia al origen (cero).

Propiedades de valor absoluto

- ✓ $\boldsymbol{|a| \geq 0}$
- ✓ $\boldsymbol{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$
- ✓ $\boldsymbol{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \; con \; b \neq 0}$
- ✓ $\boldsymbol{|a+b| \leq |a|+|b| \; (desigualdad \; triangular)}$
- ✓ $\boldsymbol{|a-b| \geq |a|-|b|}$

Intervalos

El conjunto de los números reales es un conjunto totalmente ordenado. Esto es, dados dos números reales distintos a y b, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor a mayor.
Es decir, se verifica alguna de las siguientes desigualdades:

$$a < b \; o \; a \geq b \; o \; a > b \; o \; a \leq b$$

Frecuentemente se trabaja con subconjuntos de números reales, en donde aparece alguna relación de orden, por ejemplo: "el conjunto A de los números reales mayores que 3 y menores que 7".
Este conjunto A puede simbolizarse:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}$$

También puede indicarse a través del intervalo abierto $(3, 7)$. El intervalo es abierto porque no contiene los extremos 3 y 7, lo que se indica utilizando paréntesis. La representación gráfica es la siguiente:

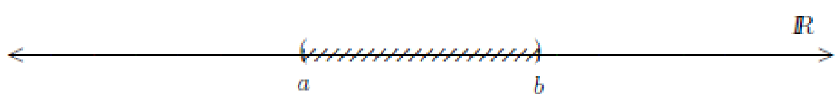
$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 7\}$$

El conjunto B puede indicarse a través del intervalo semiabierto $[3, 7)$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 7\} = [3, 7).$$

Dado el intervalo $[a, b)$, con el corchete "["se indica que a pertenece al intervalo, con el paréntesis ")" se indica que b no pertenece al intervalo.
Se puede decir que:
Los intervalos son subconjuntos de números reales definidos de la siguiente manera:
Dados $a, b \in \mathbb{R}$ definimos:

- $(a, b) = \{x/x \in \mathbb{R} \; y \; a < x < b\}$, llamando **intervalo abierto** de extremo inferior a y extremo superior b, o simplemente intervalo abierto a, b.
  Gráficamente,



- $[a, b] = \{x/x \in \mathbb{R} \; y \; a \leq x \leq b\}$, llamando **intervalo cerrado** de extremo inferior a y extremo superior b, o simplemente intervalo cerrado a, b.
  Gráficamente,

- $(a, b] = \{x/x \in \mathbb{R} \; y \; a < x \leq b\}$, llamando **intervalo semiabierto** de extremo abierto a y cerrado en b.
  Gráficamente,

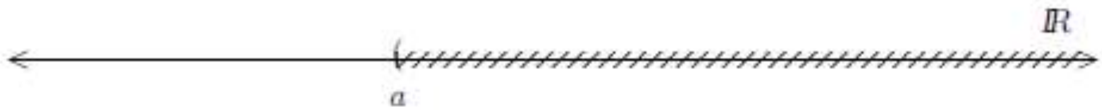
- $[a, b) = \{x / x \in \mathbb{R} \; y \; a \leq x < b\}$, llamando **intervalo semicerrado** de extremo cerrado a y abierto en b.
  Gráficamente,

Intervalos infinitos

Dados $a, b \in I\!R$ definimos:

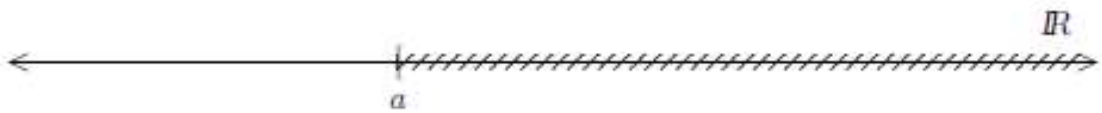
- $(a, \infty) = \{x \,/\, x \in I\!R \text{ y } a < x\}$, llamado intervalo infinito abierto de extremo inferior a.

Gráficamente,



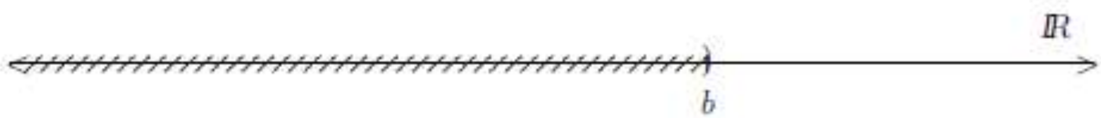
- $[a, \infty) = \{x \,/\, x \in I\!R \text{ y } a \leq x\}$, llamado intervalo infinito cerrado de extremo inferior a.

Gráficamente,



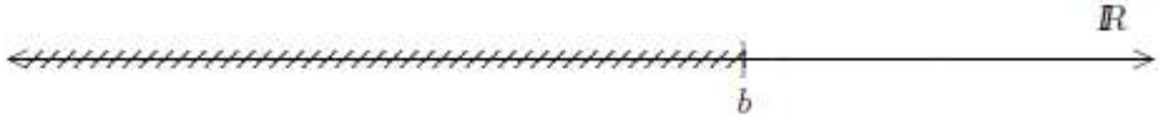
- $(-\infty, b) = \{x \,/\, x \in I\!R \text{ y } x < b\}$, llamado intervalo infinito abierto de extremo superior b.

Gráficamente,



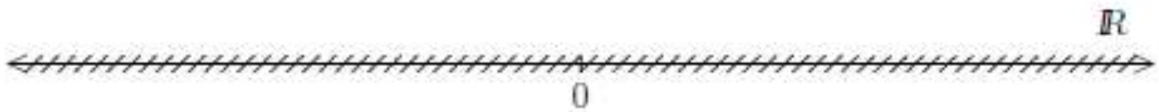
- $(-\infty, b] = \{x \,/\, x \in I\!R \text{ y } x \leq b\}$, llamado intervalo infinito cerrado de extremo superior b.

Gráficamente,



- $(-\infty, \infty) = \{x \,/\, x \in I\!R\}$, es decir, $(-\infty, \infty) = I\!R$.

Gráficamente,



NOTA: Tanto "∞" como "$-\infty$" no pertenecen al conjunto $I\!R$ de los números reales.
Observación: Observemos que con esta notación, por intervalos, podemos escribir:

- $I\!R^+ = (0, \infty)$, $\quad I\!R_0^+ = [0, \infty)$, $\quad I\!R_0^- = (-\infty, 0]$ $\quad$ y $\quad I\!R^- = (-\infty, 0)$.
- Si $|x| < a$ entonces $-a < x < a$, se denota $x \in (-a, a)$
  Si $|x| \geq a$ entonces $x \leq -a \quad$ o $\quad x \geq a$, se denota $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

1.7 Operaciones en $\mathbb{R}$

1.7.1 SUMA

- Con igual denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\ donde\ b\neq 0$$

- Con distinto denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(m\div b)\cdot a+(m\div d)\cdot c}{m}\ con\ m\ el\ múltiplo\ comun\ menor$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}\ con\ b\neq 0\ y\ d\neq 0$$

Propiedades de la suma

- Conmutativa: $a+b=b+a$.
- Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
- Elemento neutro: 0 (cero) tal que $a+0=a$.
- Opuesto aditivo: cada número real a tiene su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a+(-a)=0$.
- Cancelativa: si $a+c=b+c$ entonces $a=b$.

1.7.2 PRODUCTO

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ donde\ b\neq 0\ y\ d\neq 0$$

Propiedades del producto:

- Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$.
- Asociativa: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
- Elemento neutro: 1 (uno) tal que $a\cdot 1=a$.
- Inverso multiplicativo: cada número real $a\neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o reciproco $\frac{1}{a}$ tal que $a\cdot\frac{1}{a}=1$.
- Cancelativa: si $a\cdot c=b\cdot c\ y\ c\neq 0$ entonces $a=b$.

1.7.3 COCIENTE

Todo cociente de números fraccionarios puede transformarse en producto.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\ con\ b\neq 0, d\neq 0\ y\ c\neq 0.$$

Propiedad:

- $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\ \ con\ c\neq 0$

Propiedad DISTRIBUTIVA:

- $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

- $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$
- $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\div\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\div\boldsymbol{c}$

1.7.4 POTENCIACIÓN

$$\boldsymbol{a^n}=\underbrace{\boldsymbol{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot}\dots}_{\boldsymbol{n\ veces}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$$

a recibe el nombre de base, y n de exponente.

Regla de los signos

$(+)^{\boldsymbol{par}}=+$ $(+)^{\boldsymbol{impar}}=+$

$(-)^{\boldsymbol{par}}=+$ $(-)^{\boldsymbol{impar}}=-$

Propiedades de la potenciación.

- Todo número distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1.

$$\boldsymbol{a^0=1\ con\ a\neq 0}$$

- Potencia de exponente negativo.

$$\boldsymbol{a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}\ con\ a\neq 0}$$

- Producto de potencias de igual base.

$$\boldsymbol{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$$

- Cociente de potencias de igual base.

$$\boldsymbol{a^m\div a^n=a^{m-n}}$$

- Potencia de potencia.

$$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{m\cdot n}}$$

- La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y división.

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$
$$(a\div b)^n=a^n\div b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

1.7.5 RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{a}=b \quad si\ y\ solo\ si \quad b^n=a$$

El número a recibe el nombre de radicando, n es el índice y el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical.
Si n es impar entonces el radicando puede ser cualquier valor real.
Si n es par entonces el radicando debe ser $a\geq 0$, en caso contrario el resultado no es un número real.

Regla de los signos

$$\sqrt[par]{+}=+\ \ o\ \ -\quad en\ la\ resolución\ de\ los\ ejercicios\ se\ adoptará +$$
$$\sqrt[impar]{+}=+$$

$$\sqrt[par]{-} = no\ posee\ solución\ real$$
$$\sqrt[impar]{-} = -$$

Propiedades de la radicación

- Toda raíz puede expresarse como potencia de exponente fraccionario.
$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$$
En particular, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
- Raíz de una potencia es la potencia de la raíz.
$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}}$$
- $\boldsymbol{n}$ par entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = |\boldsymbol{a}|$.
- $\boldsymbol{n}$ **im**par entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = \boldsymbol{a}$.
- La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y división.
$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$
$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a \div b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \div \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}\ \boldsymbol{con\ b \neq 0}$$
$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$$
- Raíz de una raíz.
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[m \cdot n]{\boldsymbol{a}}$$

1.8 Extracción de factores fuera del signo radical

Se pueden extraer factores fuera del signo radical cuando el exponente de dichos factores sea mayor o igual que el índice.

Ejemplo:

$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5}$ → Descomponemos 45 como producto de sus factores primos.

$= \sqrt{3^2 \cdot 5}$ → Aplicamos propiedad distributiva de la radicación en el producto.

$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5}$ → Simplificamos.

$$\boldsymbol{\sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}}$$

1.8.1 Operaciones con radicales

Adición y sustracción de radicales:

Para sumar o restar radicales es necesario tener en cuenta el concepto de radicales semejantes:

"Dos radicales son ***semejantes*** *cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando".*

- Términos con radicales semejantes:
$-\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[3]{3}$; $-2.\sqrt[3]{2}$ y $4.\sqrt[3]{2}$; $3.\sqrt[4]{x^3}$ y $-8.\sqrt[4]{x^3}$.
- Términos con radicales no semejantes:
$-\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt{7}$; $5.\sqrt{3}$ y $7.\sqrt{2}$; $-4.\sqrt[4]{3}$ y $9.\sqrt[3]{4}$.

Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes.

Ejemplo:

$$6.\underline{\sqrt{3}}+4.\underline{\sqrt{3}}-\underline{\sqrt{3}}=(6+4-1).\sqrt{3}=9.\sqrt{3}$$

$$5.\underline{\sqrt{6}}-9.\underline{\sqrt{2}}+3.\underline{\sqrt{6}}+4.\underline{\sqrt{2}}=(5+3).\sqrt{6}+(-9+4).\sqrt{2}=8.\sqrt{6}-5.\sqrt{2}$$

Si los radicales no son semejantes la suma o la resta se resuelve teniendo en cuenta los siguientes pasos:

i) Factorizar los radicandos.
ii) Extraer factores fuera del radical.
iii) Identificar términos semejantes.
iv) Operar.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}3.\sqrt{3}-5.\sqrt{243}+7.\sqrt{27}-8.\sqrt{75}&=3.\sqrt{3}-5.\sqrt{3^4}.\sqrt{3}+7.\sqrt{3^2}.\sqrt{3}-8.\sqrt{5^2}.\sqrt{3}\\&=3.\sqrt{3}-45.\sqrt{3}+21.\sqrt{3}-40.\sqrt{3}\\&=(3-45+21-40).\sqrt{3}\\&=-61.\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4.\sqrt{2}-6.\sqrt[4]{49}-8.\sqrt{8}+\sqrt{63}&=4.\sqrt{2}-6.\sqrt[4]{7^2}-8.\sqrt{2^2}.\sqrt{2}+\sqrt{3^2}.\sqrt{7}\\&=4.\sqrt{2}-6.\sqrt{7}-8.2.\sqrt{2}+3.\sqrt{7}\\&=4.\sqrt{2}-6.\sqrt{7}-16\sqrt{2}+3.\sqrt{7}\\&=(4-16).\sqrt{2}+(-6+3).\sqrt{7}\\&=-12.\sqrt{2}-3.\sqrt{7}\end{aligned}$$

Multiplicación y división de radicales:

Para efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, estos deben tener el **mismo índice** y se procede aplicando la inversa de la propiedad distributiva:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a\cdot b}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}=\frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$$

Ejemplos:

1) $7\sqrt{12}\cdot5\sqrt{3}=7\cdot5\sqrt{12\cdot3}=35\sqrt{36}=35\cdot6=210$
2) $\frac{1}{7}\sqrt[5]{-729}\div\frac{1}{14}\cdot\sqrt[5]{3}=\frac{1}{7}\div\frac{1}{14}\sqrt[5]{-729\div3}=2\sqrt[5]{-243}=2\cdot(-3)=-6$

La operatoria con radicales también cumple las siguientes propiedades:

- **Propiedad distributiva de la multiplicación y división respecto de la suma y resta.**

$$a\,.\,(b \pm c) = (b \pm c)\,.\,a = ab \pm ac \qquad (b \pm c) : a = b : a \pm c : a$$

$$\sqrt{3}\,.\left(\sqrt{3}+\sqrt{27}\right)=\sqrt{3}\,.\sqrt{3}+\sqrt{3}\,.\sqrt{27}=\sqrt{9}+\sqrt{81}=3+9=12$$

$$\left(\sqrt{125}-\sqrt{20}\right):\sqrt{5}=\sqrt{125}:\sqrt{5}-\sqrt{20}:\sqrt{5}=\sqrt{25}-\sqrt{4}=5-2=3$$

- **Cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados.**

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a+b)\,.\,(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2.\sqrt{2}.\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=2-2.\sqrt{6}+3=5-2.\sqrt{6}$$

$$\left(\sqrt{10}+\sqrt{7}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=10-7=3$$

Para multiplicar o dividir radicales que tiene **distinto índice**, se debe proceder a calcular el mínimo común índice (m.c.m.) y además aplicar las propiedades reciprocas de las distributivas de la radicación respecto de la multiplicación y división.

Ejemplos:

$$\sqrt{5}\,.\,\sqrt[3]{5}=\sqrt[2.3]{5^{1.3}}\,.\,\sqrt[3.2]{5^{1.2}}=\sqrt[6]{5^3}\,.\,\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{5^3.5^2}=\sqrt[6]{5^5}$$

$$\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[3.4]{a^{2.4}}\,.\,\sqrt[4.3]{a^{3.3}}=\sqrt[12]{a^8}\,.\,\sqrt[12]{a^9}=\sqrt[12]{a^8.a^9}=\sqrt[12]{a^{17}}=\sqrt[12]{a^{12}.a^5}=a.\sqrt[12]{a^5}$$

$$\frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[6]{7^5}}=\frac{\sqrt[4.3]{7^{3.3}}}{\sqrt[6.2]{7^{5.2}}}=\frac{\sqrt[12]{7^9}}{\sqrt[12]{7^{10}}}=\sqrt[12]{\frac{7^9}{7^{10}}}=\sqrt[12]{\frac{1}{7}} \qquad \frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[5]{b^2}}=\frac{\sqrt[4.5]{b^{3.5}}}{\sqrt[5.4]{b^{2.4}}}=\frac{\sqrt[20]{b^{15}}}{\sqrt[20]{b^8}}=\sqrt[20]{\frac{b^{15}}{b^8}}=\sqrt[20]{b^7}$$

Racionalización de denominadores

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional; por lo tanto, siempre que en el mismo aparezcan radicales irracionales, se debe hallar una fracción equivalente a la dada con denominador racional.

Pueden presentarse los siguientes casos:

Primer caso: en el denominador hay un único radical con índice igual a dos.

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Segundo caso: en el denominador hay un único radical con índice mayor a dos.

Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe amplificar por una raíz que tenga el mismo índice que la raíz del denominador, cuyo radicando tenga los mismos factores, pero con exponente igual a la diferencia entre el índice y el exponente dado.

Ejemplos:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2^2}} \longrightarrow \frac{3}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3.\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2.2^3}} = \frac{3.\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3.\sqrt[5]{8}}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{a^3b^2}} \longrightarrow \frac{4}{\sqrt[4]{a^3b^2}} = \frac{4}{\sqrt[4]{a^3b^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[4]{ab^2}} = \frac{4.\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[4]{a^3b^2ab^2}} = \frac{4.\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[4]{a^4b^4}} = \frac{4.\sqrt[4]{ab^2}}{ab}$$

Tercer caso: el denominador es una suma o una resta de uno o dos radicales de índice dos.

Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe aplicar el producto de una suma de dos términos por su diferencia.

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} &= \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{7.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}).(\sqrt{3}+\sqrt{5})} \\ &= \frac{7.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{7.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} \\ &= \frac{7.(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} \\ &= -\frac{7}{2}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \\ &= -\frac{7}{2}\cdot\sqrt{3} - \frac{7}{2}\cdot\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}-1}{5-\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{3}-1}{5-\sqrt{6}} \cdot \frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1).(5+\sqrt{6})}{(5-\sqrt{6}).(5+\sqrt{6})} \\ &= \frac{5.\sqrt{3}+\sqrt{3}.\sqrt{6}-5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} \\ &= \frac{5.\sqrt{3}+\sqrt{18}-5-\sqrt{6}}{25-6} \\ &= \frac{5.\sqrt{3}+3.\sqrt{2}-5-\sqrt{6}}{19} \\ &= \frac{5}{19}\cdot\sqrt{3} + \frac{3}{19}\cdot\sqrt{2} - \frac{5}{19} - \frac{1}{19}\cdot\sqrt{6}\end{aligned}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para comenzar:

Expresión de números usando potencias de 10

La notación científica sirve para trabajar cómodamente con números muy chicos o muy grandes, aprovechando las propiedades de la potenciación.

Para escribir un número positivo de esta manera, hay que descomponerlo como producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de diez.

$256.000 = 2{,}56 \cdot 10^5$ $\qquad$ $0{,}0000027 = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$

Para escribir un número negativo con notación científica, se descompone el número como producto de un número mayor que -10 y menor o igual que -1, por una potencia de diez.

$-0{,}007 = (-7) \cdot 10^{-3}$ $\qquad$ $-13.000.000 = (-1{,}3) \cdot 10^7$

El exponente de la potencia indica el número de lugares que se debe "mover" la coma para reconstruir el número (hacia la derecha, si el exponente es positivo, o hacia la izquierda, si es negativo).

Dar en la tecla

Para ingresar $1{,}3 \cdot 10^5$ se pulsa 1 . 3 EXP 5.

Para comprender el tema, los invito a visualizar los siguientes videos explicativos:

[¿QUÉ ES NOTACIÓN CIENTÍFICA? ¿QUÉ NECESITAMOS SABER?]

[EJEMPLO 1] (DE NÚMERO DECIMAL POSITIVO O ENTERO A NOTACIÓN CIENTÍFICA).

[EJEMPLO 2] (DE NOTACIÓN CIENTÍFICA A NÚMERO DECIMAL O ENTERO POSITIVO).

[EJEMPLO 3] (DE NÚMERO DECIMAL NEGATIVO O ENTERO A NOTACIÓN CIENTÍFICA).

[EJEMPLO 4] (DE NOTACIÓN CIENTÍFICA A NÚMERO DECIMAL O ENTERO NEGATIVO).

PRACTICO N° 1: Conjuntos numéricos.

Ejercicio 1: Complete con $\in, \notin, \subset,\ o\ \not\subseteq$ según corresponda.

a) $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{Z}$　b) $\sqrt{9} \ldots \mathbb{Q}$　c) $-\frac{2}{3} \ldots \mathbb{Z}$　d) $0{,}7 \ldots \mathbb{I}$　e) $4{,}1111 \ldots \mathbb{I}$

f) $0 \ldots \mathbb{N}$　g) $\pi \ldots \mathbb{Q}$　h) $\sqrt{5} \ldots \mathbb{R}$　i) $-5 \ldots \mathbb{N}$　j) $1{,}4 \ldots \mathbb{R}$

Ejercicio 2: de un ejemplo de número:

a) real no irracional
b) entero no natural
c) racional no entero
d) real no racional

Ejercicio 3: Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Todo número entero es natural.
b) Todo número natural es un número real.
c) No existen números enteros que no sean racionales.
d) $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
e) Entre dos números enteros existe un número finito de números enteros.
f) Entre dos números racionales hay un número finito de números racionales.
g) Algunos números racionales no son enteros.
h) $a^n \cdot a^n = a^{2n}$
i) $a^n \cdot a^n = a^{n^2}$
j) Existen números irracionales cuyo cuadrado es racional.
k) Entre dos números reales hay infinitos números reales.

Ejercicio 4: dados los siguientes subconjuntos de números reales.

a) Exprese cada uno de los conjuntos como intervalos.
b) Represente los intervalos en la recta numérica.

$A = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 1\}$　$B = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{7}{2} < x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : 1{,}5 < x < 3\}$　$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$　$F = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{3}{2}\right\}$

Ejercicio 5: Resuelva e indique si el resultado es un número natural, y/o entero y represéntelo en la recta numérica:

a) $16 \div (-2) - (-4+2) + 5 \cdot (-1) =$
b) $8 - 6 \div (-3) + 4 \div (-2) - 3 \cdot (-4) =$
c) $5 - \{3 - 2 \cdot (-5) - [-(-4) + (-2) + 9 \div (-3) - 4 + (-3+5)] - 1\}$
d) $18 \div (-9) - \{-[2 - 5 \cdot (-1)] + 8\} - (-7) =$

Nota:

Para resolver un **cálculo combinado en donde hay paréntesis y corchetes** pueden seguir estos pasos:

$[(-8-5\,.\,2)\,.\,(-1-1)]:(-6)+2=$ — 1. Se separa en términos.

$[(-18)\,.\,(-2)]:(-6)+2=$ — 2. Se resuelven las operaciones que encierran los paréntesis.

$36:(-6)+2=$ — 3. Se resuelven las operaciones que encierran los corchetes.

$-6+2=-4$ — 4. Se resuelven todas las operaciones.

Ejercicio 6: Calcule, llevando las expresiones decimales exactas y periódicas a fraccionarias, indique si el resultado es un número natural, y/o entero, y/o racional, y represéntelo en la recta numérica:

a) $0,\hat{6}+(0,8-0,5)\div 0,75=$

b) $(0,5+1)-\left(3+\frac{2}{3}\right)-(-0,2)^{-2}+(1,5-2)^3+0,\hat{3}=$

c) $\frac{1-0,5}{0,75}+\frac{1,5-1}{2-0,25}=$

d) $\frac{\left(\frac{1}{2}+1,\hat{3}\right)^2}{3\cdot(1-0,08\hat{3})}+4,\hat{7}=$

Nota:

Para resolver un **cálculo combinado,** pueden seguir estos pasos.

$\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right):\frac{4}{15}+\frac{1}{6}=$ — 1. Se separa en términos.

$\left(\frac{6}{15}-\frac{5}{15}\right):\frac{4}{15}+\frac{1}{6}=$ — 2. Se resuelven las operaciones que encierran los paréntesis.

$\frac{1}{15}\cdot\frac{15}{4}+\frac{1}{6}=$ — 3. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.

$\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$ — 4. Se resuelven las sumas y las restas.

Ejercicio 7: Elimine paréntesis, corchetes y llaves, y luego resuelva:

a) $1\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-1+\left[\frac{3}{4}-3-\left(2\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}\right)-1\frac{1}{4}\right]-1\frac{1}{2}\right\}=$

b) $\frac{2}{3}-\left[-\frac{1}{2}+1-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\right)-2\right]-\frac{1}{4}-\left\{-1+\left[\frac{2}{3}-\left(2\frac{1}{6}-1\frac{1}{4}\right)\right]\right\}=$

c) $-1+\frac{1}{2}-\left\{5-\left[\frac{1}{4}+\left(3-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{5}\right]-\frac{1}{2}\right\}+2-\frac{13}{40}=$

Ejercicio 8: Resuelva, indique a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado y represéntelo en la recta numérica:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}+\frac{10}{9}+\left(\frac{2}{3}\div\frac{8}{27}\right)^{-1}-\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}\right]^{-1}=$

b) $\left(1-\frac{75}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{81}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}=$

c) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{-24}} + \sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-24} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{\left(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^{-2} \div \left(\frac{6}{5}\right)^{0}}{\frac{2}{3}\cdot(4{,}5)\div(-0{,}1)^{-1}} - \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2} + (-1)^{-3}} =$

e) $\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^{2}}{\sqrt{\frac{11}{25}+1}} \cdot (-12) =$

f) $\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}+\frac{5}{4}}}{1-\sqrt[10]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\div\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}} =$

g) $\sqrt{0{,}04 \cdot \frac{1}{4}} + (0{,}2)^{3} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \div \frac{1}{2} =$

h) $\left[4,\widehat{39} - 1{,}4 + \left(2{,}9\hat{7} + 0{,}0\hat{2}\right)\right]^{-1} \div (-0{,}5)^{3} + 2,\widehat{62} =$

i) $\left[\frac{\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-1}+0{,}7\div 2{,}\widehat{3}-0{,}25\div 0{,}\widehat{6}}{\sqrt{0{,}\widehat{7}}\cdot\sqrt{\frac{4}{7}}-(1-0{,}\widehat{3})^{-2}+1{,}5}\right]^{2} =$

Nota:

Para **resolver un cálculo combinando las seis operaciones,** se debe tener en cuenta el orden de resolución de las operaciones, que es el mismo que para resolver los cálculos combinados con números enteros.

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} : \frac{3}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)^{2} - \frac{5}{12} \cdot \frac{24}{30} =$ 1. Se separa en términos.

$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} + \frac{16}{9} - \frac{5}{12} \cdot \frac{24}{30} =$ 2. Se resuelven las potencias y las raíces.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \frac{1}{3} =$

$\frac{2}{3} + \frac{16}{9} - \frac{1}{3} =$ 3. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.

$\frac{6}{9} + \frac{16}{9} - \frac{3}{9} = \frac{19}{9}$ 4. Se resuelven las sumas y las restas.

En caso de que haya paréntesis y corchetes, se resuelven primero los cálculos que ellos encierran respetando la jerarquía de las operaciones.

$\sqrt[5]{\frac{1}{243}} : \left[\frac{7}{6} - \left(1-\frac{1}{3}\right)^{4} + \frac{11}{54}\right] \cdot \frac{5}{3} =$ 1. Se separa en términos dentro de los corchetes.

$\sqrt[5]{\frac{1}{243}} : \left[\frac{7}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^{4} + \frac{11}{54}\right] \cdot \frac{5}{3} =$ 2. Se resuelve el paréntesis.

$\sqrt[5]{\frac{1}{243}} : \left[\frac{7}{6} - \frac{16}{81} + \frac{11}{54}\right] \cdot \frac{5}{3} =$ 3. Se resuelve la potencia.

$\sqrt[5]{\frac{1}{243}} : \left[\frac{189-32+33}{162}\right] \cdot \frac{5}{3} =$

$\sqrt[5]{\frac{1}{243}} : \frac{95}{81} \cdot \frac{5}{3} =$ 4. Se resuelven las sumas y las restas.

$\frac{1}{3} \cdot \frac{81}{95} \cdot \frac{5}{3} = \frac{9}{19}$ 5. Se resuelven las operaciones según su jerarquía.

Ejercicio 9: Resuelva:

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)^{-1}-\sqrt[3]{-8}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+(-2)^{-2}\div(-4)^{-1}=$

b) $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}}\cdot\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}+(-2)^{3}-\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{8^{2}}}\right)=$

c) $\sqrt{\left\{\left[20\div(-2)^{2}+2^{5}\div 2^{2}+\sqrt{49}\div 2\right]\right\}^{4}}=$

d) $\sqrt[3]{\left[\left(\frac{16}{9}\right)^{2}\div\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}-\left(-\frac{2}{5}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{21}{4}\right)\right]\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}}=$

Ejercicio 10: Resuelva, represente el resultado y diga a que conjuntos numéricos pertenece:

a) $\frac{15}{10}\cdot\sqrt{28}-\frac{1}{25}\sqrt{700}+0{,}1\cdot\sqrt{7}=$

b) $\left(3-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)\cdot\sqrt{2}-5\sqrt{2}+11\sqrt{2}=$

c) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{54}-\frac{5}{6}\sqrt[3]{16}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{250}=$

d) $4\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+5\sqrt[9]{8}-3\sqrt[3]{2}=$

e) $3\sqrt[4]{4}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}-9\sqrt{50}=$

Ejercicio 11: Racionalice los siguientes denominadores:

a) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}=$

b) $\frac{\sqrt[3]{5}+2}{\sqrt[3]{3}}=$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}=$

d) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}=$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$

f) $\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}=$

Ejercicio 12: Aplique propiedades y simplifique:

a) $\frac{\sqrt{5x}\cdot\sqrt[3]{x\cdot 5^{2}}}{\sqrt{x^{3}}\cdot\sqrt[6]{5^{2}\cdot x}}=$

b) $\frac{(2^{3})^{-2}\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{(2^{10})^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}=$

c) $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3^{3}}\cdot 2^{-3}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{4}\cdot\sqrt[3]{3^{4}}}=$

d) $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}=$

Ejercicio 13: Escriba en notación científica los siguientes números

a) $78.000.000.000 =$
b) $128.000 =$
c) $-234.000.000 =$
d) $-10.000 =$
e) $0{,}00004 =$
f) $0{,}0123 =$
g) $0{,}00000000\hat{3} =$
h) $-0{,}000028 =$

Ejercicio 14: Escriba todas las cifras de los siguientes números.

a) $3{,}3 \cdot 10^{7} =$
b) $9 \cdot 10^{-2} =$
c) $(-5{,}1) \cdot 10^{4} =$
d) $4{,}09 \cdot 10^{9} =$
e) $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 10^{6} =$
f) $(-3{,}1) \cdot 10^{-4} =$

Ejercicio 15: Resuelva las siguientes situaciones problemáticas

a) PROBLEMA 1

Vero quiere calcular a cuántos kilómetros equivale un año luz, es decir, cuántos kilómetros recorre la luz en un año, y expresarlo en notación científica. Ya averiguó que la luz viaja a 300.000 kilómetros por segundo, pero le falta hacer algunas cuentas. Ayudala.

a. ¿Cuántos segundos hay en un año?

b. ¿A cuántos kilómetros equivale un año luz?

b) PROBLEMA 2. Ayuda a Mauro:

Mauro tenía que expresar en notación científica las distancias de algunos planetas al Sol, y no lo hizo bien. Corregí lo que escribió y expresalo en forma correcta.

Mercurio: 57.900.000.000 m = $579 \cdot 10^8$ m

Urano: 28.710.000.000 hm = $28{,}71 \cdot 10^9$ hm

Marte: 227.900.000 km = $227{,}9 \cdot 10^6$ km

Neptuno: 4.497.000.000.000.000 mm = $4.497 \cdot 10^{12}$ mm

Saturno: 142.700.000.000 dam = $142{,}7 \cdot 10^9$ dam

Unidad N° 2: *"Razones trigonométricas – Vectores".*

Resolución de triángulos rectángulos: Teorema de Pitágoras – Razones Trigonométricas – Suma de ángulos internos. Vectores: Definición – Operaciones - Representación Gráfica - Descomposición de vectores en el plano.

1. Resolución de triángulos rectángulos

Triángulos Rectángulos:

Por otro lado, se distingue que la suma de la medida de ángulos interiores de cualquier triangulo es siempre 180°.

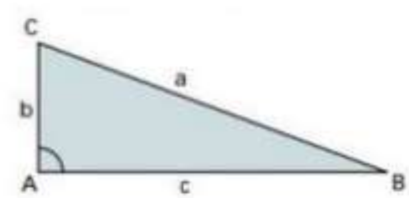
Cuando no se conocen datos numéricos de los triángulos rectángulos, hay distintas fórmulas o teoremas que nos permiten averiguar esos datos:

a. Teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras fue comprobado en el siglo IV a.c. por el filósofo y matemático griego Pitágoras, pero se estima que pudo haber sido previo a su existencia, o demostrado bajo otra denominación.

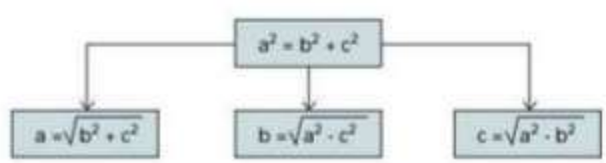
Este teorema establece que:

"En todo triangulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos".



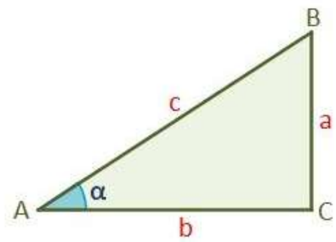
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Formulas derivadas



b. Razones trigonométricas.

Las razones trigonométricas de un ángulo α son las razones obtenidas considerando las tres longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.



- El seno de un ángulo α se define como la razón entre las longitudes del cateto opuesto a α y la hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

- El coseno de un ángulo α se define como la razón entre las longitudes del cateto contiguo o cateto adyacente a α y la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

- La tangente de un ángulo α se define como la razón entre las longitudes del cateto opuesto a α y el cateto contiguo o cateto adyacente a α.

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$

Razones trigonométricas de ángulos característicos.

α (grados)	0º	30º	45º	60º	90º	135º	180º	225º	270º	315º
α (radianes)	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	-1	0	1	$-\infty$	-1

2. Vectores.

Dados dos puntos A y B se llama **Vector** al segmento orientado $\overline{\mathrm{AB}}$, y se distingue de la siguiente manera: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$, siendo $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ las coordenadas de dicho vector en el plano xy.

Todo vector queda caracterizado por DIRECCIÓN, MÓDULO Y SENTIDO.

Sean A y B puntos del espacio. Entonces el **módulo o norma** del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ es:

I. 0 si A coincide con B.
II. La longitud de $\overline{\mathrm{AB}}$ si A no coincide con B.
Denotaremos con $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ al módulo de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
Dados $\mathrm{A} = (x_1, y_1)$ y $\mathrm{B} = (x_2, y_2) \rightarrow \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Los vectores que tienen módulo 1 se llaman **vectores unitarios** y el que tiene módulo cero se denomina **vector Nulo.**

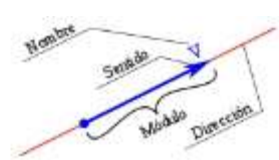
Sean A y B puntos del espacio. Entonces la **dirección** del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ es:

I. La recta que pasa por A y B, si A y B no coinciden.
II. No existe, si A coincide con B.

Sean A y B puntos del espacio. Entonces el **sentido** del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ es:

I. Es la orientación del segmento, del origen A al extremo B del vector, si A y B no coinciden.
II. No existe si A coincide con B.

Para simplificar en notación escribiremos un determinado vector por su nombre y no distinguiendo sus puntos inicial y final, es decir: $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Igualdad de vectores: aceptaremos que cualesquiera sean los puntos A, B, C y D se verifica:

1. $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{\mathrm{BB}}$, cualesquiera sean los puntos A y B,
2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, si A no coincide con B, C no coincide con D, y los vectores $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ son **paralelos** (cuando tienen la misma **dirección**, es decir que deben estar contenidos en rectas paralelas) con el mismo sentido y coinciden en **modulo**.

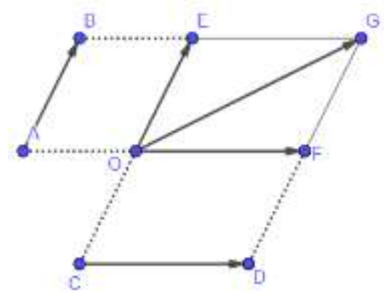
2.1 Operaciones con vectores

SUMA DE VECTORES

Sean A, B, C y D puntos, se llama **suma de vectores** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ y se lo representa con $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, al vector que se obtiene por medio del siguiente proceso:

I. REGLA DEL PARALELOGRAMO: Si A no coincide con B, C no coincide con D, realizamos los siguientes pasos:
P1: sea O un punto cualquiera. Entonces hallaremos los puntos E y F tales que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OF}$,
P2: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ es por definición, $\overrightarrow{OG}$, donde $\overline{OG}$ es la diagonal del paralelogramo $OEGF$.
II. Si A coincide con B entonces $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}$.
III. Si C coincide con D entonces $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Esto es:



PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}$ un vector. El vector $\lambda\vec{v}$ se obtiene del siguiente modo:

I. Si $\vec{v}=\vec{0}$ entonces $\lambda\cdot\vec{v}=\vec{0}$.
II. Si $\lambda=0$, entonces $\lambda\cdot\vec{v}=\vec{0}$.
III. Si $\lambda>0$ entonces $\|\lambda\cdot\vec{v}\|=\lambda\cdot\|\vec{v}\|$ y $\lambda\vec{v}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$.
IV. Si $\lambda<0$ entonces $\|\lambda\cdot\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$ y $\lambda\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$ y sentido opuesto al de $\vec{v}$.

Los ítems I. y II. representan las condiciones de paralelismo entre vectores (analíticamente).
Por lo tanto, dos vectores son **paralelos**, si y sólo si, existe un numero λ tal que $\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}$.

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Para cualquier par de vectores $\vec{u},\vec{v}$, se llama producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ y lo representaremos con $\vec{u}\cdot\vec{v}$, al número real dado por:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha$$

<u>Ángulo entre vectores</u>:

Se llamará ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, y se denotara por $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$, al ángulo convexo cuya medida radial α se calcula a partir de la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

<u>Condición de perpendicularidad</u>:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

I. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares,

II. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

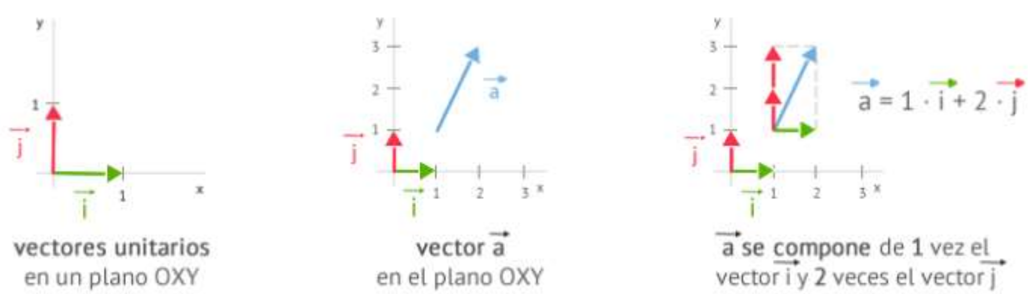
2.2 Representación gráfica de vectores.

Gráficamente, un vector se representa como una flecha ubicada en un eje de coordenadas.
En esta flecha podemos identificar cada uno de los elementos que lo conforman (ya estudiadas anteriormente).

Todo vector se puede expresar como la suma de otros vectores que sirven de patrón o referencia. Estos vectores reciben el nombre de vectores unitarios ya que su módulo vale 1 (módulo unitario). En concreto se emplean:

- $\vec{\imath}$ o $\overrightarrow{u_x}$ es un vector unitario en la dirección del eje X
- $\vec{\jmath}$ o $\overrightarrow{u_y}$ es un vector unitario en la dirección del eje Y

Ejemplo:



Como se muestra en el ejemplo anterior, se ha obtenido una forma de representar analíticamente un vector a partir de su gráfica. A continuación, se puede encontrar otras formas de representación posibles. De esta forma, un vector $\vec{a}$ con origen en el punto

$A = (A_x, A_y)$ y extremo en el punto $B = (B_x, B_y)$ se puede representar analíticamente de las siguientes formas:

1 opción

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

2 opción

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{u_x} + a_y \cdot \vec{u_y}$$

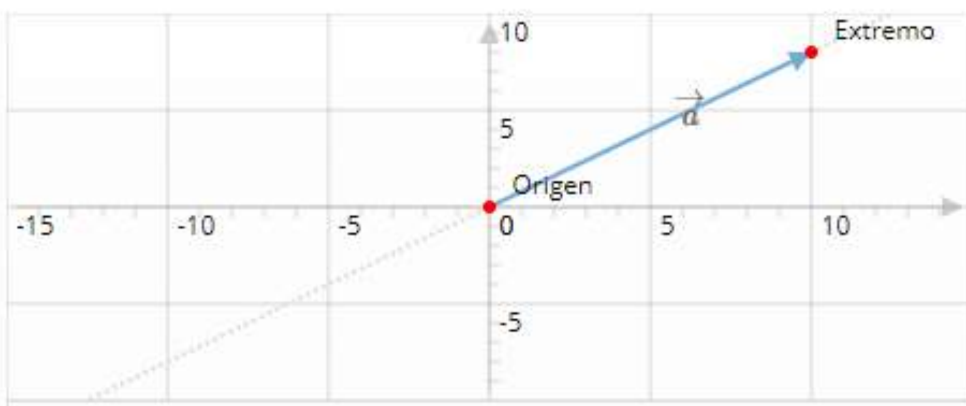
3 opción

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

donde a_x y a_y reciben el nombre de **componentes cartesianas** del vector y se calculan de la siguiente forma:

$$a_x = B_x - A_x$$
$$a_y = B_y - A_y$$

Esto es:

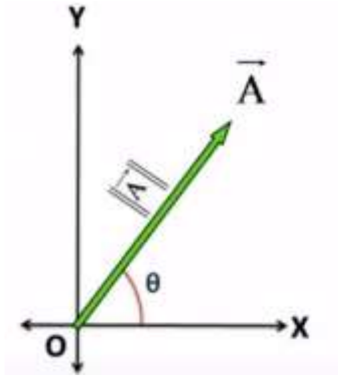


Si se trabaja en el espacio, se considera además:

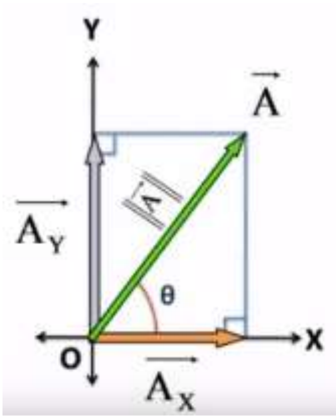
- $\vec{k}$ o $\vec{u_z}$ es un vector unitario en la dirección del eje Z

2.3 Descomposición de vectores en plano

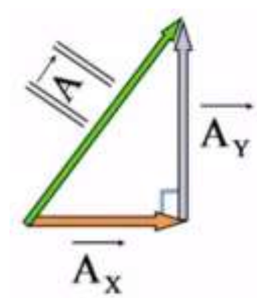
Dado un vector $\vec{A}$ en un sistema de ejes bidimensional, donde se conoce su módulo $\|\vec{A}\|$ y orientación, dada por el ángulo θ que forma con en el eje X, entonces se puede descomponer de la siguiente manera:



Desde el extremo del vector se trazan segmentos perpendiculares a los ejes X e Y, y de esta forma se tiene los vectores $\overrightarrow{A_x}$ y $\overrightarrow{A_y}$, que son las proyecciones del vector $\vec{A}$ en los ejes.



Esto nos permite escribir al vector $\vec{A}$ como la suma de los vectores $\overrightarrow{A_x}$ y $\overrightarrow{A_y}$, esto es: $\vec{\mathbf{A}} = \overrightarrow{\mathbf{A}_x} + \overrightarrow{\mathbf{A}_y}$.
Para expresar estas componentes en términos de la información que ya se conoce, es decir del $\|\vec{A}\|$ y el ángulo θ, se forma el triángulo rectángulo:

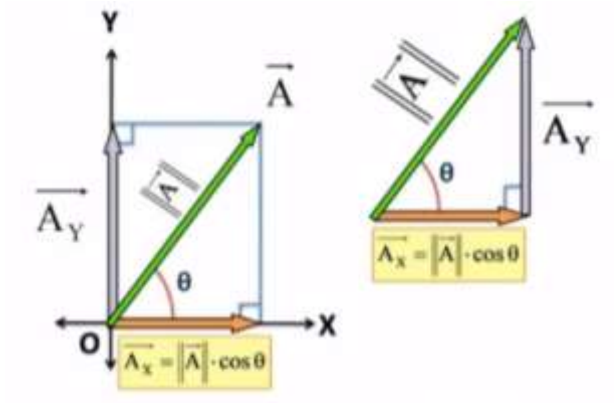


Luego, se aplica la razón trigonométrica coseno al ángulo θ: $\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$, es decir que:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_x}}{\|\vec{A}\|}$$

Despejando $\overrightarrow{\mathbf{A}_x}$, se obtiene:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_x} = \|\vec{A}\| \cdot \cos\theta$$

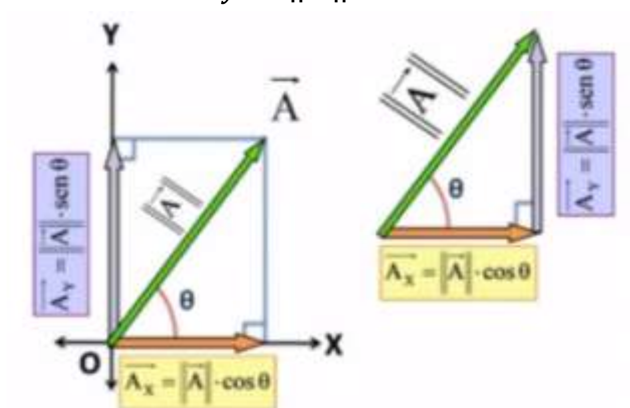


Posteriormente, aplicando la razón trigonométrica coseno al ángulo θ: $\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, es decir que:

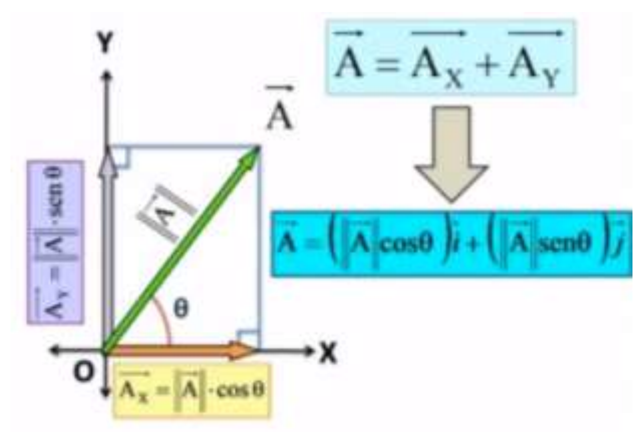
$$\sin\theta = \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_y}}{\|\vec{A}\|}$$

Despejando $\overrightarrow{\mathbf{A}_y}$, se obtiene:

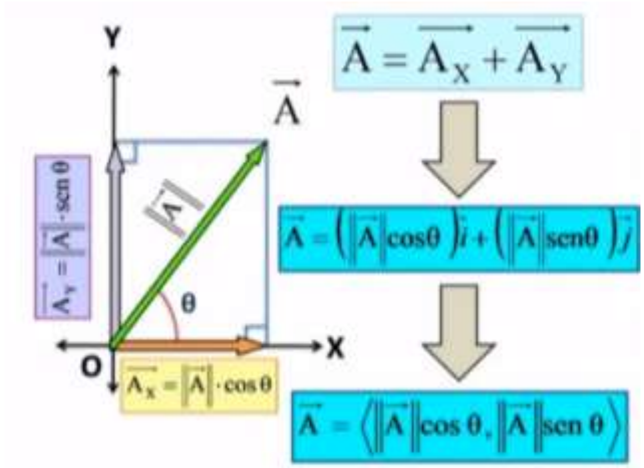
$$\overrightarrow{\mathbf{A}_y} = \|\vec{A}\| \cdot \sin\theta$$



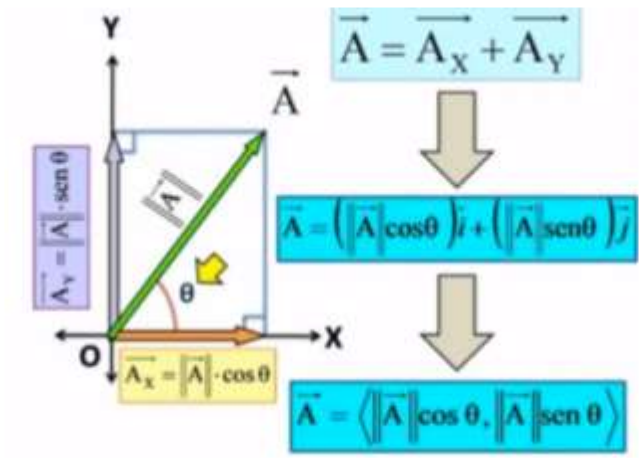
Luego, sabiendo que $\vec{\mathbf{A}} = \overrightarrow{\mathbf{A}_x} + \overrightarrow{\mathbf{A}_y}$, quedará expresado de la siguiente forma, utilizando la noción de vectores unitarios $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$:



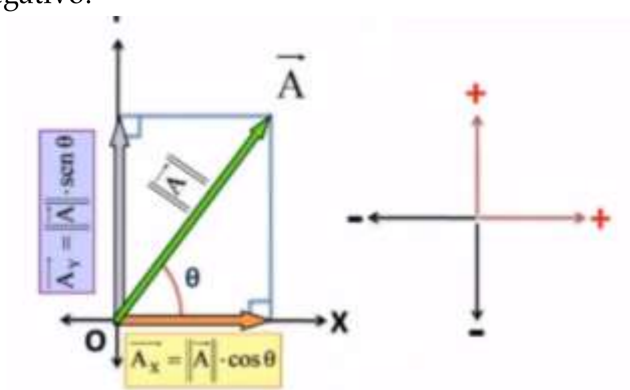
O como la pareja de componentes en x e y:



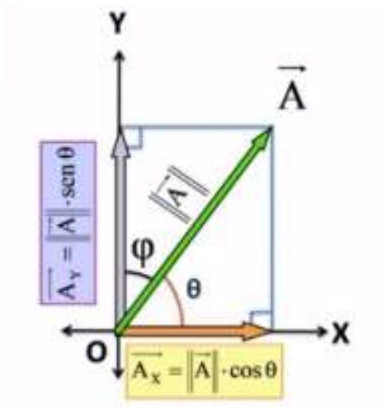
De esta forma se expresa un vector $\vec{A}$ en terminos de sus componentes rectangulares $\overrightarrow{\mathbf{A}_x}$ e $\overrightarrow{\mathbf{A}_y}$, obtenidas de la descomposición del vector $\vec{A}$. Esto siempre será asi, siempre y cuando el ángulo θ sea el que forma el vector con el eje X:



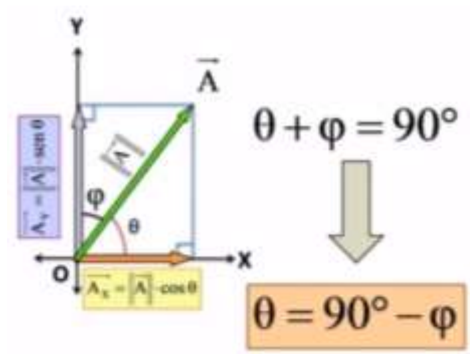
Es importante recordar que, si las componentes apuntan hacia arriba son de signo positivo y si apuntan hacia abajo son de signo negativo:



Si se conoce el ángulo que forma el vector con el eje Y (φ):



Entonces, se puede concluir que $\varphi + \theta = 90°$, pues son complementarios.



El procedimiento de descomponer vectores resulta muy útil cuando se trata de sumar o restar varios vectores en forma analítica, ya que la operación se efectúa entre las componentes respectivas.

$$\vec{P} = \left\langle \overrightarrow{P_X}, \overrightarrow{P_Y} \right\rangle \quad \vec{Q} = \left\langle \overrightarrow{Q_X}, \overrightarrow{Q_Y} \right\rangle$$

SUMA

$$\vec{P} + \vec{Q} = \left\langle \overrightarrow{P_X} + \overrightarrow{Q_X}, \overrightarrow{P_Y} + \overrightarrow{Q_Y} \right\rangle$$

RESTA

$$\vec{P} - \vec{Q} = \left\langle \overrightarrow{P_X} - \overrightarrow{Q_X}, \overrightarrow{P_Y} - \overrightarrow{Q_Y} \right\rangle$$

También, cuando se multiplica un escalar por el vector, este escalar se distribuye con las componentes del vector.

ESCALAR LAMBDA

$$\lambda\vec{P} = \left\langle \lambda\overrightarrow{P_X}, \lambda\overrightarrow{P_Y} \right\rangle$$

ESCALAR OMEGA

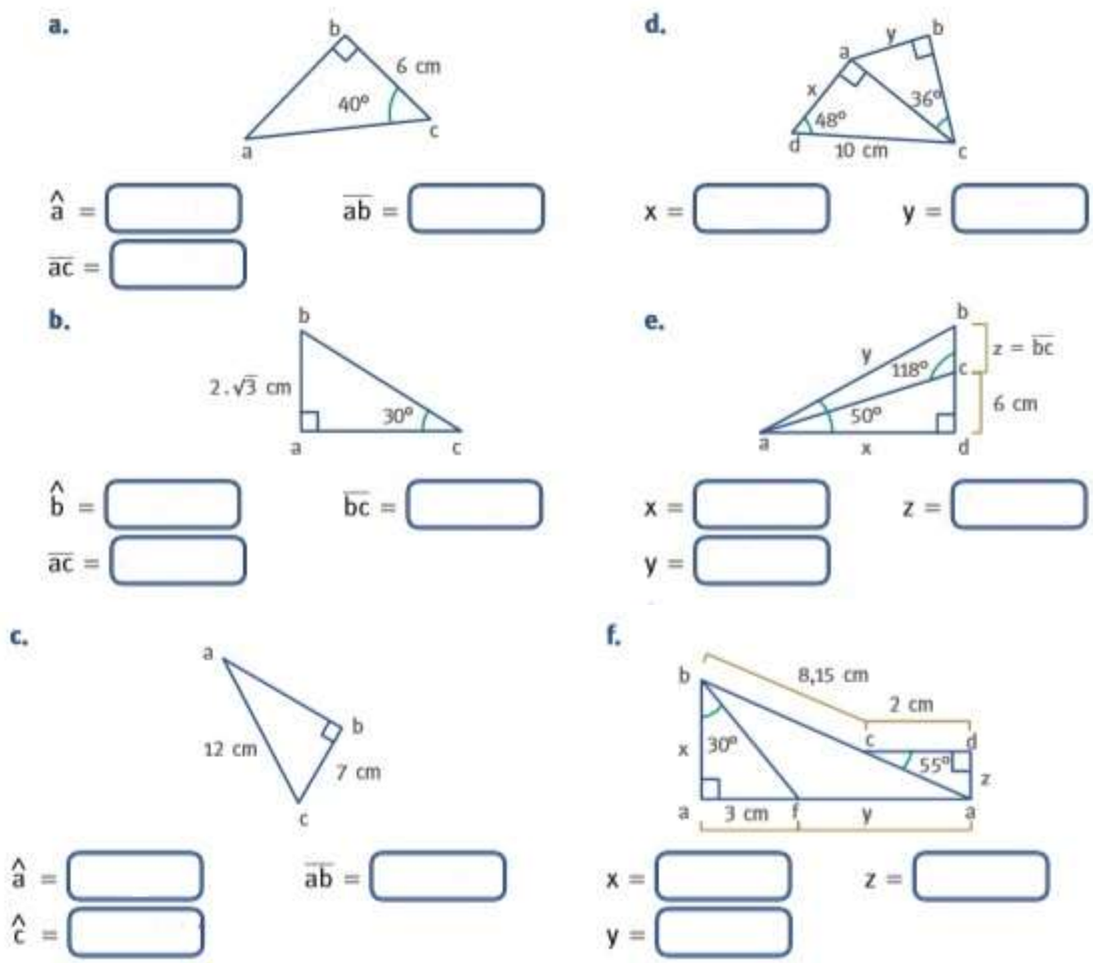
$$\omega\vec{Q} = \left\langle \omega\overrightarrow{Q_X}, \omega\overrightarrow{Q_Y} \right\rangle$$

SUMA O RESTA

$$\lambda\vec{P} \pm \omega\vec{Q} = \left\langle \lambda\overrightarrow{P_X} \pm \omega\overrightarrow{Q_X}, \lambda\overrightarrow{P_Y} \pm \omega\overrightarrow{Q_Y} \right\rangle$$

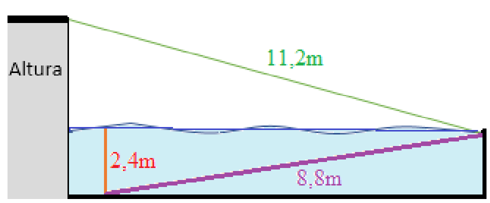
PRACTICO N° 2: Razones trigonométricas – Vectores.

Ejercicio 1: Calcule y complete



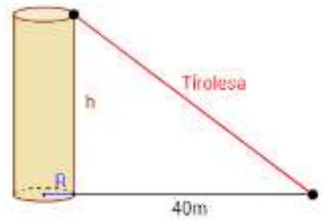
Ejercicio 2: Resuelva las siguientes situaciones problemáticas.

a) Un clavadista está entrenando en una piscina con una plataforma. Cuando realiza el salto, cae a una distancia de 1 metro de la plataforma sumergiéndose 2,4 metros bajo el agua. Para salir a la superficie, bucea hasta el final de la piscina siguiendo una línea transversal de 8,8 metros de longitud.

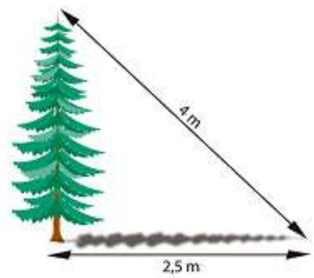


Si la longitud desde la parte superior de la plataforma al lugar en donde emerge del agua es de 11,2 metros, ¿cuál es la altura de la plataforma (desde el nivel del agua)?

b) Un parque de diversiones quiere construir una nueva atracción que consiste en una tirolesa que parte desde la base superior de una columna con forma cilíndrica. Si el radio de la columna es R=2m metros y el área de su lateral es de 120 metros cuadrados, calcular la longitud del cable de la tirolesa para que alcance el suelo a 40 metros de distancia de la columna.



c) Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?



Ejercicio 3: Dados los siguientes vectores:

Calcular:

(a) $\vec{u}+\vec{v}$,

(b) $\lambda.\vec{w}$ con $\lambda = 2$,

(c) $2.\vec{w}+\vec{v}$,

(d) $\vec{u}-\vec{v}$.

Ejercicio 4: Graficar los siguientes vectores:

(a) $[\vec{v_1}]_C = (-2, 1)$,

(b) $[\vec{v_2}]_C = (1, 3)$

(c) $[\vec{v_3}]_C = (2, -2)$.

Notaremos con $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ a la base canónica de $\mathbf{V}_2$ y con $\mathcal{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ a la base canónica de $\mathbf{V}_3$.

Ejercicio 5: Sean $\alpha = 3,\ \beta = 2,\ [\vec{u}]_C = (1,3)\ \ y\ \ [\vec{v}]_C = (-2,5)$, calcular las siguientes expresiones:

(a) $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

(b) $\|\beta\vec{v}\| + \|\alpha\vec{u}\|$

(c) $\|\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\|$

¿Qué conclusiones puede obtener de los ítems anteriores?

Ejercicio 6:

a) Hallar el módulo del vector $\vec{u}$ de origen P y extremo Q, siendo:

(i) $P = (3, 6)$ y $Q = (5, -8)$.

(ii) $P = (-20, -5, 8)$ y $Q = (-4, -3, 2)$.

b) Para cada uno de los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ del apartado (a) encontrar un vector $\vec{v}$ normalizado.
NOTA: normalizar un vector es transformarlo en un vector cuya norma o módulo sea 1.

Ejercicio 7: Determinar si los siguientes vectores son paralelos, perpendiculares o ninguna de las dos.

(a) $[\vec{u}]_C = (3, 3)$, $[\vec{v}]_C = (2, 2)$

(b) $[\vec{u}]_C = (5, 1)$, $[\vec{v}]_C = (-3, 7)$

(c) $[\vec{u}]_C = (2, -3)$, $[\vec{v}]_C = (6, 4)$

Ejercicio 8: Hallar el ángulo determinado por los pares de vectores del ejercicio anterior**.**

Ejercicio 9: Hallar un vector $\vec{u}$ de longitud 10 que tenga la misma dirección y sentido contrario a $\vec{v}$, siendo $[\vec{v}]_C = (-4,3)$.

Ejercicio 10: Hallar un vector $\vec{u}$ de longitud 3 que sea perpendicular a $\vec{v}$, siendo $\vec{v} = (5,2)$.

Ejercicio 11: Determinar todos los valores de β tales que $P = (2,3),\ Q = (7,-1)\ \ y\ R = (4,\beta)$ formen un triángulo rectángulo.

Unidad N° 3: *"Ecuaciones – Sistema de ecuaciones"*.

Ecuaciones lineales con una incógnita. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos de resolución. Ecuación de segundo grado. Uso de calculadora.

0. Introducción

Las ecuaciones son de gran importancia, pues la mayor parte de las situaciones problemáticas de la vida cotidiana pueden planearse a través de ecuaciones. Los alumnos de física, química y tecnología deberán adquirir la capacidad de interpretar enunciados, modelar matemáticamente situaciones y resolverlas empleando ecuaciones apropiadas.

1. Ecuaciones lineales con una incógnita.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A cada una de esas expresiones se las denomina miembro, llamando primer miembro a la expresión que se encuentra a la izquierda del signo "=", y segundo miembro a la que se encuentra a la derecha.
Resolver una ecuación, consiste en hallar todos los números (o combinaciones de ellos) que al ser reemplazados por las variables que aparecen en la igualdad, la verifican.
Cuando la igualdad es de la forma $\boldsymbol{a \cdot x + b = 0}$, **siendo** $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 0}$, decimos que se trata de una **ecuación lineal con una incógnita**.
Llamaremos **ecuaciones equivalentes** a dos o más ecuaciones cuyas soluciones sean las mismas.
Para resolver una ecuación lineal de una incógnita, lo que haremos será hallar ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas, hasta llegar a un punto en el que la solución sea trivial. Para obtener ecuaciones equivalentes, utilizaremos las siguientes propiedades de la relación de igualdad:

- Si se suma a ambos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.
- Si se multiplican a ambos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.

Además, en ambos miembros de la igualdad, asumiremos que las letras representan números reales y usaremos todas las propiedades vistas en la primera unidad.
Ejemplo:

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}(x+6) - \frac{7}{6}x = \frac{x-1}{2} - 3x + 5} \qquad \boldsymbol{(1)}$$

Lo primero que debemos hacer al resolver una ecuación, es dejar todos los términos simplificados. Esto se logra cuando en el término tenemos a lo sumo una letra (en el caso de las ecuaciones con una incógnita) y a lo sumo un número (que puede ser una fracción).
En (1), podemos aplicar la propiedad distributiva en el primer término de cada uno de los miembros.
Obteniendo:

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{7}{6}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - 3x + 5}$$

$$\frac{2}{3}x+\ 4-\frac{7}{6}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-3x+5 \qquad (2)$$

Una vez logrado el primer objetivo, tenemos que agrupar todos los términos que poseen incógnita en uno de los miembros, y todos los términos independientes en el otro. Para esto, sumamos a ambos miembros de (2) la expresión $3x-\frac{1}{2}x-4$, quedando:

$$\frac{2}{3}x+\ 4-\frac{7}{6}x+3x-\frac{1}{2}x-4=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-3x+5+3x-\frac{1}{2}x-4$$

$$\frac{2}{3}x-\frac{7}{6}x+3x-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}+5-4 \qquad (3)$$

El objetivo ahora es dejar un solo término en cada miembro. Para ello, sacamos factor común "x" en el primer miembro de (3) y en el segundo, resolvemos. Luego:

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}+3-\frac{1}{2}\right)x=\frac{1}{2}$$

$$2x=\frac{1}{2} \qquad (4)$$

Ahora simplemente multiplicamos ambos miembros de (4) por $\frac{1}{2}$ y obtenemos:

$$2x\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{4} \qquad (5)$$

Como podemos observar, cada ecuación es equivalente a la anterior, por lo cual, (5) es equivalente a (1). Además, es fácil ver que la solución de (5) es $\frac{1}{4}$, por lo cual, la solución de (1) también es $\frac{1}{4}$ y escribiremos $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$. Comprobémoslo:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+6\right)-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{4}-1}{2}-3\cdot\frac{1}{4}+5$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{4}-\frac{7}{24}=\frac{-\frac{3}{4}}{2}-\frac{3}{4}+5$$

$$\frac{25}{6}-\frac{7}{24}=-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}+5$$

$$\frac{93}{24}=\frac{31}{8}$$

Como esta igualdad es válida, hemos verificado que el conjunto solución de (1) es $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Al resolver una ecuación lineal con una incógnita, de la forma $a\cdot x+b=0$, se nos pueden plantear 3 situaciones distintas:

- $a\neq 0$. En este caso, el conjunto solución es $\boldsymbol{S}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
- $a=0\ y\ b=0$. En este caso, $\boldsymbol{S}=\mathbb{R}$, pues cualquier número reemplazado por "x" verificara la igualdad.
- $a=0\ y\ b\neq 0$. En este caso podemos observar que al reemplazar cualquier número real por la incógnita, la igualdad no se verificará. Por lo tanto $\boldsymbol{S}=\emptyset$.

2. Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano xy, de modo que un sistema de dos ecuaciones permite una representación gráfica como dos rectas en el plano xy, siendo la solución del sistema los valores de x e y que verifican las dos ecuaciones; gráficamente representa al punto de intersección de estas dos rectas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x+y=5 \\ -x+2y=4 \end{cases}$

Si en estas ecuaciones despejamos y, obtenemos su forma explícita:

$$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$$ estas dos rectas se cortan en el punto (2,3).

Podemos asegurar que los valores $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ verifican las dos ecuaciones, por lo tanto son solución del sistema dado.

2.1 Tipos de solución

Consideremos un sistema como el siguiente:

$$\begin{cases} a\cdot x+b\cdot y=c \\ d\cdot x+e\cdot y=f \end{cases}$$

En un sistema de ecuaciones se pueden dar los siguientes casos:

$$\textbf{Tipos de sistemas}\begin{cases} \textbf{Compatibles} \begin{cases} \textbf{Determinado} \\ \textbf{Indeterminado} \end{cases} \\ \textbf{Incompatibles} \end{cases}$$

SISTEMA COMPATIBLE

Si admite soluciones.

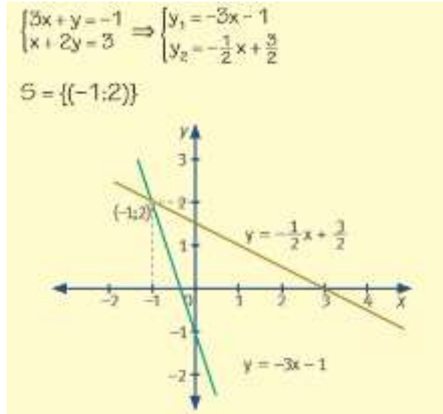
Sistema compatible determinado

Si admite un número finito de soluciones; en el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, si el sistema es determinado solo tendrá una solución. Su representación gráfica son dos rectas que se cortan en un punto; los valores de x e y de ese punto son la solución al sistema.

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es compatibles determinado cuando:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} \neq \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}}$$

Ejemplo:



De donde vemos que: $\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2}$

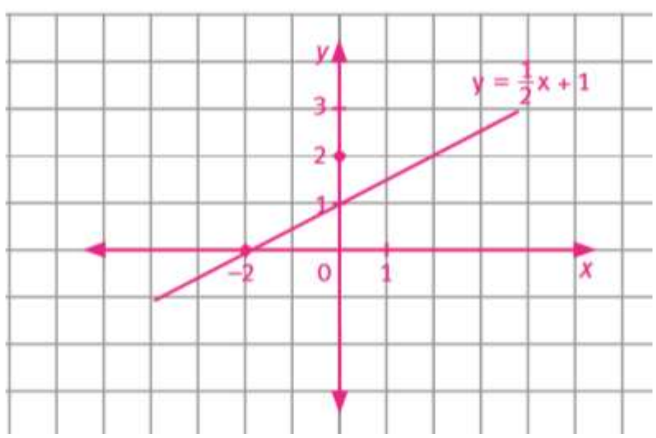
Sistema compatible indeterminado

El sistema admite un número infinito de soluciones; su representación grafica son dos rectas coincidentes. Las dos ecuaciones son equivalentes y una de ellas se puede considerar como redundante: cualquier punto de la recta es solución del sistema.
Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es indeterminado si:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{f}}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 1 \\ x + 2 = 2y \end{cases}$$



De donde vemos que: $\frac{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{-2}$

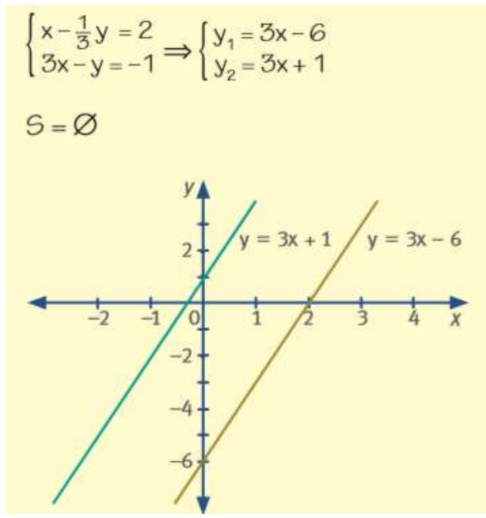
SISTEMA INCOMPATIBLE

El sistema no admite ninguna solución. En este caso, su representación gráfica son dos rectas paralelas y no tienen ningún punto en común porque no se cortan. El cumplimiento de una de las

dos ecuaciones significa el incumplimiento de la otra y por lo tanto no tienen ninguna solución en común.
Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es incompatible si:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} \neq \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{f}}$$

Por ejemplo:



De donde vemos que: $\frac{1}{3} = \frac{-\frac{1}{3}}{-1} \neq \frac{2}{-1}$

Resumiendo:

$$\textbf{Tipos de sistemas} \begin{cases} \textbf{Compatibles (Tienen solución)} \begin{cases} \textbf{Determinado (Solución única)} \\ \textbf{Indeterminado (Infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \textbf{Incompatibles (No tienen solución)} \end{cases}$$

Análisis de tipos de sistemas

Para poder determinar si, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, corresponde a uno de esos casos, podemos ver, según lo visto anteriormente, el siguiente criterio, partiendo del sistema:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ d \cdot x + e \cdot y = f \end{cases}$$

Podemos aplicar el siguiente árbol de decisión, para determinar el tipo de sistema:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} \leftrightarrow \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} \begin{cases} \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} \begin{cases} \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{f}} \rightarrow \textbf{Compatible indeterminado.} \\ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} \neq \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{f}} \rightarrow \textbf{Incompatible.} \end{cases} \\ \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} \neq \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}} \rightarrow \textbf{Compatible determinado.} \end{cases}$$

Para ello, comparamos en primer lugar la relación entre los coeficientes de las incógnitas, si la relación entre los coeficientes de x y de y es el mismo, el sistema es compatible indeterminado o incompatible, si este coeficiente también es igual a la relación entre los términos independientes el sistema es compatible indeterminado, y si es distinto en incompatible. Si la relación entre los coeficientes de la x y la y son distintos el sistema es compatible determinado.

3. Métodos de resolución

Partiendo de un sistema lineal compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ d \cdot x + e \cdot y = f \end{cases}$$

Si el sistema anterior es compatible y determinado, entonces resolver el sistema consiste en encontrar los valores de x y de y que satisfacen las dos ecuaciones simultáneamente.
Podemos diferenciar dos tipos de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, los básicos, basados en operaciones algebraicas encaminados a despejar el valor de cada una de las incógnitas, y los avanzados, basados en propiedades de los sistemas que determinan los distintos valores de las incógnitas que cumplen las ecuaciones del sistema.
Dentro de los **métodos básicos, están el de reducción, igualación y sustitución** que mediante distintas operaciones algebraicas despeja el valor de x e y del sistema. Si el sistema fuera incompatible o compatible indeterminado los métodos anteriores no conducen a una solución del sistema.
Entre los **métodos avanzados están Regla de Cramer, Eliminación de Gauss – Jordan**, y mediante la **Matriz invertible**, entre otros; estos métodos son más sofisticados que los básicos y destinados a la resolución de sistemas de gran dimensión con gran número de ecuaciones que dan lugar, normalmente, al empleo de ordenadores para realizar las operaciones necesarias.

MÉTODOS BÁSICOS

3.1 Método de reducción

Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones multiplicando los dos miembros convenientemente, obteniéndose un **sistema equivalente** al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones para eliminarla.

$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5x - 2y).2 = 2.2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ **1.** Se igualan los coeficientes de *y*.

$\begin{array}{r} 10x - 4y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \\ \hline 12x \quad\;\; = 12 \end{array}$ + **2.** Se suman las ecuaciones, miembro a miembro.

$12x = 12 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$ **3.** Luego, se calcula el valor de *x*.

$2.1 + 4y = 8 \Rightarrow 4y = 6 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{3}{2}}$ **4.** Se reemplaza el valor de *x* obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de *y*.

$S = \left\{\left(1; \frac{3}{2}\right)\right\}$ **5.** Se escribe el conjunto solución.

3.2 Método de Igualación

Se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego, igualar las ecuaciones obtenidas.

$$\begin{cases} 2x - 2y = \frac{3}{2} & (a) \\ 3x + y = \frac{5}{4} & (b) \end{cases}$$

(a): $-2y = \frac{3}{2} - 2x \Rightarrow y = x - \frac{3}{4}$ $\quad(b)$ $y = \frac{5}{4} - 3x$

1. Se despeja *y* de ambas ecuaciones.

$x - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} - 3x \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{2}}$

2. Se igualan ambas ecuaciones y se calcula el valor de *x*.

$2 . \frac{1}{2} - 2y = \frac{3}{2} \Rightarrow -2y = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{1}{4}}$

3. Se reemplaza el valor de *x* obtenido, en cualquiera de las ecuaciones, y se calcula el de *y*.

$S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)\right\}$

4. Se escribe el conjunto solución.

3.3 Método de Sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazarla en la otra ecuación.

$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \; (a) \\ 3x - 2y = 9 \; (b) \end{cases} \Rightarrow \quad (a)\; x = 1 - 2y$

1. Se despeja *x* en la ecuación (a).

$3 . (1 - 2y) - 2y = 9$

2. Se reemplaza la *x* por "1 – 2y" en la ecuación (b).

$3 - 6y - 2y = 9 \Rightarrow 3 - 8y = 9 \Rightarrow -8y = 6 \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{3}{4}}$

3. Se resuelve, obteniendo el valor de *y*.

$2x + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2x - 3 = 2 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{5}{2}}$

4. Se reemplaza el valor de *y*, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de *x*.

$S = \left\{\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$

5. Se escribe el conjunto solución.

MÉTODOS AVANZADOS

Veremos solo Regla de Cramer.

3.4 Método de determinantes o Regla de Cramer

El valor del determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal marcada con verde y los elementos de la diagonal marcada con naranja.

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - (-7) \cdot 2 = -15 + 14 = -1$$

La **regla de Cramer** es un método para resolver, mediante el uso de determinantes, sistemas de ecuaciones cuadrados, es decir, que contengan el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

El procedimiento se explica para un sistema de 2 x 2 y de manera análoga se resuelve cualquier sistema cuadrado de *n* x *n*.

Para resolver un sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ se deben realizar dos procedimientos.

1. Se hallan los valores de los siguientes determinantes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Determinante general
Se forma con los coeficientes de las incógnitas.

Determinante en *x*
Se reemplazan en Δ los coeficientes de *x* por los términos independientes.

Determinante en *y*
Se reemplazan en Δ los coeficientes de *y* por los términos independientes.

2. Se calculan los valores de las incógnitas.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \wedge y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Resuelvan el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 20$ $\qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = 40$ $\qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_y = 20$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{40}{20} \Rightarrow x = 2$ $\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{20} \Rightarrow y = 1$ $\qquad S = \{(2;1)\}$

La **clasificación** de un sistema se establece de acuerdo con los valores de los determinantes.

Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0 \wedge \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = 0 \wedge (\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0)$

Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Veremos cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, utilizando el método de Cramer.
Dado el sistema:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = j \\ d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z = k \\ g \cdot x + h \cdot y + i \cdot z = l \end{cases}$$

- Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema: $|A|$. ($|A| \neq 0$).
- Para encontrar x se calcula el determinante de la matriz A_x, matriz que resulta de reemplazar la columna de las x por la columna de los términos independientes: $|A_x|$.
- Se realiza el cociente $\frac{|A_x|}{|A|}$.
- $x = \frac{|A_x|}{|A|}$.
- Para encontrar y se calcula el determinante de la matriz A_y, matriz que resulta de reemplazar la columna de las y por la columna de los términos independientes: $|A_y|$.
- Se realiza el cociente $\frac{|A_y|}{|A|}$.
- $y = \frac{|A_y|}{|A|}$.
- Análogo para la incógnita z.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [3 \cdot 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4] - [(-1) \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 5] =$$

$$= [-9 - 5 + 8] - [(-3) + 12 + (-10)] = -6 - (-1) = -5$$

$$|A| = -5$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4] - [(-1) \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 2] =$$

$$= (3 - 2 + 8) - (-3 - 4 - 4) = 9 - (-11) = 20$$

$$|A_x| = 20$$

Por lo tanto: $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{20}{-5} = -4$

$$\boldsymbol{x = -4}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 4] - [(-1) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 5] =$$

$$= (-6 - 5 - 4) - (-2 + 12 + 5) = -15 - 15 = -30$$

$$|A_y| = -30$$

Por lo tanto: $y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-30}{-5} = 6$

$$\boldsymbol{y = 6}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [3\cdot3\cdot1 + 1\cdot5\cdot(-1) + 2\cdot2\cdot1] - [(-1)\cdot3\cdot1 + 2\cdot1\cdot3 + 1\cdot2\cdot5] =$$

$$= (9 - 5 + 4) - (-3 + 6 + 10) = 8 - 13 = -5$$

$$|A_z| = -5$$

Por lo tanto: $z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-5}{-5} = 1$

$$\boldsymbol{z = 1}$$

$$\mathbf{S} = \{(\boldsymbol{-4, 6, 1})\}$$

4. Ecuación de segundo grado

¿Cuál es el número natural cuyo cuadrado menos su duplo es igual a 15?
Si llamamos al número natural n, esta situación escrita en lenguaje algebraico, nos queda:

$$n^2 - 2\cdot n = 15$$
$$n^2 - 2\cdot n - 15 = 0$$

La ecuación que modela el problema anterior se llama ecuación de segundo grado con una incógnita o ecuación cuadrática ya que el mayor exponente al que esta elevada la incógnita es igual a 2.
Una ecuación de segundo grado con una incógnita, una vez simplificada y ordenada tiene como expresión canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \qquad\qquad (1)$$

La ecuación cuadrática es de gran importancia en diversos campos, ya que junto con las ecuaciones lineales, permiten modelar un gran número de relaciones y leyes.

4.1 Clasificación

Para que $ax^2 + bx + c = 0$ sea una ecuación de segundo grado, debe suceder que $a \neq 0$. Puede faltar el término lineal, o el término independiente. Esto da lugar a ecuaciones incompletas.
La ecuación de segundo grado se clasifica de la siguiente manera:

- Completa.
  Tiene la forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$, donde los tres coeficientes a, b y c son distintos de cero.
- Incompleta: cuando alguno de los coeficientes b, c o ambos son iguales a cero.

4.2 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita, es encontrar los valores de x que verifiquen la igualdad (1). Las soluciones de la ecuación general se obtienen aplicando la fórmula:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (2)$$

El doble signo que aparece en la formula proporciona los dos valores x_1 y x_2 que son las soluciones de la ecuación (1).

La fórmula (2) se llama formula de Baskara, matemático y astrónomo hindú que vivió entre 1114 – 1185. Fue el último de los matemáticos clásicos de la India. Descubrió el doble signo de los radicales cuadráticos y el carácter anormal de los mismos cuando el subradical es negativo.

La expresión subradical $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se llama **discriminante** y lo simbolizaremos con Δ.

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

Las soluciones x_1 y x_2 se llaman también raíces de la ecuación cuadrática.

Volviendo al problema, la ecuación es:

$$n^2 - 2 \cdot n - 15 = 0$$

Donde $a = 1, b = -2\ y\ c = -15$. Aplicando la formula encontramos las soluciones:

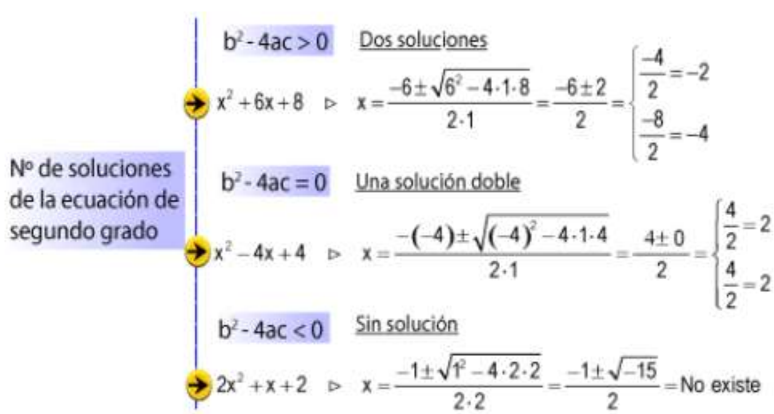
$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{2+8}{2}} \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{2-8}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 5} \qquad \boldsymbol{x_2 = -3}$$

4.3 Soluciones de una ecuación cuadrática completa



4.4 Soluciones de una ecuación cuadrática incompleta

Se pueden presentar tres casos:

- $\boldsymbol{b = 0}$

  Esto es, la ecuación de la forma: $ax^2 + c = 0,\ con\ \ a \neq 0\ y\ c \neq 0$. Se resuelve despejando x:

  $x^2 = -\frac{c}{a}$ Entonces $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ entonces $\begin{cases} x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$

  Como solución posee dos raíces reales que difieren en el signo si los valores de a y c tienen signo contrario o bien dos números imaginarios que difieren en el signo si los valores de a y c tienen el mismo signo.

  Por ejemplo:

  $$4x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{16}{4} \rightarrow |x| = \sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

- $\boldsymbol{c = 0}$

  Se debe resolver una ecuación de la forma: $ax^2 + bx = 0$. Para esto se saca factor común x:

  $$x \cdot (ax + b) = 0$$

  Teniendo en cuenta que el producto de dos o más factores es cero, cuando al menos uno de ellos es cero, resulta:

  $$x \cdot (ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

  Por ejemplo:

  $$5x^2 + 2x = 0 \rightarrow x \cdot (5x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{b = c = 0}$

  La ecuación es de la forma: $ax^2 = 0$.

  Para este caso resulta las soluciones son: $x_1 = x_2 = 0$.

5. Resolución de ecuaciones de segundo grado factorizadas

En este caso la ecuación de segundo grado aparece descompuesta en factores e igualada a cero.
Por ejemplo:

$$2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) = 0$$

Esta igualdad se verifica únicamente si alguno de los paréntesis es cero.

$$2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) = 0\ \ si \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ o \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Para este caso resulta que las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 1 \; y \; x_2 = -2$$

Si $x_1 \; y \; x_2$ son raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

PRACTICO N° 3: Ecuaciones – Sistemas de ecuaciones.

Ejercicio 1: Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $7 - x \div [3 - 1 \cdot (-2)] - (-8) = 9$
b) $3 \cdot (3x - 2) - (2x + 4) \cdot (-2) = 32$
c) $4x + \frac{1}{2}x = 27$
d) $2 \cdot (3x - 2) - (x + 3) = 8$
e) $(x + 5) \cdot (x - 3) + 7 = x^2 + 8x + 4$
f) $x - \frac{\frac{3}{2} - x}{x} = x - 8$

Ejercicio 2: Resuelva cada una de las ecuaciones y una con la respuesta que corresponda:

a) $\frac{2x+1}{3} = \frac{3-x}{2}$	$x = \frac{3}{5}$
b) $\frac{3}{2} \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$	$x = 18$
c) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{3} - 4\right) \div \frac{1}{2}$	$x = 0$
d) $\frac{2-6x}{4} = \frac{1+x}{2}$	$x = 1$

Ejercicio 3: traduzca al lenguaje simbólico y resuelva.

1) Un padre tiene 60 años, y su hijo 35. ¿Cuánto tiempo hace que la edad del padre era el doble de la del hijo?
2) Cierta vez le preguntaron la edad a Juan que es muy misterioso, y él respondió:
   "Tomen 3 veces los años que tendré dentro de tres años, réstenle tres veces los años que tenía hace tres años y obtendrán exactamente los años que tengo ahora". ¿Qué edad tiene Juan?
3) El perímetro de un rectángulo es 168 m. sabemos que la base es 4 m mayor que la altura ¿Cuánto miden la base y la altura?
4) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.
5) Dos números pares consecutivos suman 474. ¿Cuáles son los dos números?
6) Un hombre lleva en hombros a un niño que pesa la mitad que él. El niño, a su vez, carga a un chiquillo que pesa la mitad que él. El chiquillo, a su vez, carga a un bebe que pasa la mitad que él. Con toda esa carga el hombre se pesa en una balanza, y esta marca 120 kilos. ¿Cuánto pesa el hombre solo?
7) Tres amigos participan en la compra de un billete de lotería que resulta premiando con $10.000. calcule cuanto le corresponde a cada uno sabiendo que el primero participa con el doble que el segundo y este con el triple que el tercero.
8) La suma de dos múltiplos consecutivos de 6 es igual a 66. Calcule esos números.

9) Una dactilógrafa tiene que hacer un trabajo en varios días. El primer día escribe la mitad, el segundo día escribe un tercio de lo que le queda, el tercer día escribe un cuarto de lo restante y el cuarto día termina el trabajo, para lo cual tiene que escribir 15 paginas. ¿Cuantas paginas tiene el trabajo?

10) Halle el numero cuyo quíntuplo disminuido en 17, sea igual a su triplo aumentado en 41.

Ejercicio 4: El promedio de las calificaciones de Diana y Susana es 7,50. Si la calificación de Susana es la cuarta parte de la de Diana más 5. ¿Qué calificación tiene cada una?

Ejercicio 5: Dos ángulos suplementarios son tales que la medida de uno de ellos tiene 12 grados más que el doble de la medida del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Ejercicio 6: Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3170. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

Ejercicio 7: Un niño quiere comprar una pelota, pero le faltan 3 euros. Si la pelota costara la mitad, le sobrarían 2 euros. ¿Cuánto cuesta la pelota?, y ¿Cuánto dinero tiene el niño?

Ejercicio 8: un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Tiene un total de 50 habitaciones y de 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

Ejercicio 9: Para realizar un viaje de estudio se contrató un micro para 40 alumnos por 168 euros. El grupo acordó que las mujeres debían pagar 3 euros cada una y los varones 2 euros más que las mujeres. ¿Cuántos varones y cuantas mujeres viajan en el micro?

Ejercicio 10: En un campeonato de futbol, la cantidad de partidos empatados por el equipo A fue la tercera parte de la cantidad de partidos ganados, menos 4. Si además la suma de los puntos obtenidos en el campeonato fue 36. ¿Cuántos partidos gano y cuantos empató?

NOTA: por cada partido ganado corresponden 3 puntos, por cada partido empatado corresponde 1 punto y por cada partido corresponde 0 puntos).

Ejercicio 11: En una juguetería donde se venden bicicletas y triciclos. Juan Pablo dijo que hay 60 ruedas. Javier agregó que hay 5 bicicletas más que triciclos. ¿Cuántos hay de cada uno?

Ejercicio 12: Un padre, para estimular a su hijo que estudie Matemática, promete darle a 3 euros por cada ejercicio bien resuelto, pero, por cada uno que este mal, el hijo le dará 2 euros. Ya van por el ejercicio 26 y el muchacho recibe de su padre 38 euros. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuantos mal?

Ejercicio 13: Dos números suman 44. Si el mayor lo dividimos entre 3 y el segundo entre 4, los nuevos números obtenidos se diferencian en 3 unidades. Halle dichos números.

Ejercicio 14: En un rombo, una diagonal es el triplo de la otra, y la suma de sus medidas es igual a 30 cm. Indique cual es el área del rombo.

Ejercicio 15: La suma de las dos cifras de un número es 8 y, si 8 se cambia el orden de sus cifras, se cambia el orden de sus cifras, se obtienen otro número que vale 17 unidades menos que el doble del número de partida. ¿Cuál es el número?

Ejercicio 16: Halle el o los valor/es de a para que el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) Tenga infinitas soluciones.
b) No tenga solución.

$$(I)\begin{cases} 3y = 2x + 5 \\ -\frac{2}{3}x = 2a - y \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} x + y = a \\ 2y = 3 - 2x \end{cases}$$

Ejercicio 17: De opciones para el valor de a de manera que el siguiente sistema de ecuaciones lineales resulte compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, si es posible.

$$\begin{cases} \frac{a}{2}x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 18: Asfaltar una calle costo $3300. Los vecinos pegaron el doble de lo que aportó la municipalidad, mientras que la provincia contribuyó con las dos terceras partes del aporte municipal. ¿Cuánto dinero pusieron los vecinos?

Ejercicio 19: El perímetro de un triángulo es 97 cm. Si el lado más corto es 13 cm menor que el más largo y la longitud del tercer lado es una vez y media la longitud del menor. ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo?

Ejercicio 20: Calcule tres números, sabiendo que:

a) La suma entre ellos es 176. El primero es la cuarta parte del tercero y este supera al segundo en 40 unidades.
b) La diferencia entre el primero y la suma de los otros dos es -175. El segundo es el tripe del primero y el tercero es 40 unidades mayor que el segundo.

Ejercicio 21: María, Clara y Julia hicieron 990 bolsitas que les fueron encargadas.

María logró hacer 110 bolsitas en una hora, Clara hizo a razón de 140 bolsitas por hora y Julia sólo pudo hacer 100 en una hora. Entre las tres, trabajaron 8 horas y media. Si Julia trabajó $3\frac{1}{2}$ horas ¿Cuánto tiempo trabajaron María y Clara?

Ejercicio 22: Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones, represente en la recta numérica los elementos del conjunto solución de cada una de ellas e indique a que conjunto numérico pertenece:

a. $x^2 + x - 6 = 0$

b. $x^2 - 2x - 3 = 0$

c. $x + x^2 + 1 = 0$

d. $2x^2 - 8x + 9 = 0$

e. $(x + 2)^2 = x + 2$

f. $\sqrt{x+2} = x - 3$

g. $\sqrt{x^2 + 3x + 7} = 5$

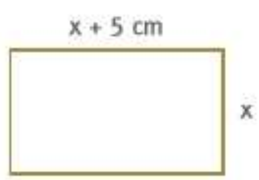
h. $-3.(x + 1)^2 + 12 = 0$

i. $2x.(x - 1) - 3 = x - 3x - 2$

j. $(x + 3).(6x - 3) + 5.(9 - 7x) = 22$

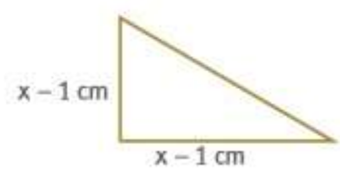
Ejercicio 23: Calculen el perímetro de las figuras sabiendo que el área de cada una es igual a 14 cm^2

a.



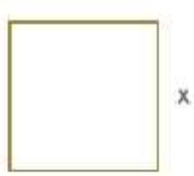
18 cm

c.



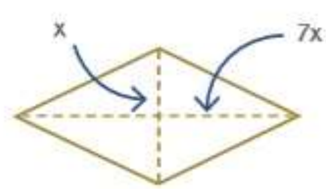
20,85 cm

b.



$4.\sqrt{14}$ cm

d.



$20.\sqrt{2}$ cm

Unidad N° 4: *"Funciones"*.

Producto cartesiano. Relaciones y funciones: dominio, codominio e imagen. Función Lineal. Función Cuadrática.

1. Producto cartesiano

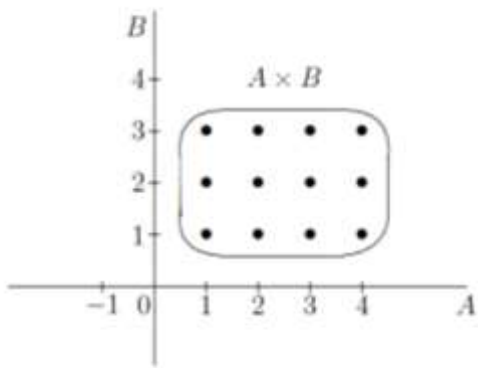
Tomaremos la noción de par ordenado como un concepto primitivo. Diremos que (u, v) es el par ordenado que tiene a u como primera componente y a v como segunda componente.
Además diremos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.
Notemos que la diferencia entre un conjunto con dos elementos y un par ordenado, radica en que en el segundo importa el orden, mientras que en el primero no. Es decir que, por ejemplo, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ mientras que $(1, 2) \neq (2, 1)$. Estamos ahora en condiciones de definir el concepto de producto cartesiano entre dos conjuntos:
Sean A y B dos conjuntos. Llamaremos producto cartesiano de A por B, y lo representaremos con $A \times B$, al conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo:
Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, luego:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Una forma gráfica de representar el producto cartesiano entre estos dos conjuntos es la siguiente:



2. Relaciones y Funciones

El concepto intuitivo de relación, es el de una correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, podríamos considerar el conjunto de todas las personas de un departamento y definir la correspondencia "... es padre (o madre) de...".
Supongamos que tenemos el conjunto:
$A = \{Luis, Marta, José, Carlos, Érica, Federico\}$, en el cual, Luis (L) es padre de José (J) y Érica (E), y Marta (M) es madre de Carlos (C) y Federico (F). Entonces, si formamos pares de personas que cumplan con la propiedad que define la correspondencia, nos queda: $R = \{(L, J), (L, E), (M, C), (M, F)\}$
Formalmente, dados dos conjuntos A y B (en el ejemplo anterior, $A = B$), **una relación binaria entre los elementos de A y los de B es cualquier subconjunto de $A \times B$**. El concepto intuitivo de relación, es el de una correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Por ejemplo, podríamos considerar el

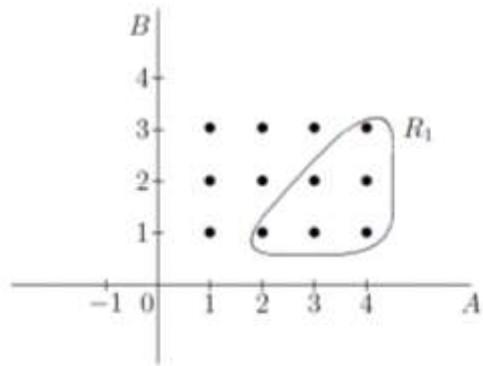
conjunto de todas las personas de un departamento y definir la correspondencia "... es padre (o madre) de...".

Ejemplo 1:

Consideremos los conjuntos A y B del ejemplo 1, y definamos entre ellos la relación "... es mayor o igual que el siguiente de...". Simbólicamente seria

$$R1 = \{(x, y)\ 2 \in A \times B : x \geq y + 1\} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\} \subseteq A \times B$$

Gráficamente:

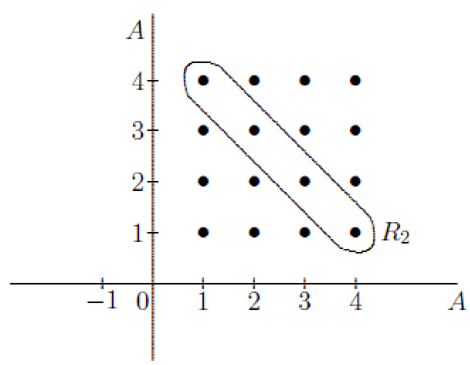


Ejemplo 2:

Consideremos ahora sólo el conjunto A del ejemplo 1, y definamos que "la relación binaria"...es igual a 5 menos...". Simbólicamente seria:

$$R2 = \{(x, y)2\ A \times A: x = 5 - y\} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \subseteq A \times A = A2$$

Gráficamente:



Si analizamos las relaciones $R1$ y $R2$, se puede ver entre ellas una diferencia sustancial. En $R1$, el elemento $1 \in A$ no tiene ningún correspondiente en B, mientras que en $R2$ todos los elementos de A están asignados. Además, en $R1$ los elementos 3 y 4 tienen más de un correspondiente en B, mientras que en $R2$ cada elemento de A tiene sólo un correspondiente en el mismo conjunto.

Por cumplir $R2$ esas condiciones, puede ser llamada función de A en A.

Diremos que una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función** de A en B, si a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.
Para indicar que $\boldsymbol{f}$ **es una función de** $\boldsymbol{A}$ **en** $\boldsymbol{B}$, escribiremos $f: A \to B$. Al elemento $y \in B$ que la función f le asigna al elemento $x \in A$ lo notaremos como $y = f(x)$ y diremos que y es la imagen de x por medio de la función f. Se dice que el par ordenado $(x, y) \in f$.

3. **Dominio, rango e imagen.**

Dada la relación $R \subseteq A \times B$, definimos los conjuntos:

I. $Dom(R) = \{a \in A: existe\ b \in B\ tal\ que\ (a, b) \in R\}$ como el dominio de R.

II. $Im(R) = \{b \in B: existe\ a \in A\ tal\ que\ (a, b) \in R\}$ como la imagen de R.

III. El conjunto B es el rango o codominio de R.

Observemos que sí $R \subseteq A \times B$, entonces $Dom(R) \subseteq A$ y $Im(R) \subseteq B = Rg(R)$. En el ejemplo 1, $Dom\ (R1) = \{2, 3, 4\}$ y $Im(R1) = \{1, 2, 3\} = B = Rg(R1)$. Mientras que en el ejemplo 2, $Dom(R2) = \{1, 2, 3, 4\} = A = Im(R2) = Rg(R2)$. Notemos que si $f: A \to B$, entonces $Dom(f) = A$.

4. **Imagen y preimagen**

Sean $R \subseteq A \times B$, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Llamaremos:

i. Imagen de X por medio de R al conjunto: $R(X) = \{b \in B: existe\ a \in X\ tal\ que\ (a, b) \in R\}$.

ii. Preimagen de Y por medio de R a: $R - 1(Y) = \{a \in A: existe\ b \in Y\ tal\ que\ (a, b) \in R\}$.

Podemos observar que si tenemos una función $f: A \to B$ y un conjunto $Y \subseteq B$, entonces la preimagen de Y por medio de f sería: $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.

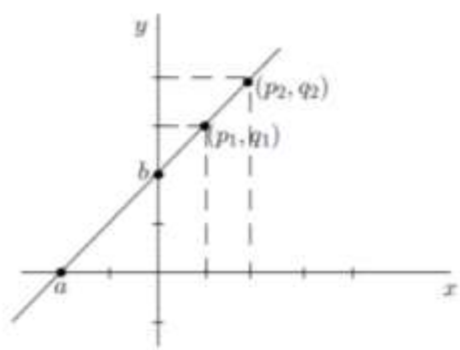
5. **Ecuaciones de la recta en el plano.**

Dada una recta en el plano, definiremos los siguientes elementos notables:

- Pendiente. Se simboliza generalmente con la letra m y es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas (eje x). Si se conocen dos puntos que pertenecen a la recta, P1 = (x1, y1) y P2 = (x2, y2), se puede calcular como:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{y2 - y1}}{\mathbf{x2 - x1}} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

- Ordenada al origen. Generalmente se simboliza con la letra b y es el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas (eje y).
- Abscisa al origen. Es el punto de intersección de la recta con el eje de las abscisas y se simboliza con la letra a.



TRES METODOS DISTINTOS DE REPRESENTAR UNA RECTA EN EL PLANO, MEDIANTE UNA FORMULA:

Ecuación explicita:

Esta ecuación es de la forma: $y = m \cdot x + b$. En ella se pueden determinar rápidamente la pendiente y la ordenada al origen.

Ecuación segmentaria.

Se llama así a la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. En su expresión aparecen la ordenada y la abscisa al origen.

Ecuación implícita.

Es de la forma $A.x + B.y + C = 0$. De esta ecuación no se puede extraer directamente ningún elemento notable, sin embargo, se pueden deducir de ella tanto la ecuación explicita como la segmentaria. Es muy frecuente encontrarse con estas ecuaciones al plantear problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones lineales.

Ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P2 = (x_2, y_2)$.

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

Ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$.

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

En ciertas ocasiones, dada una recta en el plano, tendremos interés en hallar la ecuación de alguna recta perpendicular o paralela a ésta. En estos casos, haremos uso de la siguiente herramienta.

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Rectas paralelas

Dos rectas son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales.

M: $y = a_1x + b_1 \wedge$ P: $y = a_2x + b_2 \wedge M // P \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.

S: $y= a_1x + b_1 \wedge$ N: $y = a_2x + b_2 \wedge S \perp N \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}$

6. Función lineal

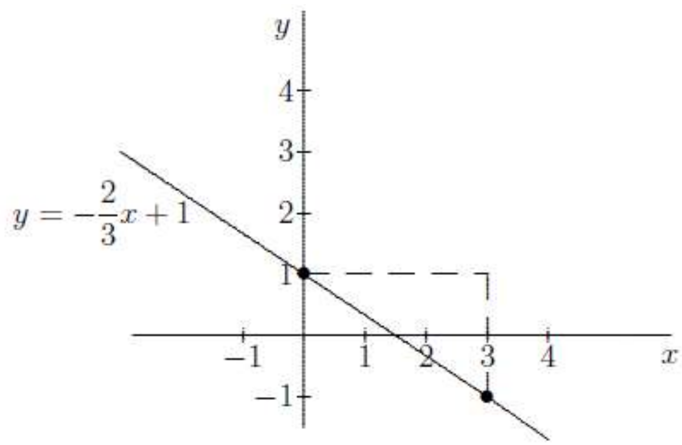
Diremos que la función $f : IR \to IR$ es una función lineal, si para cada $x \in IR, f(x) = m.x + b$, siendo $m, b \in IR$.

Por lo visto en la sección anterior, se deduce que la gráfica de una función lineal, es una recta en el plano, dada en forma explícita.

PASOS PARA GRAFICAR UNA FUNCIÓN LINEAL UTILIZANDO SU PENDIENTE Y ORDENADA AL ORIGEN:

Para determinar la gráfica de cualquier recta, se necesita sólo conocer dos puntos que pertenezcan a la misma. Uno de ellos, será la ordenada al origen, esto es, marcamos el punto (0, b) que está sobre el eje de las y. A continuación, a partir de ese punto utilizamos el valor m, que por la manera en que está definido, es de la forma $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$. Es decir que otro punto que pertenecerá a la recta, será el punto $(\Delta_x, \Delta_y + b)$.

Ejemplo:



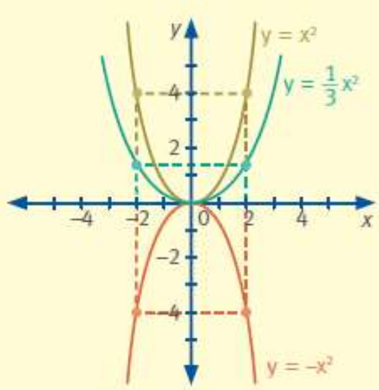
7. Función Cuadrática

Se llama función cuadrática a toda función f definida por una expresión de la forma:
$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ donde a, b y c son números reales y a $a \neq 0$.

Los términos de la función reciben los siguientes nombres: **y =** $\underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}}$.

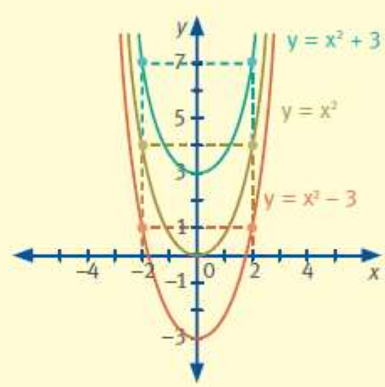
La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola.**

- Funciones de la forma **y = ax².**



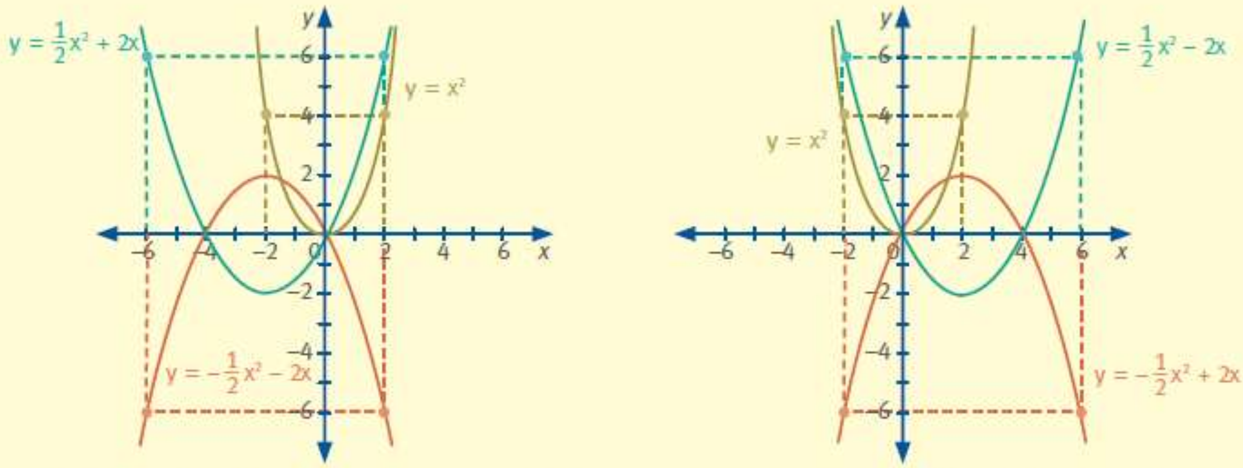
$a > 0 \rightarrow$ La parábola "va" hacia **arriba.**
$a < 0 \rightarrow$ La parábola "va" hacia **abajo.**
$0 < |a| < 1 \rightarrow$ La parábola se **abre.**
$|a| > 1 \rightarrow$ La parábola se **cierra.**

- Funciones de la forma: **y = x² + c.**



$c > 0 \rightarrow$ La gráfica se desplaza hacia **arriba.**
$c > 0 \rightarrow$ La gráfica se desplaza hacia **abajo.**

- Funciones de la forma **y = ax² + bx.**



Si *a* y *b* tienen el mismo signo, la gráfica se desplaza hacia la **izquierda**.

Si *a* y *b* tienen distinto signo, la gráfica se desplaza hacia la **derecha**.

FORMAS DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN CUADRATICA:

Forma factorizada

Toda función cuadrática se puede factorizar en función de sus raíces. Dada: $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede factorizar como:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

siendo a el coeficiente principal de la función. En el caso de que el discriminante sea igual a 0 entonces $x_1 = x_2$, estamos en presencia de raices dobles, por lo que podemos escribir:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Forma canónica

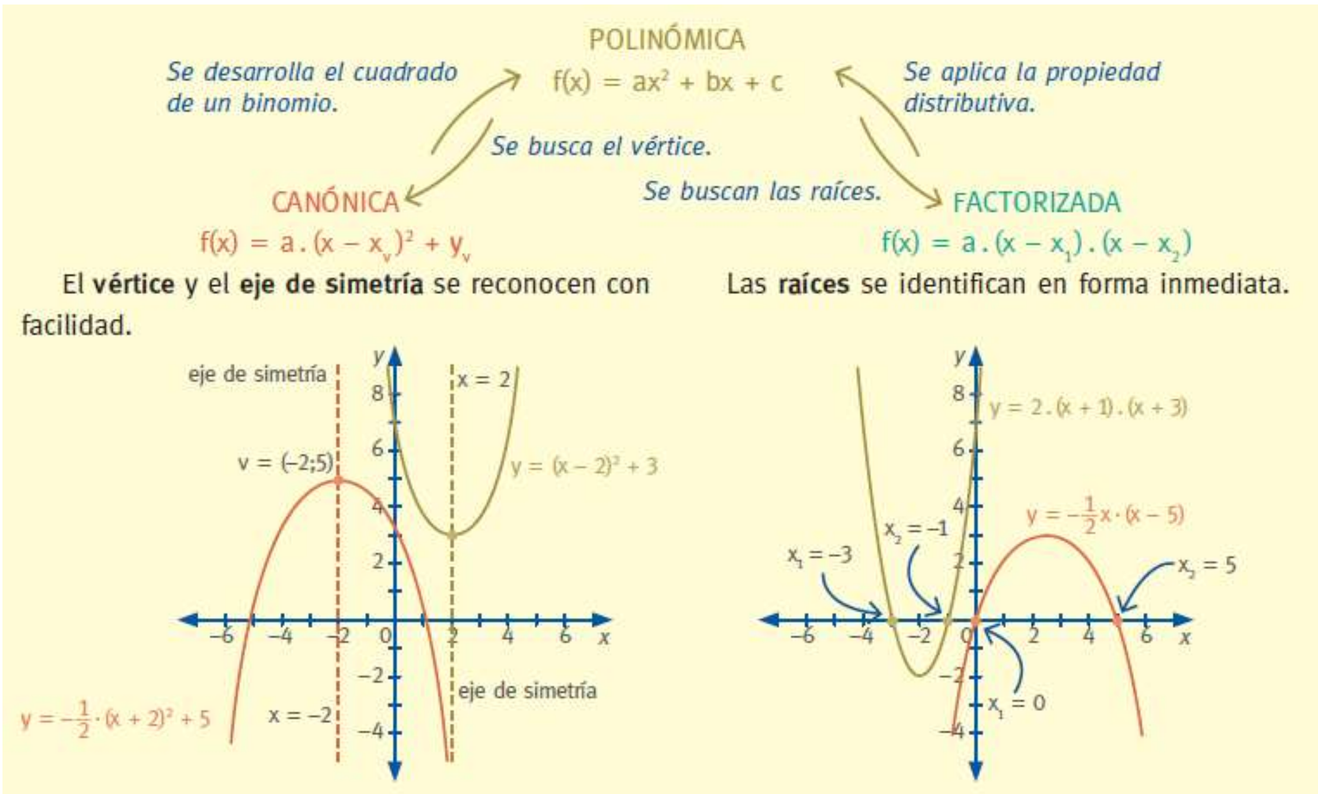
Toda función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Llamada forma canónica. Siendo a el coeficiente principal y el par ordenado (h, k) las coordenadas del vértice de la parábola.

Forma	Expresión	Parámetro
Explícita o General Polinómica	$y = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0$	$a, b, c,$ (c coordenada al origen)
Factorizada	$y = a(x - x_1).(x - x_2), \ \ a \neq 0$	$a, x_1, x_2,$ (x_1, x_2 : raíces)
Canónica	$y = a(x - x_v)^2 + y_v, \ \ a \neq 0$	$a, x_v, y_v,$ ($v = (x_v, y_v)$: vértice)

Esto es:



REPRESENTACION DE UNA FUNCIÓN CUADRATICA:

Para realizar la construcción del gráfico de una función cuadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, es suficiente tener en cuenta las características que posee una parábola: su eje de simetría, su vértice, los puntos de intersección con el eje x (si existen) y el punto de intersección con el eje y.

- El punto de intersección entre la parábola y el eje y tiene abscisa $x = 0$. Por lo tanto si $x = 0$, entonces $f(0) = a0 + b0 + c = c$. Por lo tanto, la parábola corta al eje y en el punto $c = (0, c)$.

- Si la parábola corta al eje x, los puntos de intersección tienen ordenada $y = f(x) = 0$.

  Para determinar los valores de x que satisfacen $y = 0$, se calculan las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

  Puede ocurrir que la ecuación cuadrática tenga:

  $(*)$ Dos raíces reales y distintas, esto significa que la curva corta al eje x en los puntos

  $a = (x_1, 0)$ y $b = (x_2, 0)$.

  $(*)$ Dos raíces reales coincidentes, la curva tiene sólo un punto en común con el eje x.

  $(*)$ Dos raíces complejas conjugadas, no hay contacto entre la parábola y el eje x.

- Las coordenadas del vértice $v = (x_v, y_v)$, pueden calcularse:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

  Si en la fórmula $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

  se remplazan x_1 y x_2 por las expresiones encontradas en la fórmula de Bhaskara se obtiene

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

  Así podemos calcular x_v sin necesidad de determinar previamente las raíces.

Ejemplo. Representar gráficamente la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = -x^2 - 3x + 10$$

- Punto de intersección con el eje y.

  Si $x = 0$ entonces $f(0) = 10$

  El punto de intersección con eje y: $c = (0, 10)$

- Puntos de intersección con eje x.

  Las raíces de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 = -5 \qquad x_2 = 2$$

  Puntos de intersección con el eje x:

$$a = (-5, 0) \qquad b = (2, 0)$$

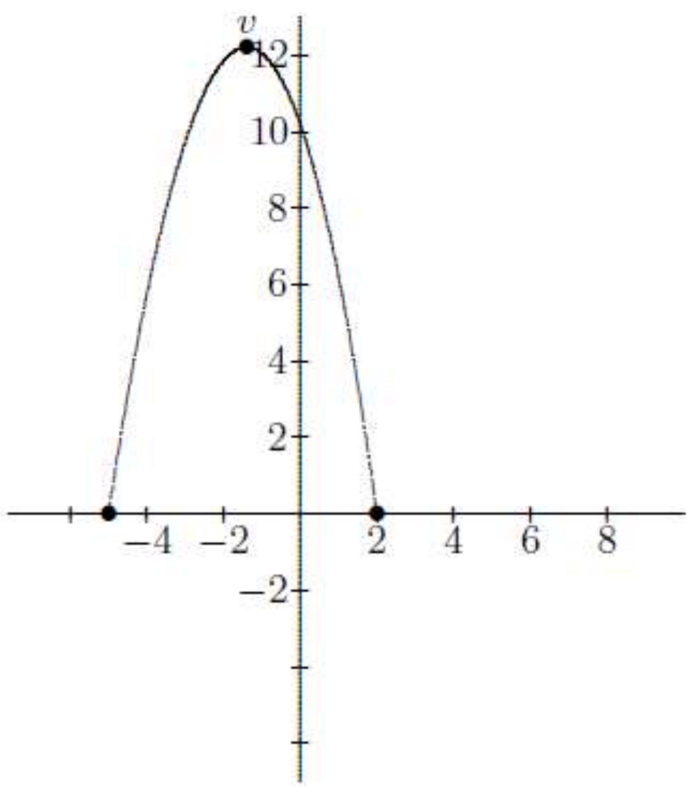
- Coordenadas del vértice.

  $x_v = \dfrac{-5+2}{2} = -\dfrac{3}{2}$

  $y_v = \dfrac{49}{4}$

  Coordenadas del vértice:

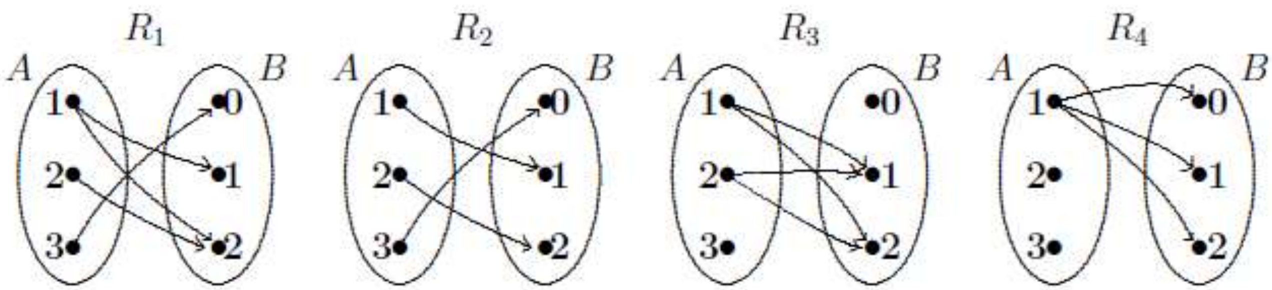
$$v = (-\frac{3}{2}, \frac{49}{4})$$



PRACTICO N° 4: Funciones.

Ejercicio 1: Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0,1, 2\}$. Calcule $A \times B$ y represéntelo en los ejes cartesianos.

Ejercicio 2: Dadas las siguientes relaciones representadas por diagramas, determine cuáles de ellas representan una función de A en B. Justifique su respuesta.



Ejercicio 3: Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Para cada una de las siguientes relaciones de A en B realice el diagrama de Venn y la representación cartesiana. Indique dominio, codominio e imagen. Determine si son funciones o no. Justifique su respuesta.

$(a)\ R_1 = \{(x, y) \in A \times B : x + y = 5\} \subseteq A \times B,$

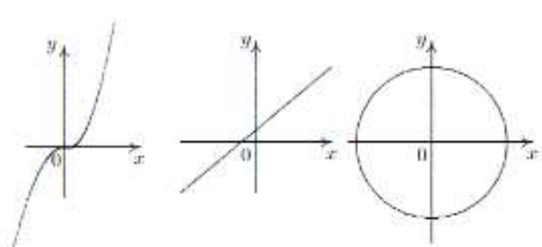
$(b)\ R_2 = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\} \subseteq A \times B,$

$$(c)\ R_3 : \begin{array}{c|l} x & y = x + 1 \\ \hline 0 & \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \text{, sabiendo que } x \in A,\ y \in B,$$

$(d)\ R_4 = \{(0, 3), (1, 4), (0, 4), (3, 3), (2, 2)\} \subseteq A \times B,$

$(e)\ R_5 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \subseteq A \times B.$

Ejercicio 4: ¿Representan estos gráficos funciones de IR en IR? ¿Por qué?



Ejercicio 5: Calcule el valor de la función en el punto indicado y represente el par obtenido en un sistema de coordenadas cartesianas:

(a) $f(x) = x + 2$ en $x = -1$, en $x = 0$, en $x = 4$.

(b) $g(t) = t^2 + 3t$, $g(-2)$, $g(1/2)$, $g(0)$.

(c) $h(x) = \dfrac{3x-5}{2}$, $h(1)$, $h(2)$, $h(0)$.

Ejercicio 6: Represente gráficamente las siguientes funciones lineales, en un mismo sistema cartesiano, indicando en cada caso la pendiente y la ordenada al origen. Determine dominio, codominio e imagen.

(a) $y = 3x$

(b) $y = 3x + 1$

(c) $y = -3x + 4$

(d) $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$

(e) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

(f) $y = 2x - \dfrac{3}{4}$

(g) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{2}$

(h) $y = -\dfrac{5}{4}$

Ejercicio 7: Dada $f(x) = 2x - 3$:

(a) Calcule $f(0), f(-1), f\left(-\dfrac{2}{3}\right), f\left(3a\right)$ y $f\left(b^2\right)$.

(b) Cuando sea posible represente los pares $(x, f(x))$

(c) Indique el dominio y la imagen de la función.

Ejercicio 8: Represente en el mismo sistema cartesiano, las funciones reales:

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 1, \; g(x) = \frac{2}{3}x \;\text{ y }\; h(x) = -\frac{3}{2}x + 3.$$

(a) Identifique en cada recta la pendiente y la ordenada al origen.

(b) ¿Por qué las rectas que representan gráficamente a f y a g resultaron paralelas?

(c) ¿Por qué las rectas que representan a f y a h resultaron perpendiculares?

Ejercicio 9: Cada champa de césped cuesta \$ 1,50 y la colocación \$ 0,75. Además, el vivero recarga \$ 25 de flete por llevar todas las champas a domicilio.

a) Escriba la fórmula del gasto en función de las champas colocadas. Grafíquela.
b) ¿Cuál es el gasto si se colocan 350 champas?
c) ¿Cuántas champas se colocaron si se gastó \$ 668,50?

Ejercicio 10: Coloque dentro del círculo V (verdadero) o F (falso) para cada enunciado. Justifique.

(a) Si $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(x) = 2x + 3$, entonces $f(-1) = 5$. O

(b) En toda función lineal $f : I\!R \to I\!R$, $f(0)$ es un valor sobre el eje y. O

(c) El punto donde una función lineal corta al eje x tiene ordenada igual a 0. O

(d) Las rectas oblicuas $y = 2x + 3$ e $y = \frac{1}{2}x + 3$ tienen la misma pendiente. O

(e) La función lineal $f(x) = 3x + 1$ es una recta que corta al eje x en $-\frac{1}{3}$. O

(f) La función $f(x) = x + 1$ definida en $I\!R$ pasa por el origen de coordenadas. O

Ejercicio 11: Clasifique las siguientes ecuaciones de la recta en el plano. Diga de qué tipo de recta se trata. Además, represente gráficamente a cada una de ellas.

(a) $3x - 2y + 5 = 0$

(b) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}$

(c) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$

(d) $x + 2 = 0$

(e) $3y - 9 = 0$

(f) $x = 0$

(g) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

Ejercicio 12: Dada la recta $r: -3y + 6 = x$, hallar la ecuación de:

a) la recta paralela a r que tiene -1 como ordenada al origen. Grafique.
b) la recta perpendicular a r que pasa por $(0, -3)$. Grafique.
c) una recta no paralela a r que tenga su misma ordenada al origen. Grafique.
d) una recta perpendicular a r que tenga como ordenada al origen un número negativo. Grafique.

Ejercicio 13:

a) Dados los puntos $(2, 1)$ y $(1, -1)$ encuentre las ecuaciones implícita y explícita de la recta que pasa por dichos puntos. Grafique la recta encontrada en un sistema de ejes cartesianos.

b) Dada la recta $x - 2y + 3 = 0$ en forma implícita. Halle las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a la recta dada que pasan por el punto $(-1, -2)$.

Ejercicio 14:

(a) Halle la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por P. Grafique.

(i) $P = (-2, 3)\,,\ m = 2$ (ii) $P = (1, 5)\,,\ m = 0$

(iii) $P = (3, -4)\,,\ m = -1$ (iv) $P = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)\,,\ m = -\frac{1}{2}$

(b) Encuentre la pendiente de la recta que pase por P y Q.

(i) $P = (1, 2)\,,\ Q = (-4, 3)$ (ii) $P = (2, 4)\,,\ Q = (-3, 4)$

Ejercicio 15: Determine la ecuación de:

a) una recta horizontal que pase por el punto $(-4, 1)$,
b) una recta que pase por el origen de coordenadas y el punto $(3, -2)$,
c) una recta paralela a $y = -3x + 2$, y que pase por el $(3, 2)$,
d) una recta vertical que pase por el $(2, -4)$.

Ejercicio 16: Considere la función cuadrática $f(x) = x^2$

(a) Calcule $f(-4)$, $f(\sqrt{7})$ y $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

(b) Indique, si es posible, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 100$, $f(x) = 5$, $f(x) = -4$ y $f(x) = 25$.

Ejercicio 17: Represente gráficamente las siguientes funciones, en un mismo sistema cartesiano. Extraiga conclusiones de los gráficos obtenidos.

(a) $y = x^2$ $y = \frac{3}{4}x^2$ $y = 2x^2$ $y = -x^2$

(b) $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$

Ejercicio 18:

a) Represente gráficamente, en el mismo sistema, las funciones cuadráticas
$y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x$.
b) Compare estos gráficos. ¿Cómo resultan estas curvas? Explique por qué.

Ejercicio 19: Dadas las siguientes funciones cuadráticas:

$(a)\ y = x^2 + 2x - 3$

$(b)\ y = (x-1)^2 - 1$

$(c)\ y = -2x^2 + 2$

$(d)\ y = -(x+2)^2$

$(e)\ y = \frac{1}{2}(x-3)^2$

$(f)\ y = 2x^2 + 4x + 3$

$(g)\ y = x^2 - 4$

$(h)\ y = -x^2 + x + 2$

I. Indica cuáles están en forma polinómica y cuáles en forma canónica.
II. Las que están en forma polinómica transfórmalas en canónica, y viceversa.
III. Encuentra en cada caso: vértice, eje de simetría, ordenada al origen y raíces (si existen).
IV. Escriba la forma factorizada de cada función cuadrática.
V. Representa gráficamente a las parábolas.
VI. Indica dominio, codominio e imagen en cada caso.
VII. Señala los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. ¿Para qué valor de x hay un máximo o un mínimo absoluto?

Ejercicio 20: Halle los posibles valores que puede tener la constante numérica k para que se cumpla la condición pedida en cada caso:

a) La función cuadrática $f(x) = -x^2 + x - k$ tenga dos raíces simples.
b) La parábola de ecuación $y = x^2 - k\,x + 4$ tenga una raíz doble.
c) El gráfico de la función $h(x) = x^2 + k\,x$ intersecta el eje de las abscisas en dos puntos.
d) La función cuadrática $g(x) = 2\,x^2 + k$ no tenga raíces reales.

Ejercicio 21: Grafique las siguientes funciones y complete el cuadro indicado:

$f: I\!R \to I\!R$	Dominio	Codominio	Imagen	Vértice	Raices o Ceros	Ordenada al origen
$f(x) = -2x^2$						
$f(x) = x^2 - 2x + 1$						
$f(x) = -2x^2 + 4x$						
$f(x) = x^2 + 2x - 3$						
$f(x) = -3x^2 - 12x - 18$						

Ejercicio 22: Dada $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, función cuadrática en forma polinómica:

a) realice su gráfica;
b) indique cuál es la función de segundo grado cuya gráfica es la misma anterior, pero invertida, grafique;
c) de un ejemplo de una función cuadrática, cuya parábola tenga el mismo vértice que la dada, pero tenga menor abertura y la misma concavidad, verifique gráficamente.

BIbliografia

- BORCHERT, J. D., CARRIZO, J. & SARMIENTO, L. (2013). UNSJ – FFHA - Departamento de Matemática "Curso Nivelación Matemática". San Juan - Argentina.
- AMSTER, P., PEZZATTI, L., ABÁLSAMO, R., BEIRO, A., MASTUCCI, S., QUIRÓS, N., ROSSI, F. (2013). Libro del docente: "Activados matemática 4". Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires – Argentina.
- OLIVA, N. (2013). UNSJ – FFHA – Departamento de matemática "Apuntes de la materia Geometría Analítica". San Juan – Argentina.
- PEZZATTI, L., ABÁLSAMO, R., KOTOWSKI, C., LIBERTO, L., BEIRO, A., MASTUCCI, S., QUIRÓS, N. (2013). Libro del docente: "Activados matemática 2". Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires – Argentina.
- Paginas web: www.julioprofe.net – www.universodeformulas.com