2.5 Práctica 2: Relaciones y funciones

Ejercicio 1 Considerar los conjuntos $A = \{a, 0, 1\}$, $B = \{b, 2\}$ y $C = \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) Representar por extensión los conjuntos $A \times B$, $B \times A$, $B \times C$ y $A \times A$.

(b) Representar gráficamente en los ejes los productos cartesianos del ítem anterior.

Ejercicio 2 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar por extensión los siguientes conjuntos,

(a) $(A - B) \times (A \cap B)$	(b) $(A \,\Delta\, B) \times B$	(c) $(A \cap B) \times (A \cup B)$	(d) $A^2 \cap B^2$
(e) $(A \times B) \cap (B \times A)$	(f) $(A \times B) \cup B^2$	(g) $(A \times B) \cup A^2$	(h) $A^2 \,\Delta\, B^2$

Ejercicio 3 Al lanzar una moneda al aire y al caer esta al suelo, podemos obtener dos posibles resultados, según lo que muestre su parte visible: *cara* o *sello*. Se considera el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire. Si la moneda cae *cara*, se anota 1 y si cae *sello*, se anota 0. En consecuencia, podríamos pensar que $P = \{0, 1\}$ es el conjunto de posibles resultados al lanzar una sola vez la moneda al aire. Se pide representar al conjunto cuyos elementos son los posibles resultados del experimento, si se lanzan dos veces la misma moneda. Y si se lanzan dos monedas a la vez, ¿cuál sería el conjunto de los resultados posibles? ¿Qué puede decirse respecto al conjunto anterior?

Ejercicio 4 Una urna contiene dos clases de bolas: *blancas* y *negras*. Se extraen dos bolas al azar. Si sale bola blanca, se indica con $\circ$ y si sale negra con $\bullet$. Determinar, por extensión, el conjunto de los posibles resultados obtenidos en este experimento.

Ejercicio 5 Considerar los conjuntos $A = \{1, 2, a\}$ y $B = \{b, 3, 4\}$. Determinar el valor de a y b, sabiendo que $\{2, 3\} \times \{2, 3\} \subseteq A \times B$.

Ejercicio 6 Sea $A = \{1, 2\}$. Hallar $\wp(A) \times \wp(A)$.

Ejercicio 7 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Dar dos ejemplos, en cada caso, de relaciones no vacías que puedan expresarse por comprensión entre:

(a) A y B

(b) B y A

Ejercicio 8 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar si los siguientes conjuntos de pares ordenados son relaciones de A en B, justificando porqué si o porqué no lo son. En caso afirmativo, graficarlas por medio de un diagrama de flechas y además a través de su representación cartesiana.

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 3), (3, 5)\}$

(d) $\mathcal{R}_4 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 7)\}$

(e) $\mathcal{R}_5 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 7), (5, 3)\}$

(f) $\mathcal{R}_6 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$

(g) $\mathcal{R}_7 = \emptyset$

(h) $\mathcal{R}_8 = A \times B$

Ejercicio 9 Sean los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Representar por extensión las siguientes relaciones de A en B. Además, determinar dominio y rango de cada una.

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y = 5\}$

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y = 1\}$

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y = 2 \;\text{ y }\; x = y\}$

(d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, y = 1\}$

(e) $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, y = x + 2 \;\text{ o }\; x = y\}$

(f) $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, y = x + 1\}$

Ejercicio 10 Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Representar por comprensión a las siguientes relaciones de A en B. Además, determinar dominio y rango de cada una.

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(1, 3), (3, 1), (4, 0), (2, 2), (1, 1), (3, 3)\}$

(d) $\mathcal{R}_4 = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$

(e) $\mathcal{R}_5 = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

(f) $\mathcal{R}_6 = \{(4, 1), (2, 2)\}$

Ejercicio 11 Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Expresar, por extensión, cada una de las siguientes relaciones de A en B. Además, indicar dominio y rango de cada una.

(a) $(x, y) \in \mathcal{R}_1 \iff x \leqslant y$

(c) $(x, y) \in \mathcal{R}_3 \iff x \cdot y$ es par

(b) $(x, y) \in \mathcal{R}_2 \Longleftrightarrow x > y$

(d) $(x, y) \in \mathcal{R}_4 \Longleftrightarrow x + y > 6$

Ejercicio 12 Dadas las relaciones,

$$\mathcal{S} = \{(a, b), (b, a), (w, w), (b, w), (c, x), (a, a), (x, c)\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, w), (x, w), (x, c), (b, b)\}$$

Determinar los siguientes conjuntos:

(a) $dom(\mathcal{R}) \cap dom(\mathcal{S})$

(b) $dom(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$

(e) $dom(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$

(c) $dom(\mathcal{R}) \cup dom(\mathcal{S})$

(d) $dom(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})$

(f) $dom(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$

Ejercicio 13 En los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se definen las siguientes relaciones. Indicar cuáles de estas son funciones, justificando su respuesta. Usar la notación correspondiente, en las relaciones que resulten funciones, escribiendo f_i en lugar de $\mathcal{R}_i$, con el $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ correspondiente.

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (a, 2)\}$

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(b, 4), (c, 3), (d, 1)\}$

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(a, 4), (b, 2), (c, 3), (d, 1)\}$

(d) $\mathcal{R}_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 1)\}$

(e) $\mathcal{R}_5 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 1), (d, 2)\}$

(f) $\mathcal{R}_6 = \{(a, 5), (b, 5), (c, 5), (d, 5)\}$

Ejercicio 14 Considerar el conjunto de los números dígitos $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Analizar si las siguientes $\mathcal{R}_i \subseteq D \times D$ son funciones o no, justificando su respuesta. En caso de ser una función, expresarla como $f_i : D \longrightarrow D$, definida por: $m = f_i(n)$, con $i = 1, 2, 3$, indicando su fórmula definitoria.

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(n, 9 - n) : n \in D\}$

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(n, 2\,n + 1) : n \in D\}$

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(n, n) : n \in D\}$

Ejercicio 15 Sean los conjuntos $A = \{x \in D : 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$, donde D es el conjunto de números dígitos. Se definen las siguientes relaciones de A en B, como sigue:

(a) $(x, y) \in \mathcal{R}_1 \Longleftrightarrow x + y = 4$

(b) $(x, y) \in \mathcal{R}_2 \Longleftrightarrow x - 1 \geqslant y$

(c) $(x, y) \in \mathcal{R}_3 \Longleftrightarrow x \cdot y = 0$

(d) $(x, y) \in \mathcal{R}_4 \Longleftrightarrow x + y = 3$ o $x + y = 6$.

Determinar si las relaciones definidas son funciones de A en B, justificando su respuesta. Usar la notación correspondiente, en las relaciones que resulten funciones.

Ejercicio 16 Considerar los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $f : A \longrightarrow B$ que cumple $f(1) = f(4) = f(6) = 3$; $f(2) = 5$ y $f(3) = f(5) = 4$. Calcular lo que se pide en cada uno de los ítems siguientes:

(a) $f(\{1, 2, 3\})$, $f(A - \{2\})$ y $f(A) - \{2\}$.

(b) $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{4, 5\})$ y $f^{-1}(\{2\})$.

(c) $f(\{1, 2\} \cap \{2, 6\})$ y $f(\{1, 2\}) \cap f(\{2, 6\})$.

SUGERENCIA: Ayudarse graficando el diagrama de flechas de la función f.

Ejercicio 17 Sea $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{0, 1, 2\}$. Determinar, en caso de ser posible, una $f : S \longrightarrow T$, mediante un diagrama de flechas, de manera que:

(a) f no sea inyectiva ni sobreyectiva.

(b) f sea sobreyectiva y no sea inyectiva.

(c) f sea inyectiva.

Ejercicio 18 Analizar inyectividad, sobreyectividad y/o biyectividad de cada una de las siguientes funciones. Justificar su respuesta.

(a) $f_1 : A \longrightarrow B$ definida por $f_1 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (d, 2)\}$, donde $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) $f_2 : A \longrightarrow B$ definida por $f_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 1)\}$, donde $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2\}$.

(c) $f_3 : A \longrightarrow B$ definida por $f_3(x) = 2x - 1$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

(d) $f_4 : A \longrightarrow B$ definida por $f_4(x) = x^2$, donde $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 19 Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 3, 5, 8\}$. Considerar $f : A \longrightarrow B$ que asigna *a cada elemento del dominio su cuadrado, disminuido uno.* Indicar la fórmula definitoria de f y clasificarla en: inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

Ejercicio 20 Sean los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Sea la función p_1 que es la *primera proyección* para el producto cartesiano $A \times B$. Analizar si p_1 es inyectiva y/o sobreyectiva. En forma análoga, se ha definido la función *segunda proyección* p_2, ¿es p_2 biyectiva? En ambos casos, justificar.

Ejercicio 21 Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $X = \{a, e\} \subseteq A$. Indicar si la función característica de X, esto es, $\mathcal{X}_X : A \longrightarrow \{0, 1\}$, es inyectiva y/o sobreyectiva. Justificar.

Ejercicio 22 Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ un conjunto y $f : A \longrightarrow A$ caracterizada por la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	2	2	1	3	4	5	3	2	1

Determinar lo que se pide en cada uno de los siguientes ítems:

(a) $f(\{2, 3, 5\})$; $f(\{1, 3, 7, 9\})$ y $ran(A)$.

(b) $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$; $f^{-1}(\{2, 3\})$ y $f^{-1}(\{7, 8, 9\})$.

(c) Analizar si f es biyectiva.

Ejercicio 23 Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f : A \longrightarrow A$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \neq 6 \\ 1 & \text{si} \quad x = 6 \end{cases}$$

(a) Calcular $f(1)$, $f(2)$ y $f(6)$.

(b) Hallar $f^{-1}(\{2\})$ y $f^{-1}(\{1\})$.

(c) ¿Es f inyectiva y/o sobreyectiva?

Ejercicio 24 Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Comprobar que $f : A \longrightarrow B$ definida como sigue:

$$f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$$

es biyectiva. A continuación, determinar la función inversa de f, que indicamos con f^{-1}.

Ejercicio 25 Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ y $C = \{2, 6, 10, 14, 18\}$. Considerar $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = x + 1$ y $g : A \longrightarrow C$ definida por $g(x) = 2\,x$. Analizar si f y g son invertibles. En caso afirmativo, hallar la fórmula definitoria de su función inversa, indicando su dominio y codominio.

Ejercicio 26 Sean los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ y $C = \{0, 1\}$. Considerar $f : A \longrightarrow C$ definida por $f(x) = 0$ y $g : B \longrightarrow C$ definida por $g(x) = 1$.

(a) ¿Son f y g compatibles? En caso afirmativo, determinar la función $f \cup g$ e indicar su dominio.

(b) Comprobar que $f \cup g = \mathcal{X}_B$, donde $dom(\mathcal{X}_B) = A \cup B$.

Ejercicio 27 Dados los conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Sean $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : B \longrightarrow C$ definida por $g(x) = x - 1$. Se pide:

(a) Indicar si $f \circ g$ es vacía o no. Justificar.

(b) Hallar $dom(f \circ g)$.

(c) Expresar la fórmula definitoria de $f \circ g$.

(d) Representar gráficamente a la composición $f \circ g$ por medio de un diagrama de flechas combinado de g y f.

Ejercicio 28 Sean los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{1, 4, 7, 10\}$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ definida por:

$$f(x) = 3\,x - 2\,.$$

(a) Comprobar que f es biyectiva y, por lo tanto, invertible. Justificar.

(b) Hallar la fórmula definitoria de f^{-1}, indicando su dominio y codominio.

(c) Verificar que $f^{-1} \circ f = i_X$ y que $f \circ f^{-1} = i_Y$, siendo i_X e i_Y las funciones identidad de X e identidad de Y, respectivamente.

EJERCICIOS OPTATIVOS

Ejercicio 29 Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 1\}$. Comprobar que $\mathcal{X}_A : A \longrightarrow B$ y $f : A \longrightarrow B$ definida por: $f(x) = 1$, para todo $x \in A$, son iguales.

Ejercicio 30 Dados los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$. Sea $f : A \longrightarrow B$ definida por:

$$f(x) = x + 1\,.$$

Realizar el diagrama de flechas de la relación $\overline{\mathcal{R}}$ de $\wp(A)$ en $\wp(B)$ dada por:

$$\overline{\mathcal{R}} = \{(X, Y) \in \wp(A) \times \wp(B) : Y = f(X)\}.$$

¿$\overline{\mathcal{R}}$ verifica las condiciones de existencia y unicidad? Justificar. ¿Qué se puede concluir? En caso de ser una función, poner F en lugar de $\overline{\mathcal{R}}$, y armar una tabla de valores.

Ejercicio 31 Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, ¿cuántas relaciones binarias de A en B se pueden definir? ¿y de B en A?
SUGERENCIA: Ayudarse haciendo diagramas de flechas.

Ejercicio 32 Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, ¿cuántas funciones de A en B se pueden definir? ¿y de B en A?
SUGERENCIA: Ayudarse haciendo diagramas de flechas.

Ejercicio 33 Sea X un conjunto tal que $\#(X) = 3$, ¿cuántas funciones biyectivas pueden establecerse de X en X?
SUGERENCIA: Ayudarse haciendo diagramas de flechas.

Ejercicio 34 Sea X un conjunto tal que $\#(X) = 5$, ¿cuántas funciones constantes pueden definirse de X en X?

Ejercicio 35 Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Considerar los siguientes subconjuntos de X, llamados *bloques*:

$$\{1,2,4\} \qquad \{2,3,5\} \qquad \{3,4,6\} \qquad \{4,5,7\} \qquad \{1,5,6\} \qquad \{2,6,7\} \qquad \{1,3,7\}$$

Se define $f : X^2 \longrightarrow X$ como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} z & \text{si} \quad x \neq y \ \text{ y } \ \{x,y,z\} \text{ es un bloque} \\ x & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

¿Es f una función biyectiva? Justificar.

Ejercicio 36 Se lanza una moneda al aire nueve veces. Se forman todos los pares (x, y), donde x designa el número de orden de la tirada e y es 1 cuando en la tirada ha caído *cara* y 0 cuando ha caído *sello*. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B = \{0, 1\}$. Este experimento define una $f : A \longrightarrow B$.

(a) ¿Cuántas opciones numéricas tiene $f(x)$, cualquiera sea x?

(b) Determinar el conjunto $f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\})$.

(c) Determinar el conjunto $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$.

Ejercicio 37 Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f : X \longrightarrow X$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in \{1, 2, 3\} \\ 4 & \text{si} \quad x \in \{4, 5\} \end{cases}$$

Mostrar que $f \circ f = f$.