Unidad 1

Conjuntos

Sin lugar a dudas, la Teoría de Conjuntos es la herramienta que está presente en cualquier rama de la Matemática. Los célebres matemáticos Georg Cantor [1845-1918] y Julius Dedekind [1831-1916] fueron pilares fundamentales en el origen y formalización de esta teoría pero por sobre todo en su dedicación por comprender el concepto de infinito. Posteriormente Ernst Zermelo [1871-1953] y Adolf Fraenkel [1891-1965] axiomatizan la Teoría de Conjuntos.

"Se entiende por conjunto a la agrupación en un todo de objetos de nuestra intuición o de nuestra mente" (G. Cantor). *"Un conjunto es un saco lleno de objetos, que llamamos elementos. Dentro del saco puede haber números, letras, plantas, personas, mastodontes,..., prácticamente cualquier cosa"* (J. Dedekind). Estas afirmaciones fueron declaradas por estos destacados matemáticos al querer explicar el concepto de conjunto.

En esta unidad se da una construcción intuitiva de los conjuntos partiendo de conceptos primitivos, se proponen actividades para ejercitar las operaciones y aplicar sus propiedades.

1.1 Introducción a la teoría de conjuntos

Tomamos como conceptos primitivos o indefinidos[1], las nociones de <u>elemento</u> y de <u>conjunto</u>. También utilizamos una relación primitiva, que llamamos <u>relación de pertenencia</u> y que notamos $\in$, que se lee: *pertenece a...*, *perteneciente a...*

Las expresiones conjunto, pertenencia y elemento servirán de conceptos básicos para definir los demás conceptos que integran la teoría de conjuntos.

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos, que llamamos elementos, esto es, *un conjunto está formado por elementos.*

[1] Es decir, que no están definidos previamente.

Adoptamos la siguiente regla:

Un conjunto está determinado o bien definido cuando disponemos de un criterio para establecer si un elemento pertenece o no a dicho conjunto.

Ejemplo En el conjunto de las vocales del abecedario, cada vocal es un elemento del conjunto de las vocales.

Al comienzo, trabajamos con conjuntos que tengan una cantidad finita (y manejable) de elementos. Luego vamos a ver los conjuntos numéricos, los cuales tienen una cantidad infinita de elementos.

Habitualmente designamos a los elementos y a los conjuntos con letras latinas minúsculas y mayúsculas respectivamente, aunque a veces no es posible o no es conveniente respetar estos acuerdos.

1.1.1 Relación de pertenencia

Si el elemento a está en el conjunto A usamos el símbolo de pertenencia $\in$[2] y escribimos $a \in A$, el cual leemos *a pertenece a A*, significando que a es un elemento de A.

Si el elemento a no está en el conjunto A usamos la negación del símbolo de pertenencia $\notin$ y escribimos $a \notin A$, el cual leemos *a no pertenece a A*, significando que a no es un elemento de A.

Es importante saber que un conjunto puede ser también un elemento de otro conjunto. Dentro de la Matemática encontramos un sinnúmero de ejemplos de conjuntos cuyos elementos son conjuntos. Uno clásico es el conjunto de todas las rectas del plano, pues cada recta es, a su vez, un conjunto de infinitos puntos alineados uniformemente.

Ejemplos Son conjuntos:

(a) Las vocales del abecedario.

(b) Los días de la semana.

(c) Las estaciones del año.

(d) Los números dígitos.

[2] Introducido por el matemático G. Peano [1858-1932], por ser la primer letra del verbo $\epsilon\acute{\iota}\mu\alpha\iota$ (*estar* en griego).

1.2 Representación de un conjunto

1.2.1 Representación por extensión

Un conjunto está representado por extensión, cuando todos sus elementos están indicados entre llaves, sin repetirse y sin importar el orden en que están enlistados. Si un elemento x está enlistado o citado en la representación por extensión de un conjunto A, tenemos que $x \in A$.

Ejemplos

(a) $A = \{a, e, i, o, u\}$ y podemos asegurar que $u \in A$, porque está en su lista de la representación por extensión.

(b) $B = \{Domingo, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado\}$ y podemos asegurar que $Domingo \in B$, porque está en su lista de la representación por extensión.

(c) $C = \{$*primavera, verano, otoño, invierno*$\}$ y podemos asegurar que la estación *verano* $\in C$, porque está en su lista de la representación por extensión.

(d) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y podemos asegurar que $3 \in D$, porque está en su lista de la representación por extensión.

Observación En todos los ejemplos anteriores, hemos colocado entre paréntesis (sin repetir y sin importar el orden) el *símbolo* o *rótulo* del objeto que queremos considerar como elemento. Esto quiere decir que al poner *Domingo* en el conjunto B del ejemplo (b) anterior, queremos indicar al día de 24 hs. completo, el primer día de la semana en su totalidad. Si bien escribimos la palabra con que se los nombra en el idioma español, podríamos haber indicado cada día escribiendo una abreviatura con sus primeras dos letras o bien, utilizar otro idioma para representarlo. Lo importante es que, de cualquier manera, seguiría siendo el mismo conjunto.

1.2.2 Representación por comprensión

Este tipo de representación surge de la necesidad de expresar a un conjunto cuando resulta incómoda, impráctica o, peor aún, imposible la representación por extensión.

Ejemplo Si consideramos el conjunto de las fechas del año calendario 2020, representarlo por extensión resulta un poco más complicado, ya que para hacerlo debemos indicar *todos* sus 366 elementos, por lo que es bisiesto. Una forma, no apropiada, es poniendo

$$E = \{1/1, 2/1, \ldots, 31/1, 1/2, 2/2, \ldots, 28/2, 29/2, 1/3, \ldots\ldots, 1/12, 2/12, \ldots, 31/12\}.$$

(donde los puntos suspensivos indican que continúa la lista con elementos *omitidos* ubicados entremedio).

Para evitar esto, procedemos a encontrar una *propiedad* o *condición* que solamente la verifiquen los elementos del conjunto que queremos representar. En este caso, la propiedad o condición sería la siguiente:

'x es una fecha del año 2020'.

Un conjunto está representado por comprensión, cuando a partir de una *propiedad*, establecemos que sus elementos son todos aquellos que la verifican o cumplen.

Para representar a un conjunto por comprensión seguimos estas reglas:

(I) Determinamos una propiedad o condición para el elemento x, llamada *cláusula*, que denotamos $P(x)$ y que sólo la verifiquen aquellos elementos del conjunto que queremos representar.

En general, una cláusula definitoria de un conjunto es una declaración que contenga al menos una variable como sujeto , en general, representada por x de manera que al reemplazar la variable x por un elemento, en particular, se transforme en una oración (V) [verdadera], cuando el elemento esté en el conjunto o en una oración (F) [falsa], en caso contrario. Una cláusula también puede ser una expresión o fórmula matemática que contenga a la variable x como sujeto, en su estructura.

Ejemplo Las siguientes declaraciones 'x es un número dígito', '$x+1 = 3$', 'x es un número impar', etc. son cláusulas, ya que todas al reemplazar o sustituir x por 2 se transforman en una oración (V) las dos primeras, y en una oración (F) la última.

(II) Finalmente, escribimos al conjunto buscado

$$C = \{x : P(x)\}.$$

Nota El signo : [3] se lee *tal que* y el símbolo $P(x)$ se lee P *de* x.

De este modo, el conjunto $C = \{x : P(x)\}$ se lee diciendo: C *es igual a los* x *tal que* $P(x)$, significando que, C es el conjunto de todos los elementos x que cumplen o verifican la propiedad $P(x)$.

[3]Dos puntitos.

Observaciones Observemos que

(1) Existen expresiones con apariencia de cláusulas, pero que en realidad no pueden ser tomadas como tales.

Ejemplo La expresión

‘x es una persona agradable’

y la *identidad* (igualdad)

$$‘x = x’$$

no son cláusulas definitorias de conjuntos. La primera porque no es posible decidir si es (V) [verdadera] o (F) [falsa], debido a que depende de quién lo dice y de la persona a la que se refiere según su agrado; y la segunda porque es *universalmente verdadera* dando origen, posteriormente, a lo que en matemática se llama una *paradoja*[4], por tal motivo se descarta como cláusula.

(2) Una cláusula se enuncia en tercera persona del singular, porque se refiere al elemento x.

Ejemplo Es correcto escribir

‘x es una vocal’

pero es incorrecto decir

‘x son las vocales’

(ya que sería en plural).

Y si se utilizan símbolos matemáticos exclusivamente, mucho mejor.

Ejemplo ‘$x^2 = 1$’.

Finalmente, tenemos que $E = \{x : x \text{ es una fecha del año } 2020\}$, que se lee E *es igual a los* x *tal que* x *es una fecha del año* 2020.

Ejemplos Los conjuntos dados como ejemplo por extensión anteriormente se escriben, por comprensión, de la siguiente manera:

[4] Contradicción, es decir, un conflicto o antinomia lógica.

(a) $A = \{x : x \text{ es una vocal}\}$ y podemos asegurar que $a \in A$, porque al reemplazar x por a en la cláusula definitoria queda la oración

$$\text{‘}a \text{ es una vocal’ } (V).$$

(b) $B = \{x : x \text{ es un día de la semana}\}$ y podemos asegurar que *Domingo* $\in B$, porque al reemplazar x por *Domingo* en la cláusula definitoria queda la oración

$$\text{‘}\textit{Domingo} \text{ es un día de la semana’ } (V).$$

(c) $C = \{x : x \text{ es una estación del año}\}$ y podemos asegurar que *verano* $\in C$, porque al reemplazar x por *verano* en la cláusula definitoria queda la oración

$$\text{‘}\textit{verano} \text{ es una estación del año’ } (V).$$

(d) $D = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$ y podemos asegurar que $3 \in D$, porque al reemplazar x por 3 en la cláusula definitoria queda la oración

$$\text{‘3 es un número dígito’ } (V).$$

1.3 Igualdad de conjuntos

Existe una relación entre conjuntos, previa a la de pertenencia, que es la relación de igualdad.
Decimos que los conjuntos A y B son iguales, si poseen los mismos elementos. En cuyo caso escribimos $A = B$.
El símbolo $A \neq B$ significa que los conjuntos A y B son distintos, o bien, que A y B no son idénticos, es decir, que no tienen los mismos elementos.
Ejemplo Consideremos los siguientes conjuntos representados por comprensión:

$$A = \{x : \underbrace{x \text{ es una cifra del número 120}}_{P(x)}\} \quad \text{y} \quad B = \{x : \underbrace{x \text{ es un número dígito menor que 3}}_{P'(x)}\}.$$

Claramente, se verifica que

$$0 \in A, \text{ pues } P(0)\text{: ‘0 es una cifra del número 120’ } (V),$$
$$1 \in A, \text{ pues } P(1)\text{: ‘1 es una cifra del número 120’ } (V),$$
$$2 \in A, \text{ pues } P(2)\text{: ‘2 es una cifra del número 120’ } (V).$$

Así, tenemos que la representación por extensión de $A = \{0, 1, 2\}$.

Por otra parte, se verifica que

$$0 \in B, \text{ pues } P'(0)\text{: `0 es un número dígito menor que 3' } (V),$$
$$1 \in B, \text{ pues } P'(1)\text{: `1 es un número dígito menor que 3' } (V),$$
$$2 \in B, \text{ pues } P'(2)\text{: `2 es un número dígito menor que 3' } (V).$$

Por lo tanto, la representación por extensión de $B = \{0, 1, 2\}$.

Finalmente, es fácil ver que los conjuntos A y B son iguales, es decir, $A = B$, puesto que tienen los mismos elementos.

Observaciones

(1) La cláusula definitoria del conjunto B, puede escribirse de una mejor manera como:

$$P'(x) : \text{`}x \text{ es un dígito y } x < 3\text{'.}$$

(2) En ambos casos, se tiene que $3 \notin A$ y $3 \notin B$, debido a que al reemplazar la variable x por 3, en cada una de las cláusulas definitorias se obtiene que

$$P(3)\text{: `3 es una cifra del número 120' } (F),$$

y además,

$$P'(3)\text{: `3 es un número dígito y } 3 < 3\text{' } (F).$$

(3) En algunos casos, existe más de una cláusula definitoria para poder representar a un conjunto por comprensión.

1.4 Conjuntos especiales

1.4.1 Conjunto universal o referencial

Puede ocurrir que los elementos de un conjunto no sean todos de la misma naturaleza.

Ejemplo Consideremos el conjunto T formado por el número π y el Campanil de la Iglesia Catedral, como conjunto es válido.

Sin embargo, este tipo de conjunto es muy poco interesante. En general, trabajamos con conjuntos cuyos elementos tengan una propiedad en común o sean del mismo tipo.

Resulta entonces conveniente establecer un conjunto que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina *conjunto universal o referencial*, y lo denotamos con la letra mayúscula imprenta R.

Ejemplos

(a) Tomemos como referencial R al conjunto de los números dígitos[5], esto es,

$$R = \{x : x \text{ es un número dígito}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y consideremos el conjunto A de las cifras del número 345, es decir,

$$A = \{x \in R : x \text{ es una cifra del número } 345\} = \{3, 4, 5\}.$$

Nota Notemos que, el conjunto A también puede expresarse, por comprensión, escribiendo

$$A = \{x \in R : 3 \leqslant x \leqslant 5\}.$$

(b) Si tomamos como referencial a $R = \{x : x \text{ es una letra del abecedario}\}$, podemos considerar el conjunto $B = \{x \in R : x \text{ es una vocal de la palabra } \textit{abrigo}\} = \{a, i, o\}$ y el conjunto $C = \{r, s, t\} = \{x \in R : x \text{ es una consonante de la palabra } \textit{resto}\}$.

1.4.2 Conjunto vacío

Necesariamente debemos admitir (por lo dicho anteriormente) que *todo ente es igual a sí mismo*, esto es, es verdad siempre que $x = x$ para cualquier x, es decir, todos los individuos que consideremos en cualquier universo la verifican, incluso dentro de la teoría de conjuntos.

En oposición, aceptamos que la condición

$$x \neq x$$

no es verificada por ningún ente, en particular, para ningún elemento x, lo que hace que siempre sea falsa. Este hecho nos permite declarar la existencia de un conjunto sin elementos.

El conjunto que no tiene elementos, y que es el *único* con esta característica, lo llamamos *vacío* y lo notamos con la letra griega $\emptyset$, llamada *fi*. Por extensión, el conjunto vacío $\emptyset = \{\ \ \}$ y por comprensión,

$$\emptyset = \{x :\ x \neq x\}.$$

Nota El resultado es el mismo con cualquier otra cláusula universalmente falsa.

Ejemplo Sea $R = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$. Considere K como el conjunto de los números dígitos que son par e impar *al mismo tiempo*, esto es, $K = \{x \in R : x \text{ es par y } x \text{ es impar}\}$, entonces $K = \emptyset$.

[5] Los números de una sola cifra, que en total son diez como la cantidad de los *dedos* de las dos manos.

Observación Otra forma de interpretar al conjunto vacío es notando que para cualquier elemento del referencial se tiene que éste no pertenece al conjunto vacío, esto es, $x \notin \emptyset$ para cualquier $x \in R$.
O bien, $A = \emptyset$ si, y sólo si, para cualquier $x \in R$ se tiene que $x \notin A$.
Definición Decimos que un conjunto A es *no vacío*, o bien que A es *distinto de vacío*, en símbolos, $A \neq \emptyset$, si hay al menos un elemento que pertenezca al conjunto A, esto es, si existe x tal que $x \in A$.

1.4.3 Conjunto unitario

Un conjunto U se dice *unitario*, si tiene un único elemento. Por extensión, los unitarios tienen la forma

$$U = \{\mathrm{x}\}.$$

Ejemplo El conjunto $U = \{x : x \text{ es la primer letra del abecedario}\}$ es unitario, puesto que $U = \{a\}$ por extensión.

1.4.4 Conjunto pareja desordenada

Un conjunto P se dice *pareja desordenada* o bien, *dúo* o *de pares* si tiene exactamente dos elementos distintos. Por extensión, las parejas desordenadas tienen la forma

$$P = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\},$$

donde los elementos x e y son distintos, es decir, $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$.
Ejemplo El conjunto $P = \{x : x \text{ es una vocal cerrada}\}$ es una pareja desordenada, pues $P = \{i, u\}$ por extensión.

1.4.5 Conjunto terna desordenada

Un conjunto T se dice *terna desordenada* o bien, *trío* si tiene exactamente tres elementos distintos entre sí. Por extensión, las ternas desordenadas tienen la forma

$$T = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\},$$

donde los elementos x, y y z son distintos entre sí, es decir, $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$, $\mathrm{y} \neq \mathrm{z}$ y $\mathrm{x} \neq \mathrm{z}$.
Ejemplo El conjunto $T = \{x : x \text{ es una cifra del número } 120\}$ es una terna desordenada, ya que $T = \{0, 1, 2\}$ por extensión.

Siguiendo con este procedimiento, podemos definir con facilidad los conjuntos cuaternas desordenadas o cuartetos, quintetos, sextetos, etc.

Observaciones

(1) Los conjuntos unitarios, parejas desordenadas, ternas desordenadas, etc. son *todos* no vacíos.

(2) El conjunto $A = \{0\}$, representado por extensión, claramente es un unitario. Una forma sencilla de representarlo por comprensión es la siguiente:

$$A = \{x : x = 0\}\,,$$

donde la cláusula definitoria del conjunto es

$$x = 0.$$

(3) El conjunto $B = \{a, b\}$, representado por extensión, claramente es una pareja desordenada. Una forma sencilla de representarlo por comprensión es la siguiente:

$$B = \{x : x = a \text{ o } x = b\}\,,$$

donde la cláusula definitoria del conjunto es

$$x = a \text{ o } x = b.$$

(4) El conjunto $C = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$, representado por extensión, claramente es una terna desordenada. Una forma sencilla de representarlo por comprensión es la siguiente:

$$C = \{x : x = \triangle \text{ o } x = \square \text{ o } x = \bigcirc\}\,,$$

donde la cláusula definitoria del conjunto es

$$x = \triangle \text{ o } x = \square \text{ o } x = \bigcirc.$$

1.5 Relación de inclusión

1.5.1 Subconjunto

Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A *es un subconjunto de* B, y lo simbolizamos como $A \subseteq B$, si todo elemento de A es un elemento de B, es decir, si para todo $x \in A$ se tiene que $x \in B$.

Observaciones

(1) Es usual decir que A *está incluído en* B, o bien A *está contenido en* B, o algunas veces A *es una parte de* B. Nosotros vamos a usar indistintamente cualquiera de ellas. También podemos decir que B *contiene a* A, en cuyo caso escribimos $B \supseteq A$.

(2) En caso contrario, se dice que A no está contenido en B, o que A no es subconjunto de B y que simbolizamos $A \nsubseteq B$, y esto sucede cuando hay al menos un elemento de A que no es elemento de B, es decir, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

(3) Dados conjuntos A y B, es fácil ver que si $A = B$ entonces se verifica que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, puesto que *todos los elementos de A son elementos de B y viceversa*, debido a que al ser iguales *ambos conjuntos tienen los mismos elementos.*

(4) El símbolo $A \subset B$[6], representa el caso en que $A \subseteq B$ y, sin embargo, $A \neq B$. Recíprocamente, el símbolo $A \subseteq B$ puede interpretarse como que $A \subset B$ o $A = B$.

Ejemplo En el conjunto de las letras del abecedario, como referencial R, consideremos los conjuntos escritos por comprensión:

$A = \{x \in R : x \text{ es una letra de la palabra } durazno\}$,

$B = \{x \in R : x \text{ es una letra de la palabra } dura\}$ y

$C = \{x \in R : x \text{ es una letra de la palabra } uno\}$.

Entonces $A = \{d, u, r, a, z, n, o\}$, $B = \{d, u, r, a\}$ y $C = \{u, n, o\}$ por extensión. Luego, tenemos que se verifica que

$$C \subseteq A,$$

puesto que todos los elementos de C pertenecen al conjunto A y, además,

$$B \subseteq A,$$

puesto que todos los elementos de B pertenecen al conjunto A.

1.5.1.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C dentro de un referencial R, se verifica que:

(S_1) $\emptyset \subseteq A$.

(S_2) $A \subseteq R$.

(S_3) $A \subseteq A$. [Reflexiva]

(S_4) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$. [Antisimétrica]

(S_5) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$. [Transitiva]

[6] A la relación $\subset$ se la conoce como la *inclusión estricta*.

Tener presente: La relación de pertenencia vincula elementos con conjuntos y la relación de inclusión vincula conjuntos con conjuntos.

1.5.2 Conjunto de las partes de un conjunto

Dado un conjunto A cualquiera, llamamos *partes de* A a la familia de conjuntos[7] formada por todos los subconjuntos del conjunto A, que simbolizamos con $\wp(A)$. Así, por comprensión, el conjunto de las partes de A es

$$\wp(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Observaciones Dado un conjunto A, cualesquiera sean los elementos x, y, z se verifica que:

(1) Si $x \in A$, entonces $\{x\} \subseteq A$.

(2) Si $x, y \in A$, entonces $\{x, y\} \subseteq A$.

(3) Si $x, y, z \in A$, entonces $\{x, y, z\} \subseteq A$.

Ejemplo Si $A = \{0, 1, 2\}$ entonces, teniendo en cuenta la observación anterior y las propiedades (S_1) y (S_3) de inclusión, $\wp(A)$ está formado por:

$$\text{Vacío:} \quad \emptyset \subseteq A \ \surd,$$

$$\text{Unitarios:} \quad \begin{cases} \{0\} \subseteq A \ \surd, \text{porque } \ 0 \in A; \\ \{1\} \subseteq A \ \surd, \text{porque } \ 1 \in A; \\ \{2\} \subseteq A \ \surd, \text{porque } \ 2 \in A; \end{cases}$$

$$\text{Parejas desordenadas:} \quad \begin{cases} \{0, 1\} \subseteq A \ \surd, \text{porque } \ 0, 1 \in A; \\ \{0, 2\} \subseteq A \ \surd, \text{porque } \ 0, 2 \in A; \\ \{1, 2\} \subseteq A \ \surd, \text{porque } \ 1, 2 \in A; \end{cases}$$

$$\text{Ternas desordenadas:} \quad \{0, 1, 2\} = A \subseteq A \ \surd.$$

Luego, por extensión, $\wp(A) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \underbrace{\{0, 1, 2\}}_{A}\Big\}$.

1.5.2.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A y B, se verifica que:

(W_1) $\emptyset \in \wp(A)$.

[7] Un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

(W_2) $A \in \wp(A)$.

(W_3) $\wp(\emptyset) = \{ \emptyset \}$.

(W_4) Si $A \subseteq B$, entonces $\wp(A) \subseteq \wp(B)$.

1.6 Cardinalidad

1.6.1 Conjuntos finitos e infinitos

Decimos que un conjunto es finito si tiene una cantidad determinada de elementos que puedan *enumerarse* en un conteo que termine. Si un conjunto tiene n elementos (con $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc.), se dice que es *finito*. Caso contrario, decimos que el conjunto es *infinito*.

Ejemplos

(a) El conjunto vacío, los conjuntos unitarios, las parejas desordenadas, las ternas desordenadas, etc. son conjuntos finitos.

(b) El conjunto $D = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$ es un conjunto finito.

(c) El conjunto $\mathbb{R} = \{x : x \text{ es un número real}\}$ es un conjunto infinito.

1.6.1.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A y B, se verifica que:

(F_1) Si $A \subseteq B$ y B es finito, entonces A es finito.

(F_2) Si A es infinito, entonces $A \neq \emptyset$, es decir, A es no vacío.

(F_3) Si $A \subseteq B$ y A es infinito, entonces B es infinito.

1.6.2 Cardinal de un conjunto

Dado un conjunto A, definimos el *cardinal del conjunto* A, o simplemente *cardinal de* A, que denotamos con $\#(A)$, como la cantidad de elementos que tiene el conjunto A. El símbolo $\#(A)$ se lee diciendo *numeral de* A o más precisamente, *cardinal de* A.

Algunos autores utilizan la notación $|A|$ para indicar el *cardinal de* A, pero nosotros, en este curso, no la vamos a ocupar, debido a que suele producir confusiones. Cuando se tenga claro el concepto, va a ser indistinto utilizar cualquiera de las notaciones.

Ejemplos

(a) $\#(\emptyset) = 0$, es decir, el cardinal del conjunto vacío es 0.

(b) Si $A = \{0\}$, es decir, A es un conjunto unitario, entonces $\#(A) = 1$.

(c) Si $B = \{a, e, i, o, u\}$, es decir, B es el conjunto de las vocales del abecedario, entonces $\#(B) = 5$.

(d) Si $C = \{x : x$ es una letra de la palabra *secundario*$\}$, es decir, $C = \{s, e, c, u, n, d, a, r, i, o\}$, entonces $\#(C) = 10$.

1.6.2.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C, se verifica que:

(T_1) Si $A = B$, entonces $\#(A) = \#(B)$.

(T_2) Si $A \subseteq B$, entonces $\#(A) \leqslant \#(B)$.

(T_3) Si $A \subseteq B \subseteq C$ tales que $\#(A) = \#(C)$, entonces $\#(A) = \#(B)$.

(T_4) Si $\#(A) \leqslant \#(B)$ y $\#(B) \leqslant \#(A)$, entonces $\#(A) = \#(B)$.

(T_5) $\#\big(\wp(A)\big) = 2^{\#(A)}$.

Ejemplos

(a) En el conjunto de los números dígitos, consideremos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, claramente tenemos que $A \subseteq B$ verificando que $\#(A) \leqslant \#(B)$, ya que $3 \leqslant 5$.

(b) Como se dijo en (W_3), $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, es decir, el conjunto de las partes del vacío es un conjunto unitario. Por lo que $\#\big(\wp(\emptyset)\big) = 2^0 = 1$, siendo 0 el cardinal del vacío, pues $\#(\emptyset) = 0$.

Nota Notemos que $\wp(\emptyset) \neq \emptyset$, puesto que tiene algo, y ese algo es solamente el conjunto vacío $\emptyset$ como su único elemento.

(c) Si $A = \{0, 1\}$, es decir, $\#(A) = 2$ entonces $\#\big(\wp(A)\big) = 2^2 = 4$, que es la cantidad de subconjuntos que tiene A, puesto que $\wp(A) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \underbrace{\{0, 1\}}_{A}\Big\}$.

1.7 Representación gráfica

1.7.1 Diagramas de Venn

Un recurso didáctico, muy utilizado, que sirve para tener una idea de intuitiva del comportamiento de un conjunto consiste en dibujarlo, esto es, realizar un diagrama que lo ilustre.
Este procedimiento tiene limitaciones y debe tenerse siempre en cuenta que se trata, como dijimos al comienzo, de un recurso didáctico. A este tipo de representación gráfica de un conjunto lo llamamos *diagrama de Venn*, en honor a su creador, el matemático John Venn [1834-1923].
Las reglas para construir el gráfico o diagrama de Venn de un conjunto A son las siguientes:

(G_1) Si $A = \emptyset$, entonces A no tiene diagrama.

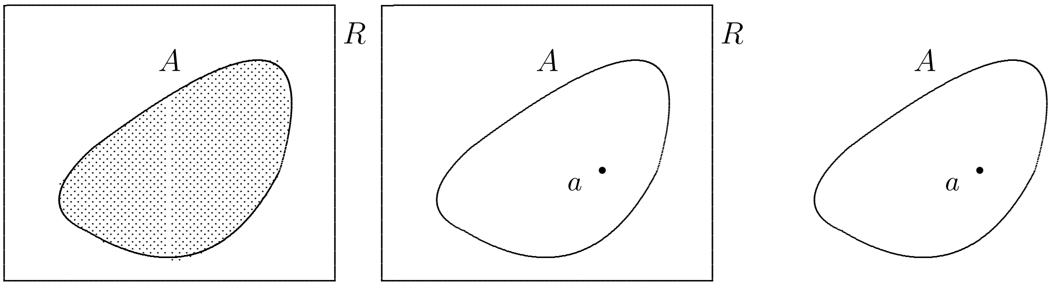
(G_2) Si $A \neq \emptyset$, entonces lo representamos considerando la región interior a una curva cerrada que sea *simple*, es decir, que no se entrecruce como, por ejemplo, la zona interior de un óvalo, un círculo, un cuadrado, un rectángulo, etc.

(G_3) En el caso de que la cantidad de elementos del conjunto A sea un número finito pequeño, fácil de indicar, colocamos un punto "gordo", llamado *afijo* ($\bullet$) en la zona o región interior delimitada por la curva cerrada simple que representa a A; uno por cada elemento, y al lado se coloca el *nombre* o *símbolo* que lo distingue.

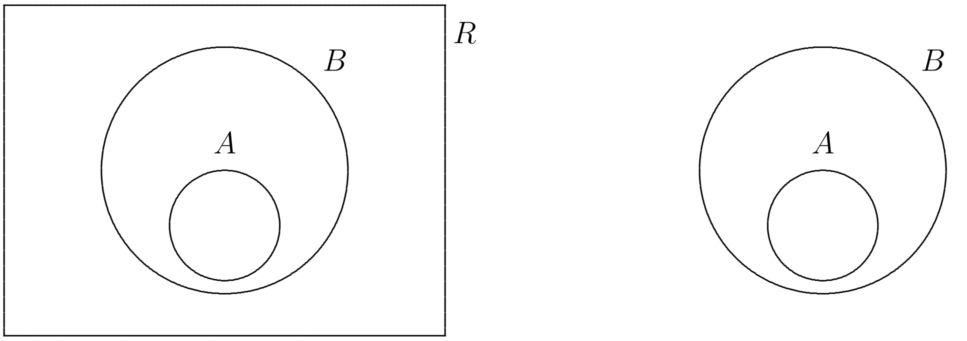
(G_4) En el caso de que la cantidad de elementos del conjunto A sea una cantidad finita incómoda de representar o, peor aún, una cantidad infinita, lo que hacemos es dibujar sólo la curva cerrada simple, y consideramos al conjunto como toda la zona o región interior. En este caso, si se quiere, se puede indicar algunos de los elementos que están en el conjunto, para tener una idea quiénes pertenecen.

Observación Si un conjunto no vacío A es un subconjunto de otro conjunto B, esto es, $A \neq \emptyset$ y $A \subseteq B$, entonces es claro que el diagrama de Venn de A se dibuja dentro del diagrama de B.

En general, se utiliza para la representación del conjunto universal o referencial a la zona interior de un rectángulo, y para un conjunto A cualquiera a la región interior delimitada por cualquier otra curva cerrada simple dentro del rectángulo del referencial o directamente el diagrama de A, si se tiene bien en claro quien es el universo y no es necesario indicarlo, como se muestra a continuación:

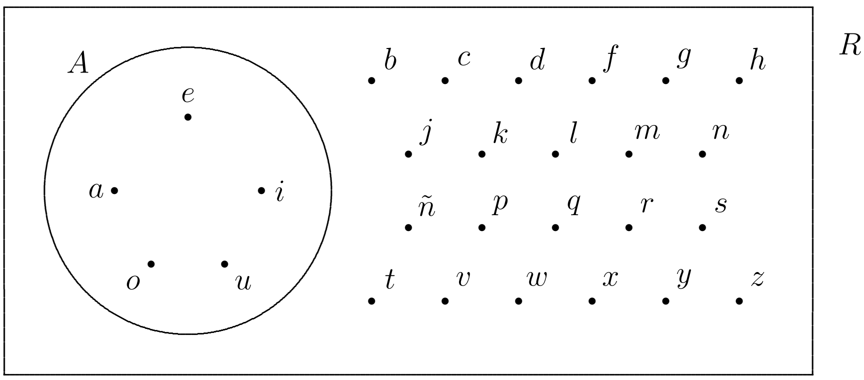


Si A es un subconjunto de B, es decir, $A \subseteq B$, entonces la región que representa a A, se grafica dentro de la que representa a B.

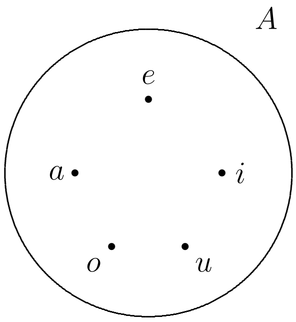


Ejemplos En el conjunto R de las letras del abecedario, esto es, $R = \{x : x \text{ es una letra del abecedario}\}$ como conjunto universal:

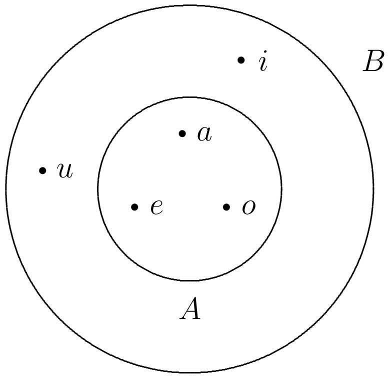
(a) Consideremos el conjunto $A = \{x \in R : x \text{ es una vocal}\} = \{a, e, i, o, u\}$. Tenemos que la representación gráfica de A dentro del diagrama de R es



Generalmente, sólo se grafica el conjunto A, esto es, no hace falta hacer el diagrama del universo, salvo que sea necesario representarlo. Así, el diagrama de Venn del conjunto A es simplemente



(b) Consideremos el conjunto $A = \{x \in R : x \text{ es una vocal abierta}\} = \{a, e, o\}$ y tomemos nuevamente el conjunto $B = \{x \in R : x \text{ es una vocal}\} = \{a, e, i, o, u\}$, es fácil ver que $A \subseteq B$. Luego, el diagrama de Venn de A y de B se dibujan como se muestran a continuación:



Observación En los casos que sea necesario resaltar la zona que representa al conjunto, se suele remarcar el interior con un sombreado o rayado.

1.8 Operaciones conjuntistas

En lo que sigue, aunque no lo digamos explícitamente, todos los conjuntos que considerados son subconjuntos del mismo conjunto universal o referencial R. A continuación, vamos a definir tres operaciones entre dos conjuntos, a las que llamamos *operaciones binarias*, y una *operación unaria*, puesto que se aplica a un sólo conjunto.

1.8.1 Intersección

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B (al mismo tiempo). A la intersección de A con B se la denota con $A \cap B$, que se lee A *intersección* B, A *intersectado con* B o A *cortado con* B. Por comprensión, se define como

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

También podemos expresar a $A \cap B$, por comprensión, como:

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\},$$

donde A ocuparía el rol de conjunto universal y $x \in B$ sería la cláusula definitoria de conjunto, es decir,

$$P(x) : \text{‘}x \in B\text{'}.$$

La idea intuitiva de la intersección de dos conjuntos es que está formada por todos los elementos que tienen en común ambos conjuntos. En caso de no haya elementos en común, es decir, si A y B no tienen elementos en común, tenemos que $A \cap B = \emptyset$. Lo que nos lleva a dar la siguiente

Definición Dados dos conjuntos, digamos A y B, decimos que A y B son *disjuntos*, si $A \cap B = \emptyset$.

Observación

Coloquialmente decir que

$$x \in A \text{ y } x \in B$$

es lo mismo que decir que

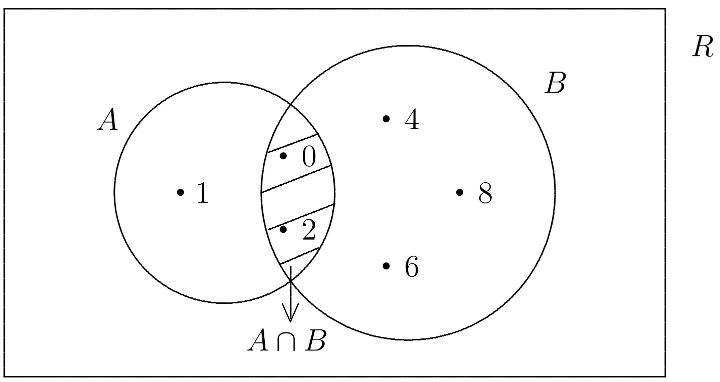
$$x \in B \text{ y } x \in A.$$

Esto es, ambas expresiones *significan lo mismo.* Matemáticamente hablando son enunciados *equivalentes.*

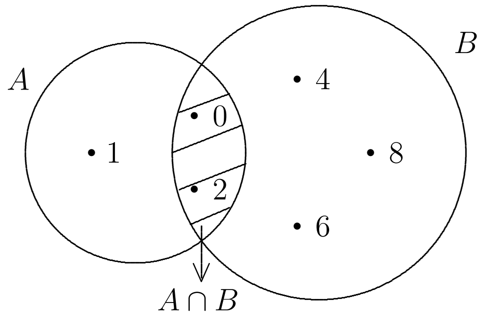
Ejemplos Consideremos como referencial al conjunto $R = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$.

(a) Si tomamos los subconjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, entonces $A \cap B = \{0, 2\}$, porque 0 y 2 pertenecen tanto a A como a B, es decir, son todos los elementos que tienen en común ambos conjuntos.

Así, el diagrama de Venn es



O simplemente, sin el referencial queda



En este caso, tenemos que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$, por eso los anillos se entrecruzan.

(b) Si tomamos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tenemos que $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = \{0, 1, 2\} = A$, puesto que

$$0 \in A \text{ y } 0 \in B \ \surd,$$

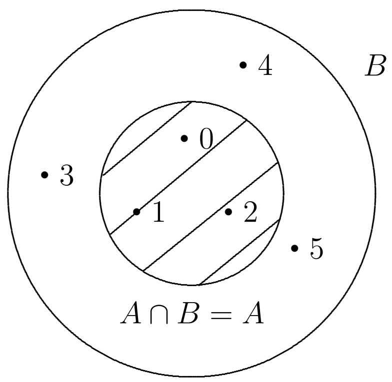
$$1 \in A \text{ y } 1 \in B \ \surd,$$

$$2 \in A \text{ y } 2 \in B \ \surd.$$

Así, los elementos en común a ambos conjuntos son <u>todos</u> los elementos de A, debido a que $A \subseteq B$.

En este caso vemos que si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$. Y si hubiese sucedido que $B \subseteq A$, entonces $A \cap B = B$. Por lo tanto tenemos que si un conjunto está contenido en otro, la intersección de ambos es el conjunto más chico[8].

Luego, el diagrama de Venn es

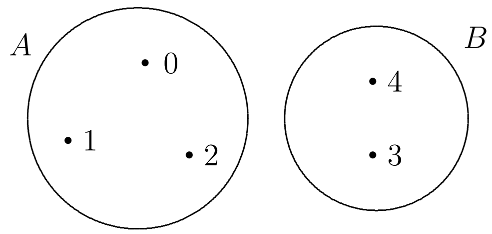


En los Ejemplos (a) y (b) anteriores, en ambos casos, se observa que $A \cap B \neq \emptyset$, es decir, los conjuntos A y B tienen elementos en común.

[8] Al ser comparados por inclusión de conjuntos.

(c) Si tomamos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces al no tener A y B elementos en común resulta que $A \cap B = \emptyset$, significando que A y B son disjuntos.

De esta manera, el diagrama de Venn es



$A \cap B = \emptyset$

En el caso de que los conjuntos A y B sean disjuntos, es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$, sus diagramas de Venn correspondientes se hacen separados, esto es, sin entrecruzarse ni tampoco uno dentro de otro.

1.8.1.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A y B dentro de un referencial R, se verifica que:

(I_1) $A \cap A = A$. [Idempotencia]

(I_2) $A \cap B = B \cap A$. [Conmutativa]

(I_3) $A \cap B \subseteq A$.

(I_4) $A \cap B \subseteq B$.

(I_5) $A \cap B = A$ si, y sólo si, $A \subseteq B$.

(I_6) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(I_7) $A \cap R = A$.

1.8.2 Unión

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos del referencial R que pertenecen o a A o a B. A la unión de A con B se la denota con $A \cup B$, que se lee *A unión B*, *A unido a B* o bien *A juntado con B*. Por comprensión, se define como

$$A \cup B = \{x \in R : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Un elemento x del referencial pertenece a $A \cup B$ si, y sólo si, x está en cualquiera de los dos conjuntos (en A o en B). Esto es, $x \in A \cup B$ si, y sólo si, $x \in R$ verificando alguna de las siguientes tres condiciones:

$$(1)\ \boxed{x \in A \text{ y } x \notin B} \quad \text{o} \quad (2)\ \boxed{x \in B \text{ y } x \notin A} \quad \text{o} \quad (3)\ \boxed{x \in A \text{ y } x \in B}.$$

La idea intuitiva de la unión de dos conjuntos es que está formada por el rejunte de todos los elementos que tienen ambos conjuntos, sin repetir los que tengan en común entre ellos.

Observaciones

(1) Coloquialmente decir que

$$x \in A \text{ o } x \in B$$

es lo mismo que decir que

$$x \in B \text{ o } x \in A.$$

Esto es, ambas expresiones *significan lo mismo.* Matemáticamente hablando son enunciados *equivalentes.*

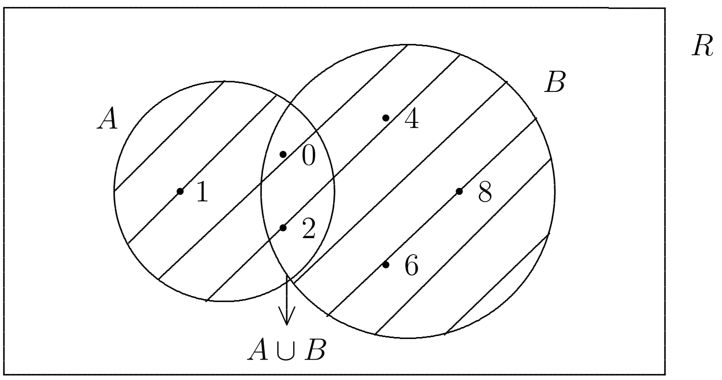
(2) Los elementos que no deben repetirse al unir dos conjuntos son los que están en ambos a la vez, es decir, los que pertenecen a la intersección de los dos.

Ejemplos Consideremos como referencial al conjunto $R = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$.

(a) Si tomamos los subconjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, entonces $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, porque hemos juntado los elementos de A con los de B, sin repetir el 0 y el 2, que son los comunes a ambos.

Sabemos que, en este caso, $A \cap B = \{0, 2\} \neq \emptyset$ y que $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$. Esto nos indica que los anillos cuya zona interior representa a los conjuntos deben dibujarse entrecruzados[9].

Así, el diagrama de Venn es



[9]Por lo que es conveniente, antes de graficar, observar lo que ocurre con la intersección y la inclusión entre los conjuntos.

(b) Si tomamos $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{0,1,2,3,4,5\}$ tenemos que $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\} = B$, puesto que

$$0 \in A \;\text{ o }\; 0 \in B \;\surd, \text{ puesto que } 0 \in A \text{ y } 0 \in B;$$

$$1 \in A \;\text{ o }\; 1 \in B \;\surd, \text{ puesto que } 1 \in A \text{ y } 1 \notin B;$$

$$2 \in A \;\text{ o }\; 2 \in B \;\surd, \text{ puesto que } 2 \in A \text{ y } 2 \in B;$$

$$3 \in A \;\text{ o }\; 3 \in B \;\surd, \text{ puesto que } 3 \in B \text{ y } 3 \notin A;$$

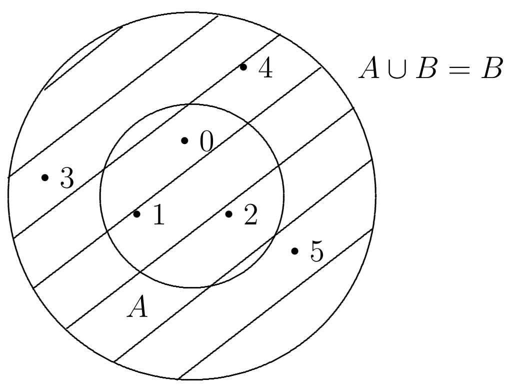
$$4 \in A \;\text{ o }\; 4 \in B \;\surd, \text{ puesto que } 4 \in B \text{ y } 4 \notin A;$$

$$5 \in A \;\text{ o }\; 5 \in B \;\surd, \text{ puesto que } 5 \in B \text{ y } 5 \notin A.$$

De esta manera, el rejunte de todos elementos de ambos conjuntos son todos los elementos de B, debido a que $A \subseteq B$.

En este caso, tenemos que si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$. Y si hubiese sucedido que $B \subseteq A$, entonces $A \cup B = A$. Por lo tanto tenemos que si un conjunto está contenido en otro, la unión de ambos es el conjunto más grande[10].

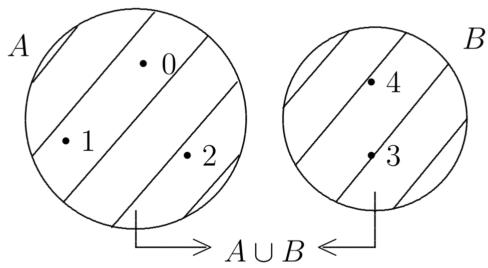
Luego, el diagrama de Venn es



(c) Si tomamos $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{3,4\}$ tenemos que $A \cap B = \emptyset$, es decir, A y B son disjuntos, entonces $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

De esta manera, el diagrama de Venn es

[10] Al ser comparados por inclusión de conjuntos.



1.8.2.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A y B dentro de un referencial R, se verifica que:

(U_1) $A \cup A = A$. [Idempotencia]

(U_2) $A \cup B = B \cup A$. [Conmutativa]

(U_3) $A \subseteq A \cup B$.

(U_4) $B \subseteq A \cup B$.

(U_5) $A \cup B = B$ si, y sólo si, $A \subseteq B$.

(U_6) $A \cup \emptyset = A$.

(U_7) $A \cup R = R$.

(U_8) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$. [Absorción]

1.8.3 Complemento

Sabemos que el conjunto universal o referencial R contiene a cualquier conjunto A, por la propiedad (S_2) de inclusión. El complemento de A relativo al universo R, o simplemente, el complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A. La noción de complemento depende del conjunto referencial elegido (por eso se dice relativo), esto es, si cambiamos el universal o referencial cambia el complemento. Al complemento de A se lo denota con A^c, que se lee *A complemento* o bien *complemento de A*. Por comprensión, se define como

$$A^c = \{x \in R : x \notin A\}.$$

La idea intuitiva del complemento de un conjunto es que está formado por todos los elementos que están fuera del conjunto, pero dentro del universal.

Un elemento x pertenece a A^c si, y sólo si, x está en el referencial pero no está en A, es decir, el complemento de A es la parte de R que no es A, esto es, lo que le falta a A para completar al universal.

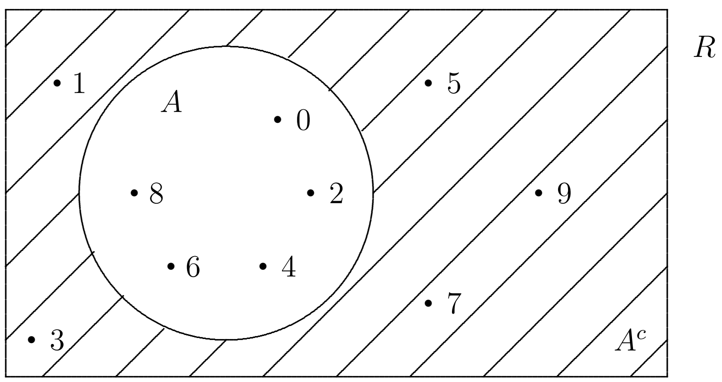
Ejemplos

(a) En el conjunto de las letras del abecedario el complemento del conjunto de las vocales es el conjunto de las consonantes, y viceversa. Esto nos muestra que si A es un conjunto cualquiera, $(A^c)^c = A$, es decir, el complemento del complemento de A es el propio conjunto A.

(b) Ahora se nos presenta una cuestión: ¿qué conjunto es el complemento de $\emptyset$? Puesto que $\emptyset$ es un conjunto que no tiene elementos, su complemento tiene que ser un conjunto que contenga a todos los elementos a estudiar. No nos queda otra opción de que el conjunto requerido sea el universal o referencial R, esto es, $\emptyset^c = R$ y viceversa, esto es, $R^c = \emptyset$.

(c) Si tomamos como referencial al conjunto $R = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$ y si consideramos el conjunto $A = \{x \in R : x \text{ es par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Luego, resulta que $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in R : x \text{ es impar}\}$, pues 1, 3, 5, 7 y 9 están en R y no son elementos de A. En palabras, el complemento de los dígitos pares es el conjunto de los dígitos impares, y viceversa.

Por lo tanto, en este caso, el diagrama de Venn es,



1.8.3.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A y B dentro de un referencial R, se verifica que:

(C_1) $(A^c)^c = A$. [Involución]

(C_2) $R^c = \emptyset$.

(C_3) $\emptyset^c = R$.

(C_4) $A \subseteq B$ si, y sólo si, $B^c \subseteq A^c$.

(C_5) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. [Ley de De Morgan]

(C_6) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. [Ley de De Morgan]

(C_7) $A \cap A^c = \emptyset$.

(C_8) $A \cup A^c = R$.

1.8.4 Diferencia

La diferencia entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen a B. A la diferencia de A con B se la denota con $A - B$, que se lee A *menos* B o bien A *diferencia con* B. En una teoría de conjuntos un poco más avanzada, se la nombra como *el complemento de* B *relativo a* A. Por comprensión, se define como

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La idea intuitiva de la diferencia entre dos conjuntos es que está formada por todos los elementos del primer conjunto al que se le quitan los que están en el segundo conjunto, es decir, todos los elementos que están en el primer conjunto pero que no estén en el segundo conjunto.

Ejemplos Consideremos como referencial al conjunto $R = \{x : x \text{ es un número dígito}\}$.

(a) Si tomamos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Luego $A - B = \{1, 2, 3\}$, puesto que

$$1 \in A \text{ y } 1 \notin B \ \surd$$

$$2 \in A \text{ y } 2 \notin B \ \surd$$

$$3 \in A \text{ y } 3 \notin B \ \surd$$

En cambio,

$$4 \in A \text{ y } 4 \notin B \ \not\surd \ \text{ (porque } 4 \in B)$$

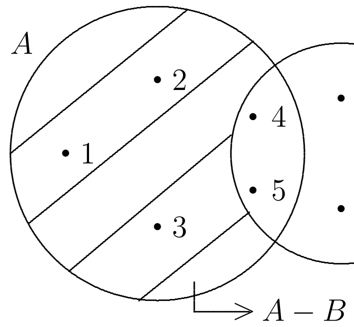
$$5 \in A \text{ y } 5 \notin B \ \not\surd \ \text{ (porque } 5 \in B).$$

Nota El símbolo $\not\surd$ significa *no válido* o *no vale.*

Sabemos que, en este caso, $A \cap B = \{4, 5\} \neq \emptyset$ y que $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$. Esto nos indica que los anillos cuya zona interior representa a los conjuntos deben dibujarse entrecruzados [11].

[11] Es conveniente, antes de graficar, observar lo que ocurre con la intersección y la inclusión entre los conjuntos.

Así, el diagrama de Venn es



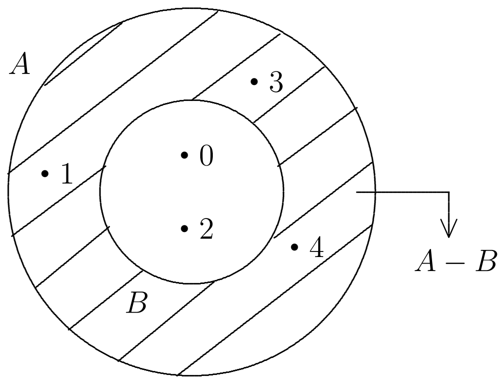
(b) Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 2\}$, es decir, estamos en el caso de que $B \subseteq A$. Luego, $A - B = \{1, 3, 4\}$, puesto que

$$1 \in A \text{ y } 1 \notin B \;\surd$$

$$3 \in A \text{ y } 3 \notin B \;\surd$$

$$4 \in A \text{ y } 4 \notin B \;\surd$$

Luego, el diagrama de Venn es



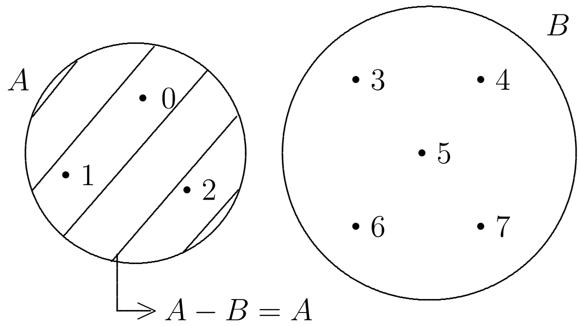
(c) Si consideramos ahora $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ tenemos que, claramente, $A \cap B = \emptyset$, entonces $A - B = \{0, 1, 2\} = A$, puesto que

$$0 \in A \text{ y } 0 \notin B \;\surd$$

$$1 \in A \text{ y } 1 \notin B \;\surd$$

$$2 \in A \text{ y } 2 \notin B \;\surd$$

De esta manera, el diagrama de Venn es



Esto quiere decir que si A y B son disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$ entonces $A - B = A$. Y similarmente, $B - A = B$.

1.8.4.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A y B dentro de un referencial R, se verifica que:

(D_1) $A^c = R - A$.

(D_2) $A - B = A \cap B^c$.

(D_3) $A - B \subseteq A$.

(D_4) $A \subseteq B$ si, y sólo si, $A - B = \emptyset$.

(D_5) $A - A = \emptyset$.

(D_6) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$.

(D_7) $(A - B) - A = \emptyset$.

(D_8) $A \cap (B - A) = \emptyset$

(D_9) $A \cup B = A \cup (B - A)$.

(D_{10}) $(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$.

(D_{11}) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.

Observaciones

(1) El conjunto $A - B$ también puede expresarse, por comprensión, poniendo $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$.

(2) Dados dos conjuntos A y B, en general, se verifica que

$$A - B \neq B - A.$$

La igualdad sólo se verifica cuando $A = B$, resultando que $A - B = B - A$, puesto que $A - \underbrace{A}_{B} = \emptyset$.

1.8.5 Diferencia simétrica

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos del referencial R que pertenecen o a $A - B$ o a $B - A$. A la diferencia simétrica de A con B se la denota con $A \Delta B$, que se lee A *diferencia simétrica* B. Por comprensión, se define como

$$A \Delta B = \{x \in R : x \in A - B \text{ o } x \in B - A\},$$

esto es,

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

La idea intuitiva de la diferencia simétrica entre dos conjuntos es que está formada por el rejunte de todos los elementos que están en un conjunto y no están en el otro, en ambos sentidos[12].

Observación En la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B, los conjuntos $A - B$ y $B - A$ son disjuntos, es decir,

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset\,.$$

Definición (*Alternativa*) Dados dos conjuntos A y B, podemos definir la *diferencia simétrica de* A *con* B, como el siguiente conjunto:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)\,.$$

Ejemplos Consideremos como referencial al conjunto $R = \{x : x \text{ es una letra de la palabra } \textit{secundario}\}$.

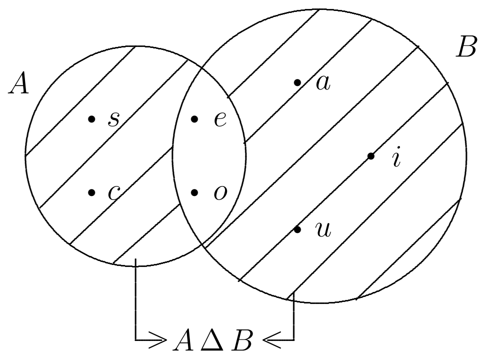
(a) Si tomamos los subconjuntos $A = \{s, e, c, o\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$, entonces tenemos que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, i, s, u\}$, puesto que $A - B = \{c, s\}$ y $B - A = \{a, i, u\}$.

Sabemos que, en este caso, $A \cap B = \{e, o\} \neq \emptyset$ y que $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$. Esto nos indica que los anillos cuya zona interior representa a los conjuntos deben dibujarse entrecruzados[13].

[12] Es decir, las dos posibilidades de diferencia.

[13] Recordando que conviene, antes de graficar, observar lo que ocurre con la intersección y la inclusión entre los conjuntos.

Así, el diagrama de Venn es



Claramente puede verse en la representación gráfica, mediante diagramas de Venn, que

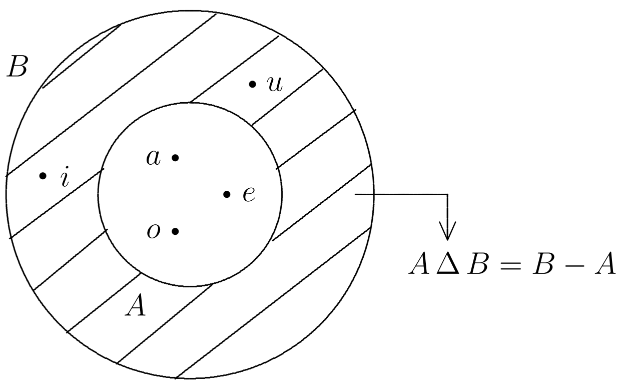
$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{a, c, e, i, o, s, u\} - \{e, o\} = \{a, c, i, s, u\}.$$

(b) Si tomamos $A = \{a, e, o\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$ tenemos que, claramente, $A \subseteq B$, entonces $A \,\Delta\, B = \{i, u\}$, puesto que

$$A - B = \emptyset \quad \text{y} \quad B - A = \{i, u\}.$$

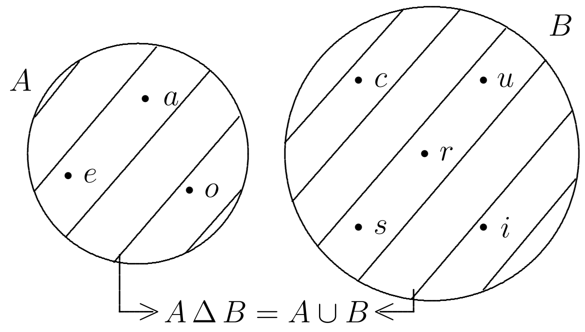
De esta manera, resulta que si $A \subseteq B$, entonces $A \,\Delta\, B = B - A$, ya que en este caso, tenemos que $A - B = \emptyset$. Y si hubiese ocurrido que $B \subseteq A$, entonces $A \,\Delta\, B = A - B$, ya que en este caso, tendríamos que $B - A = \emptyset$.

Luego, el diagrama de Venn es



(c) Si consideramos ahora $A = \{a, e, o\}$ y $B = \{c, u, r, s, i\}$ tenemos que, claramente, $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \,\Delta\, B = \{a, c, e, i, o, r, s, u\}$, puesto que $A - B = \{a, e, o\}$ y $B - A = \{c, u, r, s, i\}$. O bien, $A \,\Delta\, B = A \cup B = \{a, c, e, i, o, r, s, u\}$, debido a que $A \cap B = \emptyset$.

De esta manera, el diagrama de Venn es



1.8.5.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C dentro de un referencial R, se verifica que:

(Δ_1) $A - B \subseteq A \Delta B$,

(Δ_2) $A \Delta B \subseteq A \cup B$,

(Δ_3) $A \Delta \emptyset = A$,

(Δ_4) $A \Delta A = \emptyset$,

(Δ_5) $A \Delta B = B \Delta A$, [Conmutativa]

(Δ_6) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, [Asociativa]

(Δ_7) $(A \Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,

(Δ_8) $A = B$ si, y sólo si, $A \Delta B = \emptyset$.

1.8.6 Intersección y unión de tres conjuntos

La intersección de los conjuntos A, B y C es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B y a C. A la intersección de A con B con C se la denota con $A \cap B \cap C$, que se lee *A intersección B intersección C*, *A intersectado con B intersectado con C* o bien *A cortado con B cortado con C*. Por comprensión, se define como

$$A \cap B \cap C = \{x : x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C\}.$$

La idea intuitiva de la intersección de tres conjuntos es que está formada por todos los elementos que tienen en común los tres conjuntos. En caso de que no tengan elementos en común, claramente la intersección de los tres conjuntos es vacía.

También podemos expresar a $A \cap B \cap C$, por comprensión, como:

$$A \cap B \cap C = \{x \in A : \underbrace{x \in B \text{ y } x \in C}_{x \in B \cap C}\} = \{x \in A \cap B : x \in C\}.$$

La unión de los conjuntos A, B y C es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen o a A o a B o a C. A la unión de A con B con C se la denota con $A \cup B \cup C$, que se lee *A unión B unión C*, *A unido a B unido a C* o bien *A juntado con B juntado con C*. Por comprensión, se define como

$$A \cup B \cup C = \{x \in R : x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C\}.$$

La idea intuitiva de la unión de tres conjuntos es que está formada por el rejunte de todos los elementos que tienen los tres conjuntos, sin repetir los que tengan en común entre ellos.
Como anticipo del final de la unidad, se enuncia un grupo de propiedades conjuntistas en las que intervienen tres conjuntos.

1.8.6.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C dentro de un referencial R, se verifica que:

(P_1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. [Asociativa]

(P_2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$. [Asociativa]

(P_3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. [Distributiva de la intersección respecto a la unión]

(P_4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. [Distributiva de la unión respecto a la intersección]

(P_5) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

(P_6) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

(P_7) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

(P_8) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

(P_9) Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $C - B \subseteq C - A$.

(P_{10}) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$.

(P_{11}) $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$.

1.9 Intersecciones y uniones de conjuntos finitos

1.9.1 Principio del intersectando finito

Dado un par de conjuntos, digamos A y B, donde al menos uno de ellos es finito, esto es, o A es finito o B es finito, entonces se verifica que $A \cap B$ es finito.

La razón de la validez de este principio es que por la propiedad (I_3) $A \cap B \subseteq A$ y por la propiedad (I_4) $A \cap B \subseteq B$. Luego, al ser alguno de los dos finitos, resulta por la propiedad (F_1) vista en la subsección 1.6.1 sobre conjuntos finitos e infinitos, que $A \cap B$ es finito, pues está incluido en un conjunto finito[14].

1.9.2 Principio de adición

Dado un par de conjuntos finitos, digamos A y B, que sean disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$, entonces se verifica que $A \cup B$ es finito y, además, se tiene que

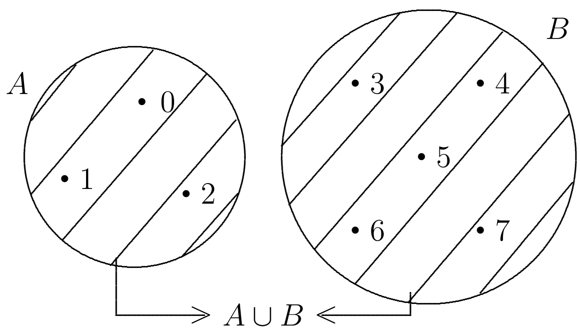
$$\boxed{\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)}\,.$$

Esto quiere decir que *el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos y disjuntos, se obtiene sumando los cardinales de los conjuntos finitos que se unen.*

Ejemplo Consideremos los conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Claramente ambos son finitos y disjuntos, pues $\#(A) = 3$ y $\#(B) = 5$ y, además, $A \cap B = \emptyset$. Luego, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ por lo que tenemos que

$$\#(A \cup B) = 8 = \underbrace{\#(A)}_{3} + \underbrace{\#(B)}_{5}\,.$$

Gráficamente, puede verse la validez del principio:



[14] En donde el conjunto finito puede ser o A o B.

1.9.3 Principio de inclusión-exclusión

Dado un par de conjuntos finitos, digamos A y B, no necesariamente disjuntos, entonces se verifica que $A \cup B$ es finito y que $A \cap B$ es finito también, y además, se tiene que

$$\boxed{\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)}.$$

Esto quiere decir que *el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos pero no necesariamente disjuntos, se obtiene sumando los cardinales de los conjuntos finitos que se unen, menos el cardinal de la interserccción de ambos conjuntos finitos*, puesto que los elementos en común fueron contados dos veces al sumar los cardinales de los dos conjuntos finitos que intervienen.

Ejemplo Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Claramente ambos son finitos, pues $\#(A) = 6$ y $\#(B) = 5$ y, además, $A \cap B \neq \emptyset$, puesto que $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Luego, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ por lo que tenemos que

$$\#(A \cup B) = 8 = \underbrace{\#(A)}_{6} + \underbrace{\#(B)}_{5} - \underbrace{\#(A \cap B)}_{3}.$$

Observación El *Principio de inclusión-exclusión* es una generalización del *Principio de adición*, ya que si A y B son disjuntos resulta que ambos principios coinciden.

1.9.3.1 Propiedades

Cualesquiera sean los conjuntos finitos A y B dentro de un conjunto referencial R, se verifica que:

(I) $\#(A - B) = \#(A) - \#(A \cap B)$.

(II) $\#(A \,\Delta\, B) = \#(A) + \#(B) - 2 \cdot \#(A \cap B)$.

El principio de inclusión-exclusión puede generalizarse para una cantidad finita de conjuntos finitos. Nosotros, solamente vamos a enunciar, el caso cuando se tenga tres conjuntos finitos, no necesariamente disjuntos *tomados de a dos*[15], como se indica a continuación:

Dado tres conjuntos finitos, digamos A, B y C, no necesariamente disjuntos tomados de a dos, entonces se verifica que $A \cup B \cup C$ es finito y que $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ son finitos también, y además, se tiene que

$$\boxed{\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)}.$$

[15]Es decir, que tomando las tres intersecciones posibles de parejas de conjuntos distintos, no todas son iguales a vacío.