Unidad 2

Relaciones y funciones

Usualmente podemos ver que en la televisión, los periódicos o las revistas, se muestra información presentada en forma de gráficos, los cuales nos muestran relaciones entre distintas variables, como puede ser: la recaudación impositiva durante los meses de un año, la esperanza de vida en cada provincia, el crecimiento de una población en un determinado período, la cantidad de casos positivos de contagiados de COVID-19 en un lapso de tiempo, entre otros tantos ejemplos.
Muchas de estas relaciones son funciones; en algunos casos, es posible describirlas a través de fórmulas matemáticas, las cuales permiten predecir el comportamiento o la tendencia del fenómeno que la función describe.
En esta unidad vamos a introducir los conceptos de relaciones y, especialmente, el de funciones, tema de gran importancia en la matemática y en las ciencias aplicadas.

2.1 Par ordenado

Vamos a tomar la noción de *par ordenado*, como un concepto primitivo, es decir, indefinido. Por ello interpretamos como tal, al símbolo, (a, b)[1] que representa al par que tiene en primer lugar a la coordenada a y en segundo lugar a la coordenada b, donde a y b son dos elementos, no necesariamente ambos pertenecientes al mismo conjunto.
En el par ordenado (a, b) tenemos que el elemento a es la *primera coordenada* del par y que el elemento b es la *segunda coordenada* del par.

[1] Que se lee *par ordenado* a, b.

Observaciones

(1) Al citar el par ordenado (a, b), nos referimos a un sólo ente, no a dos.

(2) En el par ordenado (a, b), las coordenadas a y b pueden ser iguales o distintas, esto es, $a = b$ o $a \neq b$. Es más, si $a \neq b$ resulta que

$$(a, b) \neq (b, a) .$$

2.1.1 Igualdad de pares ordenados

Definición Decimos que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \text{ si, y sólo si, se verifica que } a = c \text{ y } b = d,$$

es decir, si sus primeras coordenadas son iguales y las segundas también.

Es claro que, dos pares ordenados son distintos si, y sólo si, sus primeras coordenas son distintas o sus segundas coordenadas son distintas. Esto es,

$$(a, b) \neq (c, d) \text{ si, y sólo si, se verifica que } a \neq c \text{ o } b \neq d.$$

Es decir, si $(a, b) \neq (c, d)$ puede ocurrir que:

(I) $a = c$ y $b \neq d$,

o

(II) $a \neq c$ y $b = d$,

o

(III) $a \neq c$ y $b \neq d$.

Nota La diferencia que hay entre los conceptos de *par ordenado*, y de *pareja desordenada*[2], radica en que en el primero importa el orden de los elementos, mientras que en el segundo no.

Ejemplo Los pares ordenados $(1, 2) \neq (2, 1)$, mientras que las parejas desordenadas $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

[2] Un conjunto formado por dos elementos distintos.

2.2 Producto cartesiano

Definición Dados dos conjuntos A y B, no necesariamente subconjuntos de un mismo referencial. Definimos el *producto cartesiano de A por B*, que simbolizamos con $A \times B$ y que leemos *A por B*, como el conjunto de *pares ordenados* siguiente:

$$A \times B = \Big\{ \underbrace{(x, y)}_{\text{par } x,y} : x \in A \quad \text{e[3]} \quad y \in B \Big\}.$$

Nota La cláusula definitoria del producto cartesiano $A \times B$ es $P(x, y)$: '$x \in A$ e $y \in B$'[4].

Luego, tenemos que:

$$(x, y) \in A \times B \iff^{[5]} x \in A \text{ e } y \in B\,.$$

Por lo que:

$$(x, y) \notin A \times B \iff x \notin A \text{ o } y \notin B\,.$$

2.2.1 Método para realizar un producto cartesiano

Para realizar un producto cartesiano, vamos a proceder como lo indica el siguiente:

Ejemplo Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1\}$, entonces $A \times B$ se calcula de la siguiente manera:

1°) Se construye una tabla de doble entrada como la que se muestra a continuación:

		B	
	$\times$	0	1
A	a		
	b		
	c		

Nota En este caso, A es el primer conjunto y B es el segundo en el producto cartesiano.

[3] El conector lingüístico "e" se usa en lugar de "y", debido a que la siguiente expresión o palabra comienza con i o con y, pero con fonética de vocal.

[4] En este caso, la cláusula es un enunciado de pertenencia conjuntista en la que intervienen dos variables.

[5] La flecha bidireccional $\iff$ se utiliza para simbolizar a la frase *si, y sólo si*, queriendo decir que las expresiones o los enunciados ubicados a ambos lados "significan lo mismo" matemáticamente.

2°) Se forman los pares ordenados tomando como primera coordenada un elemento del primer conjunto, y como segunda coordenada un elemento del segundo conjunto. Obteniendo una tabla como la que sigue:

		B	
	$\times$	0	1
A	a	$(a,0)$	$(a,1)$
	b	$(b,0)$	$(b,1)$
	c	$(c,0)$	$(c,1)$

3°) Finalmente, representamos por extensión al conjunto $A \times B$. En este caso, resulta que

$$A \times B = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}\,.$$

2.2.1.1 Propiedad

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, no necesariamente subconjuntos del mismo referencial. Si $\#(A) = n$ y $\#(B) = m$, entonces $\#(A \times B) = n \cdot m$.

Nota Es fácil ver que,

$$\#(A \times B) = \#(B \times A).$$

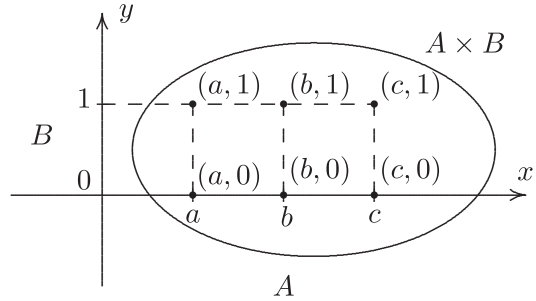
Ejemplo Si continuamos con el ejemplo dado previamente, tenemos que $\#(A) = 3$ y $\#(B) = 2$ resultando que $\#(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$, que es la cantidad de pares ordenados que tiene el producto cartesiano $A \times B$.

2.2.2 Representación gráfica de un producto cartesiano

Para representar a un producto cartesiano gráficamente, vamos a utilizar un sistema de ejes de coordenadas cartesianas o rectangulares.

Los elementos del primer conjunto del producto cartesiano se colocan sobre el eje horizontal o *eje de las abscisas*, comúnmente denotado como eje x, y los del segundo conjunto se colocan sobre el eje vertical o *eje de las ordenadas*, comúnmente denotado como eje y.

Ejemplo Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1\}$, tenemos que el producto cartesiano encontrado anteriormente es $A \times B = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$. Para representarlo gráficamente procedemos de la siguiente manera:



Observaciones

(1) Si alguno de los conjuntos es o ambos son el conjunto vacío, entonces $A \times B = \emptyset$, y viceversa, esto es,

$$A = \emptyset \quad \text{o} \quad B = \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \times B = \emptyset\,,$$

y por lo tanto, no tiene representación gráfica.

Luego, un producto cartesiano de conjuntos es distinto de vacío si, y sólo si, los conjuntos que intervienen en el producto cartesiano son ambos no vacíos. En símbolos,

$$A \times B \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B \neq \emptyset\,.$$

(2) Si $A = B$, resulta que $A \times B = A \times A$, que vamos a denotar como A^2, esto es,

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \,:\, x \in A \ \text{ e } \ y \in A\} = \{(x, y) \,:\, x, y \in A\}\,.$$

2.3 Relaciones

2.3.1 Relación entre elementos de dos conjuntos

Definición Dados dos conjuntos A y B, llamamos *relación entre los elementos de A con los de B* o simplemente *relación de A con B*, a cualquier subconjunto $\mathcal{R}$[6]. del producto cartesiano $A \times B$. En símbolos,

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ es relación de } A \text{ con } B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R} \subseteq A \times B}\,.$$

De este modo,

$$\boxed{\text{para todo } \overline{x}, \text{ si } \overline{x} \in \mathcal{R} \text{ entonces existen } x \in A, y \in B \text{ tal que } \overline{x} = (x, y)}^{\,7}.$$

[6] Generalmente vamos a utilizar las *letras mayúsculas cursivas*: $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \ldots$ o la $\mathcal{R}$ subindexada: $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \ldots$ para indicar relaciones.

[7] Con esto queremos decir que elemento $\overline{x}$ representa al par ordenado $(x, y) \in \mathcal{R}$.

2.3.2 Conjunto de partida y conjunto de llegada

En una relación $\mathcal{R}$ llamamos *conjunto de partida* al primer conjunto del producto cartesiano y *conjunto de llegada* al segundo conjunto del producto cartesiano. Luego, si $\mathcal{R}$ es una relación de A con B, es decir, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ entonces el conjunto de partida es A y el conjunto de llegada es B.

Ejemplos Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$. Tenemos que el producto cartesiano $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$.

Luego, son relaciones de A con B los siguientes *subconjuntos* de $A \times B$:

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x = y\}$ (por comprensión). O bien:

$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ (por extensión).

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y = 3\}$ (por comprensión). O bien:

$\mathcal{R}_2 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ (por extensión).

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x = y \text{ o } x + y = 3\}$ (por comprensión). O bien:

$\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ (por extensión).

(d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x > y\}$ (por comprensión). O bien:

$\mathcal{R}_4 = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$ (por extensión).

(e) $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, y = 0\}$ (por comprensión). O bien:

$\mathcal{R}_5 = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$ (por extensión).

(f) $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x = y \text{ y } x + y = 2\}$ (por comprensión). O bien:

$\mathcal{R}_6 = \{(1, 1)\}$ (por extensión).

pues todas ellas están incluidas en el producto cartesiano $A \times B$, esto es,

$$\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B\,,\ \mathcal{R}_2 \subseteq A \times B\,,\ \mathcal{R}_3 \subseteq A \times B\,,\ \mathcal{R}_4 \subseteq A \times B\,,\ \mathcal{R}_5 \subseteq A \times B \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_6 \subseteq A \times B\,.$$

Observación Existen dos relaciones de A con B especiales, que claramente están incluidas en $A \times B$:

- la relación $\mathcal{R}_0 = \emptyset$, llamada *relación vacía*, y
- la relación $\mathcal{R}_T = A \times B$, llamada *relación total*, puesto que tiene a todos los pares ordenados del producto cartesiano $A \times B$.

2.3.3 Representación cartesiana

Toda relación $\mathcal{R}$ de A con B puede representarse gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas. Puesto que cada *par ordenado* (x, y) de $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ representa a un *punto* en el plano cartesiano, estos pueden marcarse con la ayuda de los famosos ejes cartesianos.

Ejemplo Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$. Consideremos la relación $\mathcal{R}$ de A con B, dada por comprensión:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y = 3\}\,,$$

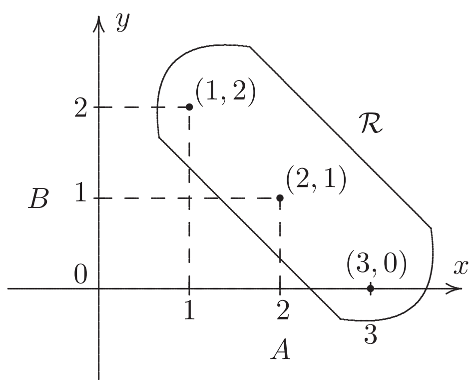
esto es, si $(x, y) \in A \times B$ resulta que:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \text{si, y sólo si,} \quad x + y = 3\,.$$

Luego, por extensión, tenemos que:

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0)\}\,.$$

Gráficamente, tenemos que:



2.3.4 Diagrama de flechas

Un recurso didáctico para representar gráficamente una relación $\mathcal{R}$ de un conjunto con otro conjunto es a través de un *diagrama de flechas*, que consiste en dibujar los diagramas de Venn de los dos conjuntos que están en relación, uno al lado del otro, el conjunto de partida a la izquierda y el conjunto de llegada a la derecha, indicando sus elementos con un *afijo* ($\bullet$) dentro del *óvalo* que representa a cada conjunto y uniendo con *flechas* los elementos de ambos según los pares ordenados que pertenecen a la relación que se está graficando, verificándose que:

$$\boxed{(x, y) \in \mathcal{R} \iff x \bullet \xrightarrow{\mathcal{R}} \bullet\, y}\,.$$

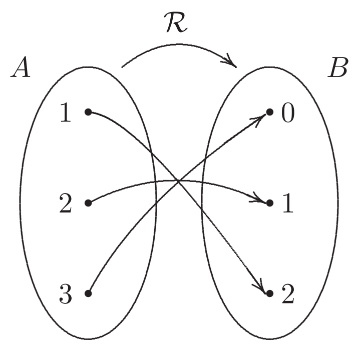
Ejemplo Continuando con la relación $\mathcal{R}$ del ejemplo anterior, definida sobre los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$. Tenemos que, por comprensión:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \, : \, x + y = 3\}$$

y por extensión:

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0)\} \, .$$

Luego, el diagrama de flecha de la relación $\mathcal{R}$ es:



2.3.5 Dominio, rango y codominio

Definiciones Dada $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, es decir, una relación $\mathcal{R}$ de A con B, llamamos:

– *dominio de* $\mathcal{R}$, que simbolizamos $dom(\mathcal{R})$, al subconjunto de A definido de la siguiente manera:

$$\boxed{dom(\mathcal{R}) = \{x \in A \, : \, (\underline{x}, y) \in \mathcal{R}\}} \, .$$

Esto es, *el dominio es el conjunto formado por los elementos del conjunto de partida que son primeras coordenadas de los pares ordenados que están en la relación*, no necesariamente <u>todo</u> el conjunto de partida. Gráficamente, en una relación representada en diagrama de flechas, *el dominio es el conjunto formado por los elementos del primer conjunto de los cuales parten flechas.*

– *rango de* $\mathcal{R}$, que simbolizamos $ran(\mathcal{R})$, al subconjunto de B definido de la siguiente manera:

$$\boxed{ran(\mathcal{R}) = \{y \in B \, : \, (x, \underline{\underline{y}}) \in \mathcal{R}\}} \, .$$

Esto es, *el rango es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que son segundas coordenadas de los pares ordenados que están en la relación.* Gráficamente, en una relación representada en diagrama de flechas, *el rango es el conjunto formado por los elementos del segundo conjunto a los cuales llegan flechas.*

– *codominio de* $\mathcal{R}$, que simbolizamos $cod(\mathcal{R})$, al conjunto B, es decir,

$$\boxed{cod(\mathcal{R}) = B}\,.$$

Esto es, *el codominio es el conjunto de llegada.*

Observaciones Dada una relación $\mathcal{R}$ de A con B, esto es, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. En general, tenemos que:

(1) $dom(\mathcal{R}) \subseteq A$ y $ran(\mathcal{R}) \subseteq cod(\mathcal{R}) = B$.

(2) Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces $x \in dom(\mathcal{R})$ e $y \in ran(\mathcal{R})$.

(3) De lo indicado en (2), tenemos que se verifica que

$$\mathcal{R} \subseteq dom(\mathcal{R}) \times ran(\mathcal{R})\,.$$

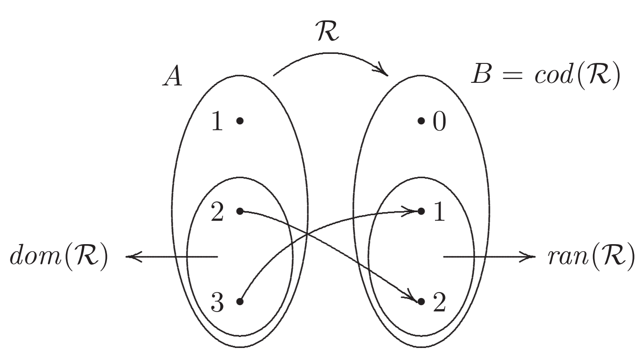
Ejemplo Dada la relación $\mathcal{R}$ definida entre los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ con los del conjunto $B = \{0, 1, 2\}$. Por comprensión:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x + y = 4\}$$

y por extensión:

$$\mathcal{R} = \{(\underline{2}, \underline{\underline{2}}), (\underline{3}, \underline{\underline{1}})\}\,.$$

Realizando el diagrama de flecha de la relación $\mathcal{R}$:



Por lo tanto,

$$dom(\mathcal{R}) = \{\underline{2}, \underline{3}\}\,, \quad ran(\mathcal{R}) = \{\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{2}}\} \quad \text{y} \quad cod(\mathcal{R}) = B = \{0, 1, 2\}\,.$$

2.3.6 Composición de relaciones

Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones, llamamos *composición de* $\mathcal{R}$ *con* $\mathcal{S}$, que simbolizamos con $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ [8], a la relación definida del siguiente modo:

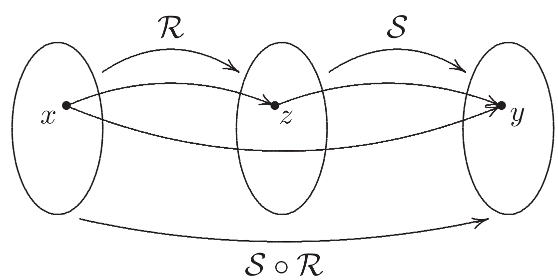
$$(x, y) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \iff \text{existe } z \text{ tal que } (x, z) \in \mathcal{R} \text{ y } (z, y) \in \mathcal{S}\,.$$

Si $(x, y) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, entonces el elemento z que existe, de manera que $(x, z) \in \mathcal{R}$ y $(z, y) \in \mathcal{S}$ claramente se verifica que $z \in ran(\mathcal{R})$ y $z \in dom(\mathcal{S})$, es decir,

$$z \in ran(\mathcal{R}) \cap dom(\mathcal{S})\,.$$

Nota El elemento z es aquel que *conecta* al elemento x con el elemento y.

Un diagrama que representa la idea de la composición de $\mathcal{R}$ con $\mathcal{S}$ es el siguiente:



Ejemplo Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ y $C = \{0, 1, 2, 3\}$. Consideremos las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ definidas, por comprensión, como sigue:

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : x + y = 4\}$ y $\mathcal{S} = \{(x, y) \in B \times C : x + y = 3\}$. Hallemos $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ y $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Por extensión, tenemos que ambas relaciones están formadas por los siguientes listados de pares ordenados:

$$\mathcal{R} = \{(2, \underline{\underline{2}}), (3, \underline{1}), (4, \mathbf{0})\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \{(\mathbf{0}, 3), (\underline{1}, 2), (\underline{\underline{2}}, 1)\}$$

Luego, tenemos que:

- $(2, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, puesto que existe $\underline{\underline{2}}$ tal que $(2, \underline{\underline{2}}) \in \mathcal{R}$ y $(\underline{\underline{2}}, 1) \in \mathcal{S}$.

- $(3, 2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, puesto que existe $\underline{1}$ tal que $(3, \underline{1}) \in \mathcal{R}$ y $(\underline{1}, 2) \in \mathcal{S}$.

- $(4, 3) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, puesto que existe $\mathbf{0}$ tal que $(4, \mathbf{0}) \in \mathcal{R}$ y $(\mathbf{0}, 3) \in \mathcal{S}$.

[8] Que se lee: "$\mathcal{R}$ *compuesta con* $\mathcal{S}$", en el sentido inverso de como se escribe.

Así,

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}\,.$$

En cambio,

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(1,2),(0,1)\}\,,$$

puesto que:

- $(1,2) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, debido a que existe 2 tal que $(1,2) \in \mathcal{S}$ y $(2,2) \in \mathcal{R}$.
- $(0,1) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, debido a que existe 3 tal que $(0,3) \in \mathcal{S}$ y $(3,1) \in \mathcal{R}$.

Del ejemplo anterior, podemos ver que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Observaciones

(1) En general, se tiene que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

(2) Si consideramos las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, podemos decir que:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \emptyset \iff ran(\mathcal{R}) \cap dom(\mathcal{S}) \neq \emptyset.$$

Por lo que,

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \emptyset \iff ran(\mathcal{R}) \cap dom(\mathcal{S}) = \emptyset\,.$$

(3) $dom(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq dom(\mathcal{R}) \quad \text{y} \quad ran(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq ran(\mathcal{S})\,.$

2.4 Funciones

2.4.1 Función de un conjunto en otro

Las funciones son un caso especial de relaciones, como vamos a ver a continuación, por lo que los conceptos de dominio, rango y codominio pueden ser aplicados sin ningún problema.

Definición Una *función* f [9] de un conjunto en otro es una correspondencia que asigna a todo elemento x del conjunto de partida, un único elemento y del conjunto de llegada, mediante una fórmula o expresión que denotamos con $f(x)$. A la variable x la llamamos *variable independiente*, y a la variable y la llamamos *variable dependiente*, porque depende de x.

[9] Generalmente vamos a utilizar las *letras minúsculas imprentas*: $f, g, h, \ldots$ o la f subindexada: $f_1, f_2, f_3, \ldots$ para indicar funciones.

Más formalmente, una función es una *relación* de un conjunto en otro que verifica las condiciones de *existencia* y *unicidad*. En símbolos, dados dos conjuntos A y B, decimos que f que va de A en B es una función, que simbolizamos $f : A \longrightarrow B$ [10] si, y sólo si, se cumple que:

(I) Relación f es una relación de A con B, es decir, $\boxed{f \subseteq A \times B}$[11].

Y además f cumple las condiciones de:

(II) Existencia Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, es decir,

$$\boxed{dom(f) = A}.$$

Luego, cuando *el dominio coincida con el conjunto de partida* decimos que f cumple la existencia.

(III) Unicidad Para todo $x \in dom(f)$, si $(x, y) \in f$ y $(x, y') \in f$ entonces $y = y'$, es decir, *todo elemento del dominio tiene uno y sólo un correspondiente en el codominio.*

Gráficamente, en un diagrama de flecha, debe suceder que *de cada elemento del dominio parte una única flecha hacia el codominio.* Cuando esto ocurra decimos que f cumple la unicidad.

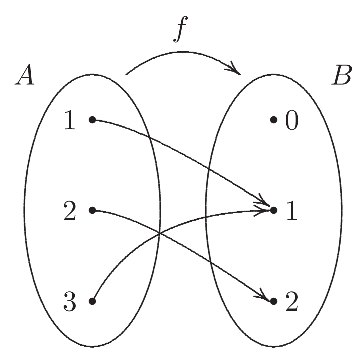
Ejemplo Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$, consideremos:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \,:\, x = y \;\text{ o }\; x + y = 4\} \text{ (por comprensión).}$$

Por extensión:

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Y su diagrama de flecha es:



Veamos que, f es una función de A en B. En efecto:

[10]Que se interpreta como que f se *aplica* de A en B. Por esto, a una función también se le suele llamar *aplicación*.
[11]Puesto que f es una relación, resulta que podemos hablar de $dom(f)$, $ran(f)$ y $cod(f)$.

(I) Relación Es claro que, $f \subseteq A \times B$, es decir, f es una relación de A con B.

(II) Existencia Con la ayuda del diagrama de flechas hallemos $dom(f)$.

Los elementos de A de donde parten flechas son: 1, 2 y 3. Esto es,

$$dom(f) = \{1, 2, 3\} = A\,.$$

Entonces f cumple la *condición de existencia*.

(III) Unicidad Como puede verse claramente en el diagrama de flechas, *de cada elemento del dominio parte una y sólo una flecha hacia el codominio.* Luego f cumple la *condición de unicidad.*

Por lo tanto, $f : A \longrightarrow B$.

Observación Si $f : A \longrightarrow B$, entonces tenemos que:

$$\boxed{dom(f) = A} \quad \text{e} \quad \boxed{ran(f) \subseteq cod(f) = B}\,.$$

Recordar que:

$f \subseteq A \times B$ es una *función* de A en B, si a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.

Obviamente, para que una *relación* de un conjunto en otro *no sea función* debe fallar la existencia o la unicidad o ambas al mismo tiempo. Luego,

– cuando *el dominio no sea igual al conjunto de partida* decimos que *falla o no se cumple la existencia*,

o

– cuando *exista al menos un elemento del dominio que tenga dos o más correspondientes distintos en el codominio* decimos que *falla o no se cumple la unicidad.* Gráficamente, en un diagrama de flechas, si hay al menos un elemento x del dominio tal que

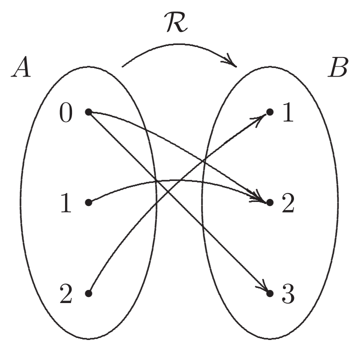
$$\begin{tikzcd} & y' \arrow[d, phantom, "\neq"] \\ x \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & \\ & y \end{tikzcd}$$

entonces no se cumple la unicidad.

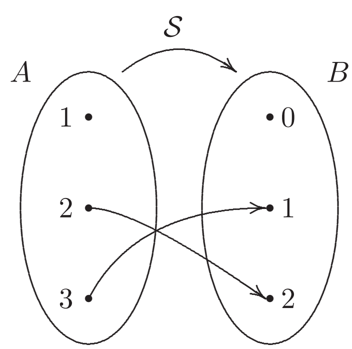
En cualquiera de los dos casos, decimos que no es función.

Ejemplos Sean los conjuntos $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{1,2,3\}$. Consideremos las siguientes relaciones de A en B.

(a) $\mathcal{R} = \{(0,2),(1,2),(2,1),(0,3)\}$. Luego, resulta que $\mathcal{R}$ no es una función, si bien cumple con la condición de existencia, debido a que $dom(\mathcal{R}) = \{0,1,2\} = A$; tenemos que no cumple con la condición de unicidad, pues $(0,2) \in \mathcal{R}$, $(0,3) \in \mathcal{R}$ y sin embargo, $2 \neq 3$ en el conjunto B [12]. Gráficamente:



(b) $\mathcal{S} = \{(2,2),(3,1)\}$. Luego, resulta que $\mathcal{S}$ no es una función, pues no cumple con la condición de existencia, debido a que $dom(\mathcal{S}) = \{2,3\} \neq A$; sin embargo cumple con la condición de unicidad, ya que *de cada elemento del dominio sale una y sólo una flecha hacia el codominio.* Gráficamente:



Nota Cuando una relación $\mathcal{R}$ de A en B verifique las condiciones de existencia y unicidad, vamos a tener que $\mathcal{R}$ es una función, por lo que en lugar de $\mathcal{R}$ vamos a colocar f, para así decir $f : A \longrightarrow B$, esto es, f es una función de A en B.

2.4.2 Imagen y preimagen de un elemento

Definición Sea $f : A \longrightarrow B$, es decir, f es una función de A en B. Para cada elemento $x \in A$, llamamos *imagen de x por medio de f*, y que simbolizamos con $f(x)$ [13] al elemento $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$. De ahora en adelante, vamos a poner

[12] Esto es, el elemento 0 de A tiene dos correspondientes distintos en B, a saber 2 y 3.

[13] Donde el símbolo $f(x)$ se lee: *“f de x”*.

$$\boxed{y = f(x)},$$

en lugar de la notación como par ordenado, significando que *"y es la imagen de x por medio de f"*, o en sentido inverso que *x es preimagen de y por medio de f*.

Nota En la forma simbólica $f(\square)$, a la expresión o al valor numérico que se encuentra entre "paréntesis" ( ) luego de indicar a la función, en el lugar de $\square$, se le llama *argumento*.

Ejemplo Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos la función de A en B

$$f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 2)\},$$

esto es, $f : A \longrightarrow B$.

Por la definición previa tenemos que:

$$1 = f(0),\ 3 = f(1),\ 2 = f(2),\ 4 = f(3),\ 2 = f(4).$$

Así, 1 es la imagen de 0 por medio de f, 3 es la imagen de 1 por medio de f, 2 es la imagen de 2 por medio de f, 4 es la imagen de 3 por medio de f, y 2 es la imagen de 4 por medio de f. Y en sentido inverso, tenemos que 0 es preimagen de 1 por medio de f, 1 es preimagen de 3 por medio de f, 2 y 4 son preimágenes de 2 por medio de f, y 3 es preimagen de 4 por medio de f.

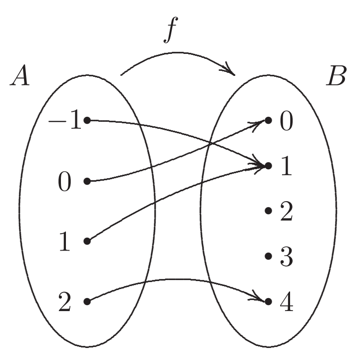
Observación La imagen de un elemento es única, por la unicidad. En cambio, la preimagen de un elemento no siempre lo es.

2.4.3 Distintas maneras de representar funciones

Dados los conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Consideremos

$$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\},$$

cuyo diagrama de flechas es el siguiente:



Claramente f cumple con las condiciones de existencia y unicidad. Por lo tanto, $f : A \longrightarrow B$.

Además de su representación por diagrama de flechas y su representación cartesiana, existen otras maneras en las que puede representarse a la función f, a saber:

(I) <u>*Fórmula definitoria:*</u> En este caso, $f : A \longrightarrow B$ está definida por:

$$f(x) = x^2 \text{ , para todo } x \in A.$$

Esto es, para cualquier $x \in A$ se define que $y = \underbrace{x^2}_{f(x)}$.

(II) <u>*Tabla de valores:*</u> En este caso, $f : A \longrightarrow B$ está definida por:

x	$y = \overbrace{x^2}^{f(x)}$
-1	1
0	0
1	1
2	4

(III) <u>*Cuadro de valores:*</u> En este caso, $f : A \longrightarrow B$ está definida por:

x	-1	0	1	2
$\underbrace{f(x)}_{y=x^2}$	1	0	1	4

(IV) <u>*Llave definitoria:*</u> En este caso, $f : A \longrightarrow B$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \{0,1\} \\ x+2 & \text{si} \quad x \in \{-1,2\} \end{cases} {}^{14}.$$

Así, si $x = 0$ o $x = 1$, tenemos que $f(x) = x$, es decir, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. En cambio, si $x = -1$ o $x = 2$, tenemos que $f(x) = x + 2$, es decir, $f(-1) = -1 + 2 = 1$ y $f(2) = 2 + 2 = 4$.

2.4.4 Imagen y preimagen de un conjunto

Definiciones Sean A y B dos conjuntos no vacíos y sea $f : A \longrightarrow B$, es decir, f es una función de A en B, donde $A = dom(f)$ y $B = cod(f)$. Consideremos los conjuntos X e Y tales que $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Definimos

– la *imagen de* X *por medio de* f, como el conjunto:

$$f(X) = \{f(x) \in B \, : \, x \in X\} .$$

y

[14] Que $x \in \{0,1\}$ significa que $x = 0$ o $x = 1$, y que $x \in \{-1,2\}$ significa que $x = -1$ o $x = 2$.

– la *preimagen de Y por medio de f*, como el conjunto:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Claramente, $f(X) \subseteq B$ y $f^{-1}(Y) \subseteq A$.

Observaciones

(1) $f(A) = f(dom(f)) = ran(f)$, es decir, la imagen del dominio por medio de la función es el rango de la función.

(2) $f^{-1}(ran(f)) = dom(f) = A$, es decir, la preimagen del rango por medio de la función es el dominio de la función.

2.4.4.1 Propiedades

Sea $f : A \longrightarrow B$. Para cualesquiera sean X y X' subconjuntos de A y para cualesquiera sean Y y Y' subconjuntos de B, se verifican que:

(F_1) Para cualquier $x \in A$, $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

(F_2) Para cualquier $y \in B$, $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : y = f(x)\}$.

(F_3) $f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$, para cualquier conjunto finito

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A.$$

(F_4) $f(\emptyset) = \emptyset \quad$ y $\quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(F_5) $X \subseteq f^{-1}(f(X)) \quad$ y $\quad f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(F_6) Si $X \subseteq X'$ entonces $f(X) \subseteq f(X')$.

(F_7) Si $Y \subseteq Y'$ entonces $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$.

(F_8) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X') \quad$ y $\quad f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$ [15].

(F_9) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y') \quad$ y $\quad f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$.

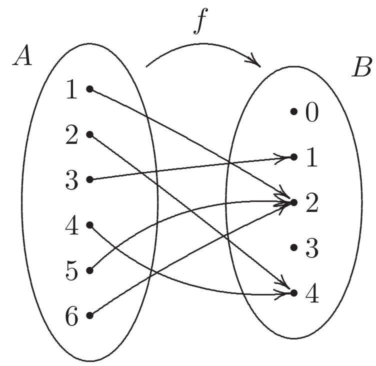
Observación Al aplicar la propiedad (F_3) hay que tener en cuenta que si hay elementos distintos que tengan imágenes que sean iguales, se coloca sólo una de las imágenes, puesto que en la representación por extensión de un conjunto no se repiten los elementos.

[15] La igualdad sólo se cumple si la función es *inyectiva*, que es un tipo de función que se verá en la subsección 2.4.6.

Ejemplo Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Consideremos $f : A \longrightarrow B$ cuyo cuadro de valores es el siguiente:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	1	4	2	2

y su diagrama de flecha es:



Así, tenemos que

$$A = dom(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ f(A) = ran(f) = \{1, 2, 4\} \text{ y } B = cod(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}\,.$$

Consideremos los siguientes subconjuntos de A:

$$X_1 = \{1, 2, 3\},\ X_2 = \{1, 5\} \quad \text{y} \quad X_3 = \{3, 4\}\,.$$

Utilizando la definición y las propiedades previas, hallemos $f(X_1)$, $f(X_2)$ y $f(X_3)$.

$$f(X_1) = \{f(x) \in B \,:\, x \in \{1, 2, 3\}\} = \{f(x) \in B \,:\, x = 1 \text{ o } x = 2 \text{ o } x = 3\} =$$

$$= \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 4, 1\}\,,$$

$$f(X_2) = \{f(1), f(5)\}^{16} = \{2\} \quad \text{y} \quad f(X_3) = f(\{3, 4\}) = \{1, 4\}\,.$$

Por lo tanto,

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) = \{2, 4, 1\} \cup \{2\} = \{1, 2, 4\}$$

y

$$f(X_1 \cap X_3) = f(\{3\}) = \{f(3)\} = \{1\}\,.$$

Por otra parte, consideremos los siguientes subconjuntos de B:

$$Y_1 = \{0, 1, 4\},\ Y_2 = \{0, 3\} \quad \text{e} \quad Y_3 = \{2, 4\}\,.$$

[16] Las imágenes de 1 y 5 por medio de f son iguales.

Utilizando la definición y las propiedades previas, hallemos $f^{-1}(Y_1)$, $f^{-1}(Y_2)$ y $f^{-1}(Y_3)$.

$$f^{-1}(Y_1) = \{x \in A : f(x) \in \{0,1,4\}\} = \{x \in A : f(x) = 0 \text{ o } f(x) = 1 \text{ o } f(x) = 4\} =$$

$$= \{x \in A : f(x) = 0\} \cup \{x \in A : f(x) = 1\} \cup \{x \in A : f(x) = 4\} =$$

$$= f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(\{4\}) = \emptyset \cup \{3\} \cup \{4\} = \{3,4\}\,,$$

$$f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{3\}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \quad \text{y} \quad f^{-1}(Y_3) = \{1,2,4,5,6\}\,.$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) = \{3,4\} \cup \emptyset = \{3,4\}$$

y

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_3) = f^{-1}(\{4\}) = \{2,4\}\,.$$

2.4.5 Funciones especiales

Definiciones Dados los conjuntos no vacíos A y B. Llamamos

(i) *función constante* a $f : A \longrightarrow B$, definida por:

$$f(x) = c\,, \text{ para todo } x \in A\,,$$

con $c \in B$ un elemento fijo, llamado *constante*. Es decir, f es constante si todos los elementos del dominio de f tienen la misma imagen.

(ii) *función identidad en* A a $i_A : A \longrightarrow A$, definida por:

$$i_A(x) = x\,, \text{ para todo } x \in A\,.$$

Esto es, la función identidad en un conjunto es la relación de igualdad entre los elementos del mismo conjunto, a saber:

$$i_A = \{(x,y) \in A \times A : y = x\}\,,$$

o bien,

$$i_A = \{(x,x) : x \in A\}\,.$$

(*iii*) *función primera proyección* a $p_1 : A \times B \longrightarrow A$, definida por:

$$p_1((x, y)) = x\,, \text{ para todo } (x, y) \in A \times B\,.$$

(*vi*) *función segunda proyección* a $p_2 : A \times B \longrightarrow B$, definida por:

$$p_2((x, y)) = y\,, \text{ para todo } (x, y) \in A \times B\,.$$

(*v*) *función característica* de X, a la $\mathcal{X}_X : A \to \{0, 1\}$, definida por:

$$\mathcal{X}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in X \\ 0 & \text{si} \quad x \in A - X \end{cases},$$

con $X \subseteq A$. Es decir, la función característica de un conjunto dado nos indica si el elemento del dominio pertenece o no pertenece a dicho conjunto[17].

Ejemplo Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Para el conjunto $X = \{1, 3, 4\}$, que es un subconjunto de A, consideremos su función característica. Esto es, $\mathcal{X}_X : A \to \{0, 1\}$.
De la definición (v) previa, resulta que su cuadro de valores es:

x	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{X}_X(x)$	0	1	0	1	1	0

Esto es, $\mathcal{X}_X(0) = 0$, porque $0 \in A - X = \{0, 2, 5\}$ y $\mathcal{X}_X(3) = 1$, pues $3 \in X = \{1, 3, 4\}$, y así con el resto de los elementos de A.

2.4.6 Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definiciones Dada $f : A \longrightarrow B$ decimos que:

– f es *inyectiva* o bien *uno a uno* $\iff$ $\boxed{\text{para todo } x, x' \in A\,, \text{ si } x \neq x' \text{ entonces } f(x) \neq f(x')}$.

Es decir, *a cualquier pareja de elementos distintos del dominio, le corresponden imágenes distintas del rango.*

[17] Con 1 se indica que es *verdad* que pertenece al conjunto, y con 0 se indica que es *falso* que pertenece, ya que en realidad pertenece al dominio pero no al conjunto.

Gráficamente, en un diagrama de flechas, si en todos los casos que tengamos $x, x' \in A$, con $x \neq x'$ sucede que tenemos:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] \arrow[d, phantom, "\neq"] & f(x') \arrow[d, phantom, "\neq"] \\ x' \arrow[r, bend left] & f(x) \end{tikzcd}$$

Si se cumple esto, decimos también que f es *inyectiva* o bien *unívoca*.

– f es *sobreyectiva* o bien *suryectiva* $\iff$ $\boxed{ran(f) = cod(f)}$, es decir, $ran(f) = B$. Esto significa que, *todo elemento del codominio es la imagen de algún elemento del dominio de la función.*

– f es *biyectiva* o bien *biunívoca* $\iff$ f es inyectiva y sobreyectiva.

Observación Que $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva significa que *cada elemento del rango de f es exclusivo de un elemento del dominio*, por esta razón se dice que es *uno a uno*.

De acuerdo a lo dicho anteriormente, $f : A \longrightarrow B$ no es inyectiva, cuando *existan dos elementos distintos del dominio que tengan la misma imagen.* En símbolos, si existen $x, x' \in A$, con $x \neq x'$ tal que $f(x) = f(x')$.
Gráficamente, si existen *flechas* que parten de $x, x' \in A$, siendo $x \neq x'$, de manera que en el diagrama tengamos:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\neq"] & \\ & f(x) = f(x') \\ x' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, f no es inyectiva.

Por otra parte, $f : A \longrightarrow B$ no es sobreyectiva si, y sólo si,

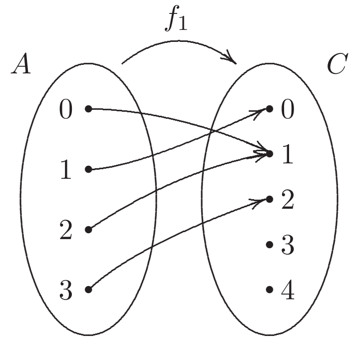
$$ran(f) \neq cod(f) = B\,.$$

Esto es, cuando existe al menos un elemento del codominio, el cual no es imagen de ningún elemento del dominio de la función, es decir, cuando $ran(f) \subset cod(f) = B$.

Finalmente, $f : A \longrightarrow B$ no es biyectiva si, y sólo si, no es inyectiva o no es sobreyectiva, es decir, falla alguna de las dos: o la inyectividad o la sobreyectividad.

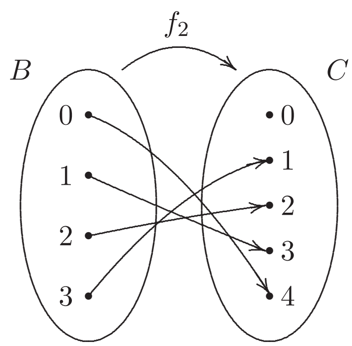
Ejemplos Sean los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Luego, tenemos que:

(*a*) $f_1 : A \longrightarrow C$ definida según muestra el siguiente diagrama de flechas



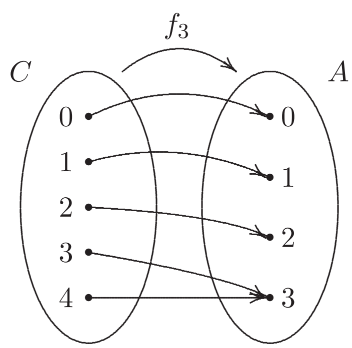
no es inyectiva ni sobreyectiva, y por lo tanto no es biyectiva.

(*b*) $f_2 : B \longrightarrow C$ definida según muestra el siguiente diagrama de flechas



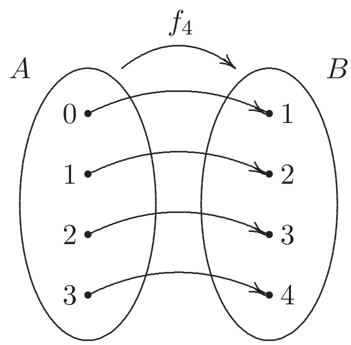
es inyectiva, pero no es sobreyectiva, y por lo tanto no es biyectiva.

(*c*) $f_3 : C \longrightarrow A$ definida según muestra el siguiente diagrama de flechas



es sobreyectiva, pero no es inyectiva, y por lo tanto no es biyectiva.

(*d*) $f_4 : A \longrightarrow B$ definida según muestra el siguiente diagrama de flechas



es inyectiva y sobreyectiva, y por lo tanto es biyectiva.

Observación Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva, pero no sobreyectiva siempre es posible restringir[18] el codominio de f que es B, a su rango que es $f(A)$, esto es, se puede considerar $f : A \longrightarrow f(A)$ resultando que esta última es biyectiva.

Ejemplos Para cualquier conjunto no vacío A, tenemos que

(*a*) $f : A \longrightarrow \wp(A)$ definida por:

$$f(x) = \{x\},$$

para todo $x \in A$, es inyectiva. O sea que $f : A \longrightarrow f(A)$ definida por: $f(x) = \{x\}$, para todo $x \in A$, es biyectiva, puesto que el rango de f es

$$f(A) = \Big\{\{x\} : x \in A\Big\} \subseteq \wp(A).$$

(*b*) La función identidad en A, que denotamos con i_A, es biyectiva.

2.4.6.1 Propiedades

Sean los conjuntos no vacíos A y B, y sea $f : A \longrightarrow B$. Entonces se verifica que:

(B_1) si f es inyectiva, entonces $\#(A) \leqslant \#(B)$.

(B_2) si f es sobreyectiva, entonces $\#(A) \geqslant \#(B)$.

(B_3) si f es biyectiva, entonces $\#(A) = \#(B)$.

[18]Es decir, reducir o achicar el conjunto a uno de sus subconjuntos.

2.4.7 Función invertible

Definición Decimos que $f : A \longrightarrow B$ es *invertible* o que *admite inversa*, si f es inyectiva.

Observación Si $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva, obviamente f es invertible o admite inversa, puesto que f es inyectiva y sobreyectiva.

2.4.8 Función inversa

Debido a que cualquier función inyectiva puede transformarse en una función biyectiva restringiendo el codominio a su rango, vamos a definir función inversa para cualquier función que sea biyectiva, como sigue:

Definición Sea $f : A \longrightarrow B$ biyectiva[19], y por lo tanto, invertible. Llamamos *función inversa de f*, que denotamos f^{-1}, a la función que asigna a cada $x \in B$, un único $y \in A$, es decir, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ de manera que:

$$y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x\,.$$

Observación La función inversa de una función f biyectiva también es biyectiva, y verificando que

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}\,,$$

esto es, la función inversa de la inversa de la función f es f.

Nota No confundir el símbolo $f^{-1}(a)$ que representa a la *imagen de a por medio de f^{-1}* con el símbolo $f^{-1}(\{a\})$, cuando represente a la *imagen del conjunto unitario $\{a\}$ por medio de f^{-1}*, cuando f admita función inversa que denotamos f^{-1}. Y tampoco debe confundirse con el símbolo $f^{-1}(\{a\})$, cuando represente a la *preimagen del conjunto unitario $\{a\}$ por medio de f*, independientemente de que f admita o no inversa.

Ejemplo Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sea $f : A \longrightarrow B$ definida por:

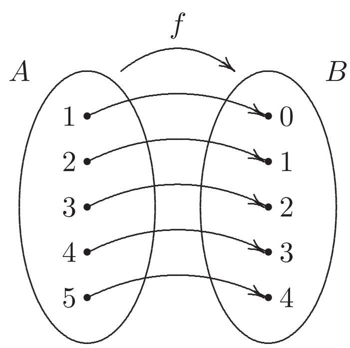
$$f(x) = x - 1\,,$$

para todo $x \in A$. Luego su tabla de valores es:

[19] Si f es inyectiva, pero no sobreyectiva, entonces vamos a considerar $f : A \longrightarrow f(A)$ que resulta ser biyectiva.

x	$y = \overbrace{x-1}^{f(x)}$
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

Veamos que f es biyectiva, con la ayuda de su diagrama de flechas. En efecto:



Claramente tenemos que f es una función *uno a uno*, es decir, f es inyectiva. Además, es fácil ver que $ran(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\} = cod(f) = B$, esto es, f es sobreyectiva. De esta manera, $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva, y por lo tanto, f es invertible. Encontremos ahora su inversa, esto es, f^{-1} tal que

$$y = f^{-1}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(y) = x\,.$$

Puesto que $f(x) = x - 1$, para todo $x \in A$, entonces si hacemos un *cambio de variable* intercambiando y con x[20], resulta que:

$$f(y) = y - 1\,,$$

para todo $y \in A$, con lo que tenemos que:

$$y = f^{-1}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{y-1}_{f(y)} = x\,.$$

Despejando y de la igualdad de la derecha, obtenemos que:

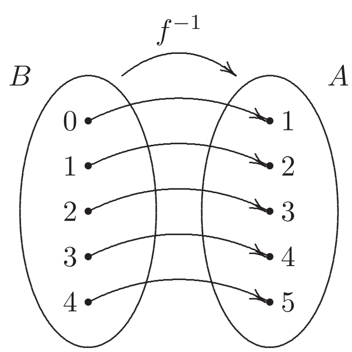
$$y = f^{-1}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = x + 1\,.$$

[20] De este modo, $y \in A$ y $x \in B$.

Por lo tanto, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ se define como $f^{-1}(x) = x + 1$, para todo $x \in B$, de manera que su tabla de valores es:

x	$y = \overbrace{x+1}^{f^{-1}(x)}$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

y su diagrama de flechas es:



Observaciones Consideremos $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Por lo tanto, f es invertible, esto es, f admite función inversa que denotamos con f^{-1}. Luego:

(1) $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es biyectiva también.

(2) $dom(f) = ran(f^{-1})$.

(3) $ran(f) = dom(f^{-1})$.

2.4.9 Igualdad de funciones

Definición Decimos que las funciones f y g *coinciden* o *son iguales*, y que denotamos $f = g$, si se verifica que:

(i) $dom(f) = dom(g)$,

y además,

(ii) para todo $x \in dom(f)$ [21] se verifica que

$$f(x) = g(x)\,.$$

Observaciones

(1) De la definición anterior, se deduce fácilmente que $ran(f) = ran(g)$.

(2) Lo que no es tan obvio o fácil de saber es si sus codominios coinciden. Por tal razón en algunos casos va a ser necesario restringir el codominio al rango común a ambas funciones, con lo que las hacemos sobreyectivas.

Ejemplo Sean $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{0,1,2\}$. Consideremos las funciones f y g, definidas para todo $x \in A$, como siguen:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ es par} \\ 1 & \text{si} \quad x \text{ es impar} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \{0,2\} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \{1,3\} \end{cases} {}^{22}.$$

Veamos que $f = g$. En efecto:

(i) Es fácil ver que $dom(f) = A = dom(g)$, puesto que ambas $f, g : A \longrightarrow B$.

(ii) Por otro tenemos que:

x	$y = f(x)$	$y = g(x)$
0	0	0
1	1	1
2	0	0
3	1	1

Así, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A = dom(f)$.

Por lo tanto, resulta que:

$$f = g\,.$$

2.4.10 Función unión de funciones

Definición Dadas las funciones f y g. Definimos la *unión de f con g*, que denotamos $f \cup g$, como sigue:

[21] O bien, $x \in dom(g)$. Esto es indistinto, puesto que ambos dominios por el item (i) son iguales.

[22] g, así definida, es la función característica $\mathcal{X}_X$, siendo $X = \{1,3\}$ y $A - X = \{0,2\}$.

$$f \cup g = \{(x,y) : (x,y) \in f \;\text{ o }\; (x,y) \in g\} = \{(x,y) : y = f(x) \;\text{ o }\; y = g(x)\}\,.$$

Observación De la definición previa se deduce que:

$$dom(f \cup g) = dom(f) \cup dom(g) = dom(f) \cup [dom(g) - dom(f)]\,.$$

Lamentablemente, no siempre la unión de dos funciones es una función, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo Sean las funciones $f = \{(1,1),(2,3),(3,1),(4,4)\}$ y $g = \{(0,1),(1,1),(2,3),(3,2)\}$ [23].

Luego, resulta que

$$f \cup g = \{(1,1),(2,3),(3,1),(4,4),(0,1),(3,2)\}$$

y $dom(f \cup g) = \{0,1,2,3,4\} = dom(f) \cup dom(g)\,.$

Veamos que $f \cup g$ no verifica la condición de unicidad. En efecto:

Es fácil ver que

$$(3,1) \in f \cup g \;\text{ y }\; (3,2) \in f \cup g\,, \text{y sin embargo}, 1 \neq 2\,.$$

Así, $f \cup g$ no es función.

Para que la unión de funciones resulte ser una función necesitamos introducir la siguiente:

Definición Decimos que las funciones f y g son *compatibles*, cuando $dom(f) \cap dom(g) = \emptyset$ o bien, cuando $dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$ se verifique que

$$f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in dom(f) \cap dom(g).$$

Ahora estamos preparados para enunciar la siguiente:

2.4.10.1 Propiedad

Dadas las funciones f y g. Entonces:

$$f \cup g \text{ es función si, y sólo si, } f \text{ y } g \text{ son compatibles.}$$

Además, tenemos que la función $f \cup g$ se define como sigue:

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in dom(f) \\ g(x) & \text{si} \quad x \in dom(g) - dom(f) \end{cases}\,.$$

Ejemplo Consideremos las funciones $f = \{(x,y) : x \in \{0,1\} \;\text{ e }\; y = 2 - x\} = \{(0,2),(1,1)\}$ y $g = \{(x,y) : x \in \{1,2,3\} \;\text{ e }\; y = x\} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. Esto es,

[23] Claramente, tenemos que $dom(f) = \{1,2,3,4\}$ y que $dom(g) = \{0,1,2,3\}$.

x	$y = \overbrace{2-x}^{f(x)}$
0	2
1	1

y

x	1	2	3
$y = \underbrace{x}_{g(x)}$	1	2	3

.

Puesto que $dom(f) = \{0,1\}$ y $dom(g) = \{1,2,3\}$, tenemos que $dom(f) \cap dom(g) = \{1\}$ y además, resulta que $f(1) = 1 = g(1)$, por lo tanto f y g son compatibles. Así, podemos definir la función $f \cup g$ como sigue:

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \in \{0,1\} \\ x & \text{si} \quad x \in \{2,3\} \end{cases}$$

y además,

$$dom(f \cup g) = \{0,1,2,3\}\,.$$

2.4.11 Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g. Sabemos que, en particular, ambas son relaciones. Por lo ya expuesto en la sección 2.3.6 de *composición de relaciones*, tenemos que existe la relación $g \circ f$ [24] definida como sigue:

$$(x,y) \in g \circ f \iff \text{existe } z \text{ tal que } (x,z) \in f \text{ y } (z,y) \in g\,.$$

Pero al ser f y g funciones, resulta que:

$$(I) \qquad (x,y) \in g \circ f \iff \text{existe } z \text{ tal que } z = f(x) \text{ e } y = g(z)\,.$$

Nota Si existe ese z, claramente tenemos que $z \in ran(f)$ y $z \in dom(g)$, esto es,

$$z \in ran(f) \cap dom(g).$$

Pero como $z = f(x)$, resulta que $x \in dom(f)$ y además $z \in dom(g)$, es decir, $f(x) \in dom(g)$.
Luego, si sustituimos en (I) lo que representa z en el argumento de la función g tenemos que:

$$(II) \qquad (x,y) \in g \circ f \iff y = g\big(f(x)\big)\,^{25}.$$

Ahora bien, bajo estas condiciones, la relación $g \circ f$ verifica la existencia y la unicidad, resultando que:

$$g \circ f \text{ es función.}$$

[24] Que se lee: "*f compuesta con g*", en el sentido inverso de como se escribe.

[25] Siempre y cuando $x \in dom(f)$ tal que $f(x) \in dom(g)$.

Y puesto que $g \circ f$ es función, tenemos que la notación por pares ordenados se transforma de la siguiente manera:

$$(III) \qquad (x,y) \in g \circ f \iff y = (g \circ f)(x)\,.$$

Lo concluído en (II) y (III), nos conduce a dar la siguiente:

Definición Dadas dos funciones f y g, llamamos *composición de* f *con* g a la función $g \circ f$ definida por:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}\,,$$

para todo $x \in dom(f)$ tal que $f(x) \in dom(g)$, es decir, para todo $x \in dom(g \circ f)$, siendo

$$dom(g \circ f) = \{x \in dom(f) : f(x) \in dom(g)\}.$$

Observaciones

(1)

$$g \circ f \neq \emptyset \iff ran(f) \cap dom(g) \neq \emptyset\,.$$

En cambio,

$$g \circ f = \emptyset \iff ran(f) \cap dom(g) = \emptyset\,.$$

(2) $dom(g \circ f) = f^{-1}(ran(f) \cap dom(g)) = dom(f) \cap f^{-1}(dom(g))$.

Ejemplo Consideremos los conjuntos $A = \{-1,0,1,2\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$ y $C = \{-1,0,1,2,3\}$. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ definidas, respectivamente, por los siguientes cuadros de valores:

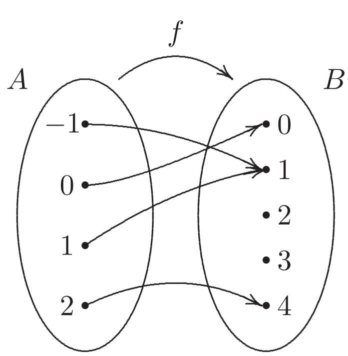
x	-1	0	1	2
$y = x^2$	1	0	1	4

y

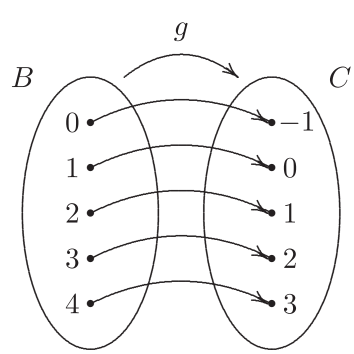
x	0	1	2	3	4
$y = x - 1$	-1	0	1	2	3

.

Gráficamente, sus respectivos diagramas de flechas son:



y



Claramente, sus correspondientes fórmulas definitorias son:

$$f(x) = x^2, \text{ para todo } x \in A,$$

y

$$g(x) = x - 1, \text{ para todo } x \in B.$$

Ahora bien, compongamos f con g. Esto es, hallemos $g \circ f$. Antes que todo, recordemos que:

$$g \circ f \neq \emptyset \iff ran(f) \cap dom(g) \neq \emptyset\,.$$

Por un lado, tenemos que $ran(f) = \{0, 1, 4\}$ y por otro lado, tenemos que $dom(g) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De esta manera, resulta que $ran(f) \cap dom(g) = \{0, 1, 4\} \neq \emptyset$, por lo que podemos decir que $g \circ f \neq \emptyset$. Seguidamente, determinemos el $dom(g \circ f) = \{x \in dom(f) : f(x) \in dom(g)\}$. Luego,

$$dom(g \circ f) = \big\{x \in \{-1, 0, 1, 2\} : x^2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\big\} = \{-1, 0, 1, 2\} = A\,.$$

Por lo tanto, podemos construir una tabla de valores a partir de la fórmula definitoria de la composición que es:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 - 1\,,$$

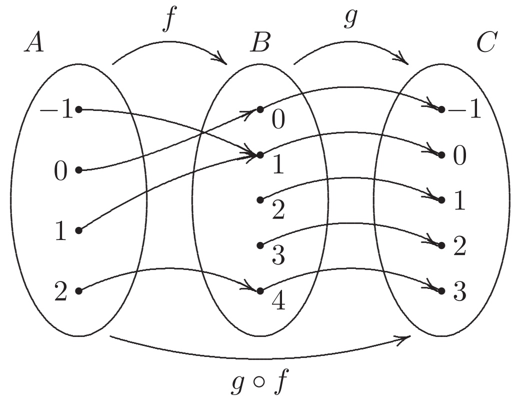
para todo $x \in A = \{-1, 0, 1, 2\}$, como se muestra a continuación:

x	$y = x^2 - 1$
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Resultando que la composición $g \circ f$, está formada por los pares ordenados: $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)$, es decir,

$$g \circ f = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}\,.$$

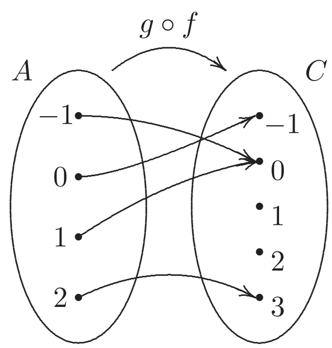
Combinando los diagramas de flechas de f y de g, podemos ver el *efecto* de la composición:



Finalmente, resulta que $g \circ f : A \longrightarrow C$, definida por:

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 1\,,$$

para todo $x \in A$, cuyo diagrama de flecha es:



En este caso, resulta que

$$dom(g \circ f) = dom(f) = \{-1, 0, 1, 2\} = A \quad \text{y} \quad ran(g \circ f) = \{-1, 0, 3\} \subseteq ran(g) = C.$$

Observaciones En general, se tiene que

(1) $dom(g \circ f) \subseteq dom(f) \quad \text{y} \quad ran(g \circ f) \subseteq ran(g)$.

(2) $g \circ f \neq f \circ g$.