Unidad 3

Conjuntos numéricos

"Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre", afirmó el célebre matemático y lógico Leopold Kronecker [1823-1891], quien se opuso a los trabajos de Georg Cantor sobre el *infinito* pues afirmaba que carecían de rigor matemático (¡Vaya que estaba equivocado!).

En esta unidad, se aborda el estudio de los conjuntos numéricos, comenzando con el conjunto de números naturales hasta llegar al conjunto de los números reales, para culminar con el conjunto de los números complejos. El lector, debe tener en cuenta que no es el objetivo de este curso brindar una presentación rigurosa de los conceptos, sino completar los conocimientos básicos que se han abordado en la educación secundaria. Además, y en vista a lo que alguna vez afirmó Kronecker, *los conjuntos numéricos se ampliaron a lo largo del tiempo por una razón esencial, dar respuesta a ciertos problemas.*

3.1 Números naturales

La noción de número es utilizada para resolver situaciones de la vida diaria, la utilización de los números naturales es tan antigua como el hombre mismo, debido a que surgieron de la necesidad de contar: 1 (•), 2 (••), 3 (• • •), 4 (• • ••), 5 (• • • • •) y así siguiendo. Se llaman naturales, porque los encontramos en la *naturaleza*: siete colores del arcoíris, un satélite natural tiene la Tierra[1], cuatro estaciones del año, dos satélites naturales tiene el planeta Marte, sesenta minutos tiene una hora, etc., para establecer un orden entre ciertas cosas: el tercer hijo, el primer día de la semana, el séptimo alumno de la fila, etc., para indicar magnitudes: 7 m, 50 kg, $28°C$, etc.

El conjunto de los números naturales está formado por aquellos números que se utilizan para contar a partir de la *unidad*[2]. Se lo designa con la letra $I\!N$ y sus primeros elementos son:

[1]El satélite natural del planeta Tierra es la Luna.

[2]Aunque en bibliografía más avanzada, algunos autores consideran que este conjunto arranca contando desde el 0.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$$

Una manera no apropiada[3] de indicar al conjunto de los números naturales es escribiendo:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\},$$

puesto que no es posible representarlo por extensión, por tratarse de un conjunto infinito.
Por ese motivo, la mejor forma de expresar a $\mathbb{N}$ es mediante su representación por comprensión, que es

$$\mathbb{N} = \{n : n \text{ es un número natural}\}$$

3.1.1 Orden natural

Antes que todo, vamos a definir qué es un orden y qué se entiende por conjunto ordenado y por conjunto totalmente ordenado.

Definición Decimos que un conjunto no vacío A es un *conjunto ordenado*, si la relación $\leqslant$ definida entre elementos de A, esto es, $\leqslant \subseteq \underbrace{A \times A}_{A^2}$, verifica las siguientes tres propiedades[4]:

(O_1) Para cualquier $x \in A$, $x \leqslant x$. [Reflexiva]

(O_2) Cualesquiera sean $x, y \in A$, si $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, entonces $x = y$. [Antisimétrica]

(O_3) Cualesquiera sean $x, y, z \in A$, si $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, entonces $x \leqslant z$. [Transitiva]

Un conjunto ordenado A se dice *totalmente ordenado* si además de las propiedades $(O_1), (O_2), (O_3)$ el orden $\leqslant$ verifica la propiedad extra:

(O_4) Para cualesquiera sean x, y, si $x, y \in A$ entonces $x \leqslant y \quad \text{o} \quad y \leqslant x$. [Linealidad]

A los conjuntos totalmente ordenados también se los conoce con el nombre de *cadenas* o bien se dice que el orden es *lineal*. Y además, se dice que todo par de elementos del conjunto totalmente ordenado es *comparable*, esto es, para cualquier par de elementos $x, y \in A$ se tiene que por la linealidad:

$$x \leqslant y \quad \text{o} \quad y \leqslant x.$$

---

[3] Debido a que es incorrecta.

[4] Esas propiedades son las que definen un *orden* entre los elementos del conjunto A.

Si denotamos con $\leqslant$ al *orden usual* o *natural* establecido por el ordenamiento originado por la seguidilla consecutiva de números naturales, tenemos que

$$1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 5 \leqslant 6 \leqslant 7 \leqslant 8 \leqslant 9 \leqslant 10 \leqslant 11 \leqslant 12 \leqslant \dots$$

De esta manera, resulta que dicho ordenamiento verifica las propiedades de orden (O_1), (O_2) y (O_3) produciendo que $\mathbb{N}$ con el orden natural $\leqslant$ es un conjunto ordenado.

Notación

(i) Al símbolo $\leqslant$ se lo lee *menor o igual* y a la expresión $\boxed{n \leqslant m}$ se lee *n es menor o igual que m.*

(ii) El símbolo $\boxed{n < m}$, que se lee *n es menor que m*, se interpreta como $\boxed{n \leqslant m}$, pero $\boxed{n \neq m}$.

(iii) De manera dual existen las desigualdades recíprocas $\geqslant$ y $>$, llamadas *mayor o igual que* y *mayor que* respectivamente, que claramente expresan que:

$$\boxed{m \geqslant n} \quad \text{si, y sólo si,} \quad \boxed{n \leqslant m},$$

y

$$\boxed{m > n} \quad \text{si, y sólo si,} \quad \boxed{n < m}.$$

(iv) Por todo lo expresado, el orden usual de los números naturales $\leqslant$, significa que para cualesquiera sean $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{n \leqslant m} \quad \text{si, y sólo si,} \quad \boxed{n < m} \quad \text{o} \quad \boxed{n = m}.$$

3.1.1.1 Propiedades

En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con el orden natural $\leqslant$, se verifican las siguientes propiedades:

(N_1) $\mathbb{N}$ es un *conjunto totalmente ordenado.*

(N_2) $\mathbb{N}$ es un *conjunto discreto*, esto es, entre dos números naturales distintos hay una cantidad finita de números naturales.

(N_3) $1 \in \mathbb{N}$ es el *primer elemento* o *elemento mínimo*, es decir, el menor de todos los números naturales (según el orden usual). En símbolos, $1 \leqslant n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(N_4) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $s(n) \in \mathbb{N}$, donde el símbolo $s(n)$ representa al *siguiente* o *sucesor de* n. Este hecho produce que $\mathbb{N}$ sea un conjunto infinito, puesto que el proceso de generar un sucesor de cualquier número natural *nunca para*, o bien *no termina*, o lo que es lo mismo *no tiene fin*.

(N_5) Cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $n < s(n)$.

(N_6) Todo subconjunto A no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento o elemento mínimo, es decir, si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset$ entonces existe $a_1 \in A$ tal que $a_1 \leqslant a$, para cualquier $a \in A$.

(N_7) Todo subconjunto finito A no vacío de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo y elemento máximo, es decir, si $A \subseteq \mathbb{N}$, A es finito y $A \neq \emptyset$ entonces existen $a_1, a_n \in A$ tal que $a_1 \leqslant a \leqslant a_n$, para cualquier $a \in A$. Es decir, a_1 es el elemento mínimo de A y a_n el elemento máximo de A.

3.1.2 Suma y producto

Cualesquiera sean $n, m, k \in \mathbb{N}$, se verifica que:

(N_8) $n + m \in \mathbb{N}$, es decir, *la suma de dos números naturales es un número natural.* [O.B.I.[5]]

(N_9) $s(n) = n + 1$, esto es, *el sucesor de* n *es* $n + 1$. [Fórmula definitoria de $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$[6].]

(N_{10}) $n + m = m + n$. [Conmutativa]

(N_{11}) $n + (m + k) = (n + m) + k$. [Asociativa]

(N_{12}) Si $n = m$ entonces $n + k = m + k$. [Uniforme]

(N_{13}) Si $n + k = m + k$ entonces $n = m$. [Cancelativa]

(N_{14}) Si $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n > m$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m + k = n$, es decir, si un número natural es mayor que otro, hay un número natural, de modo que al sumarlo al menor dá por resultado el mayor.

(N_{15}) $n \cdot m \in \mathbb{N}$, es decir, *la multiplicación de dos números naturales es un número natural.* [O.B.I.]

(N_{16}) $n \cdot m = m \cdot n$. [Conmutativa]

(N_{17}) $n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$. [Asociativa]

---

[5] Sigla de *operación binaria interna*, significando que operar (sumar, multiplicar, etc.) dos números de un conjunto numérico da por resultado un elemento dentro del mismo conjunto numérico.

[6] A s se la llama *función sucesor.*

(N_{18}) Si $n = m$ entonces $n \cdot k = m \cdot k$. [Uniforme]

(N_{19}) Si $n \cdot k = m \cdot k$ entonces $n = m$. [Cancelativa]

(N_{20}) $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$. [Distributiva]

3.1.3 Diferencia natural

Por la propiedad (N_{14}) anterior, tenemos que si $n, m \in I\!N$ tal que $n > m$ entonces existe $k \in I\!N$ tal que $m + k = n$. Esto nos sugiere dar la siguiente:

Definición Sean $n, m \in I\!N$ tal que $n > m$. Definimos la *diferencia natural* de n con m, que simbolizamos $n - m$, como el número $k \in I\!N$ que existe, por (N_{14}), de manera que $n = m + k$, esto es,

$$\underbrace{n - m}_{k} \in I\!N\,.$$

Es decir, la resta de dos números naturales es un número natural, siempre y cuando el *minuendo*[7] es mayor que el *sustraendo*[8].

3.1.4 Naturales con el cero

En estudios matemáticos superiores[9] se considera que el 0 *es un número natural*. Pero en estudios más básicos, se presenta al 0 como un número que no es natural. Nosotros vamos a adoptar la convención de que $0 \notin I\!N$.

La introducción del número cero y su notación arábiga 0, que representa a la *cantidad nula* o a la *nada*, se debe a la intención de querer dar solución a la resta o diferencia entre dos números naturales que son iguales, es decir, como respuesta de la resta $n - n$, esto es, cuando el *minuendo* y el *sustraendo* es el mismo número natural n.

En virtud de esto, podemos considerar el conjunto formado por los números naturales unido al unitario $\{0\}$, que vamos a simbolizar $I\!N_0$, que se lee $I\!N$ *sub cero* y que lo llamamos conjunto de los *naturales con el cero*, en donde para todo $n \in I\!N_0$ resulta que la resta $n - n = 0$. Luego,

$$I\!N_0 = I\!N \cup \{0\} = \{n : n \text{ es un número natural o } n = 0\}\,,$$

es decir, $I\!N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}\,.$

---

[7]El número al que se le resta.

[8]El número que resta.

[9]Específicamente, en *Fundamentos de la Matemática*.

Observación Claramente, tenemos que

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \,.$$

3.2 Números enteros

Después de lo expuesto en la sección anterior, nos preguntamos:

¿Es posible encontrar un número natural x, que al restárselo a 6 dé por resultado 8?

En lenguaje algebraico, la cuestión sería:

$$\text{¿}existe\ x \in \mathbb{N}\ tal\ que\ 6 - x = 8\text{?}$$

La respuesta a este interrogante es NO, es decir, es imposible encontrar un número natural que cumpla con estas condiciones. En este caso decimos que el problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales. Así, el conjunto *solución* es $S = \{x \in \mathbb{N} : 6 - x = 8\} = \emptyset$.

Esto justifica la necesidad de originar un nuevo conjunto llamado el conjunto de los números enteros, formado por los números naturales, que vamos a llamar *enteros positivos*, el 0 y los simétricos[10] de los enteros positivos, que vamos a llamar *enteros negativos*. De esta forma, el conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto de los números naturales.

Para ello, comencemos llamando conjunto de los enteros positivos, que indicamos con $\mathbb{Z}^+$, al conjunto de los números naturales, es decir, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. A partir de los enteros positivos, obtenemos el llamado conjunto de los enteros negativos, que indicamos con $\mathbb{Z}^-$, como el conjunto formado por los simétricos de los enteros positivos, que simbólicamente indicamos $\mathbb{Z}^- = \{-n : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Finalmente, definimos al conjunto de los *números enteros* o de los *números íntegros*, que simbolizamos con $\mathbb{Z}$[11], como el conjunto

$$\mathbb{Z} = \overbrace{\mathbb{N} \cup \{0\}}^{\mathbb{N}_0} \cup \{-n : n \in \mathbb{Z}^+\} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = \{a : a \text{ es un número entero}\}.$$

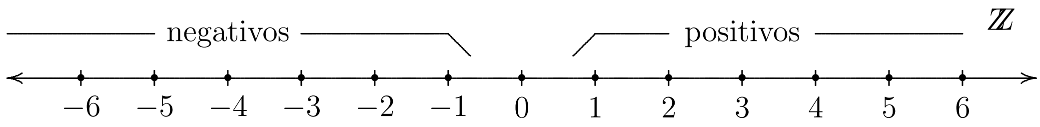
De este modo, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros está integrado por los números

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

[10]Pareja de números enteros distintos de 0 y distintos entre sí, que están a la misma distancia del 0 y que, en general, se indican a y $-a$.

[11]Por el vocablo alemán *Zahlen* que significa *números*.

Gráficamente se representa a los números enteros distribuidos sobre una recta horizontal particionada en *segmentos* de igual longitud, que llamamos *unidad* de la escala, de manera que en cada marca se coloca un *afijo* que representa a cada número entero. A este tipo de recta se la conoce con el nombre de *recta numérica*, como se muestra a continuación:



Finalmente, tenemos que la representación por comprensión de los números enteros es

$$\mathbb{Z} = \{a : a \text{ es un número entero}\}.$$

Observaciones

(1) $0 \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, tenemos que $\{0\} \subseteq \mathbb{Z}$.

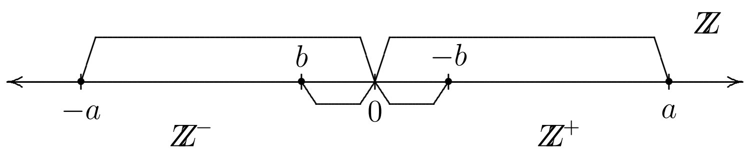
(2) El número entero 0, llamado *cero*, no es positivo ni negativo, es decir, $0 \notin \mathbb{Z}^+$ y $0 \notin \mathbb{Z}^-$.

(3) El conjunto de los números naturales o enteros positivos es un subconjunto de los números enteros, es decir, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$. Y obviamente, también se verifica que $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ y que $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Z}$.

(4) $a \in \mathbb{Z}^+$ si, y sólo si, $-a \in \mathbb{Z}^-$, es decir, si $a \in \mathbb{Z}^+$, entonces $-a \in \mathbb{Z}^-$ y viceversa.

(5) $-b \in \mathbb{Z}^+$ si, y sólo si, $b \in \mathbb{Z}^-$, es decir, si $-b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $b \in \mathbb{Z}^-$ y viceversa.

Gráficamente:



Notación Con $-a$ denotamos al número *simétrico*[12] de a, con $a \neq 0$, independientemente del signo del número entero. Y con $-(-a)$ denotamos al *simétrico de* $-a$ que es a, es decir $-(-a) = a$, con $a \neq 0$.

3.2.1 Orden integral

Definición En el conjunto $\mathbb{Z}$, se define la relación $\leqslant$ entre dos números enteros cualesquiera a, b, como sigue:

(i) Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ entonces a y b se comparan con el orden usual de los números naturales, pudiendo suceder que $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$.

[12]Que está a la misma distancia respecto al 0.

(ii) Si $a, b \in \mathbb{Z}^-$ entonces, por el item (4) del grupo de observaciones anterior, tenemos que $-a, -b \in \mathbb{Z}^+$ y por la condición (i) previa, ambos pueden compararse. Técnicamente lo que ocurre es que:

$$a \leqslant b \text{ si, y sólo si, } -b \leqslant -a,$$

o

$$b \leqslant a \text{ si, y sólo si, } -a \leqslant -b.$$

(iii) Si alguno de los dos fuese un entero negativo y el otro un entero positivo, entonces decimos que *el entero negativo es menor que el entero positivo*, esto es, supongamos que $a \in \mathbb{Z}^-$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ entonces $a < b$, por lo que podemos decir que $a \leqslant b$.

(iv) Si alguno de los dos fuese cero y el otro un entero positivo, entonces *el cero es menor que el entero positivo*, esto es, supongamos que $a = 0$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ entonces $0 < b$, es decir, $a < b$, por lo que podemos decir que $a \leqslant b$.

(iv) Si alguno de los dos fuese un entero negativo y el otro cero, entonces *el entero negativo es menor que el cero*, esto es, supongamos que $a \in \mathbb{Z}^-$ y $b = 0$ entonces $a < 0$, es decir, $a < b$, por lo que podemos decir que $a \leqslant b$.

(vi) Si a y b representan al mismo número entero, esto es, $a = b$, entonces claramente $a \leqslant b$.

Ejemplos En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, tenemos que

(a) $3 \leqslant 8$, por el orden usual de los números naturales (enteros positivos).

(b) $-5 \leqslant -1$, pues comparando sus simétricos 1 y 5 tenemos que $1 \leqslant 5$.

(c) $-4 \leqslant 6$, pues $-4 < 6$, esto es, cualquier entero negativo es menor que un entero positivo.

(d) $0 \leqslant 11$, pues $0 < 11$, esto es, 0 es menor que cualquier entero positivo.

(e) $-7 \leqslant 0$, pues $-7 < 0$, esto es, cualquier entero negativo es menor que 0.

Observaciones Cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{Z}$, resulta que:

(1) $a \leqslant b$ si, y sólo si, $a < b$ o $a = b$.

(2) $a < b$ si, y sólo si, $a \leqslant b$, pero $a \neq b$.

(3) Si $a < b$, entonces $a \leqslant b$.

(4) Si $a = b$, entonces $a \leqslant b$.

(5) $a \leqslant b$ si, y sólo si, $b \geqslant a$.

(6) $a < b$ si, y sólo si, $b > a$.

De este manera, resulta que la relación $\leqslant$, definida recién, verifica las propiedades de orden $(O_1), (O_2)$ y (O_3), produciendo que $\mathbb{Z}$ con el orden $\leqslant$ es un conjunto ordenado.
Con esta notación, también es usual representar, por comprensión, a $\mathbb{Z}^+$ y a $\mathbb{Z}^-$ como:

$$\mathbb{Z}^+ = \{a \in \mathbb{Z} : a > 0\} \text{ y } \mathbb{Z}^- = \{a \in \mathbb{Z} : a < 0\}.$$

3.2.1.1 Propiedades

En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con el orden integral $\leqslant$, se verifican las siguientes propiedades:

(E_1) $\mathbb{Z}$ es un conjunto *totalmente ordenado.*

(E_2) $\mathbb{Z}$ *no tiene elemento mínimo ni elemento máximo*, puesto que cada número entero tiene un antecesor y un sucesor.

(E_3) $\mathbb{Z}$ es un *conjunto discreto*, esto es, entre dos números enteros distintos hay una cantidad finita de números enteros.

3.2.2 Valor absoluto de un número entero

Definición Dado un número entero a, es decir, $a \in \mathbb{Z}$. Definimos el *valor absoluto del número entero* a o simplemente el *valor absoluto de* a como el número entero no negativo[13], que simbolizamos con $|a|$, que se lee "*valor absoluto de a*", y que representa a la distancia que hay del número entero a al 0 como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } \; a \in \mathbb{Z}_0^+, \\ -a & \text{si } \; a \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

O bien,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } \; a \in \mathbb{Z} : a \geqslant 0, \\ -a & \text{si } \; a \in \mathbb{Z} : a < 0. \end{cases}$$

[13]Un número entero b es no negativo si $b \in \mathbb{Z}_0^+$, es decir, $b \in \mathbb{Z}$ tal que $b \geqslant 0$.

Observación Es claro que

$$\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Luego, $a \in \mathbb{Z}_0^+$ si, y sólo si, $a \in \mathbb{Z}^+$ o $a = 0$, es decir, $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\underbrace{a > 0 \text{ o } a = 0}_{a \geqslant 0}$.

Así,

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{a \in \mathbb{Z} : a \geqslant 0\}.$$

Ejemplos

(a) $|5| = 5$, pues $5 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(b) $|0| = 0$, pues $0 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(c) $|-8| = \underbrace{-(-8)}_{\text{simétrico de } -8} = 8$, pues $-8 \in \mathbb{Z}^-$.

(d) $|-5| = \underbrace{-(-5)}_{\text{simétrico de } -5} = 5$, pues $-5 \in \mathbb{Z}^-$.

Observaciones Para cualquier $a \in \mathbb{Z}$, observemos que:

(1) $|a| \in \mathbb{Z}_0^+$, es decir, $|a| \geqslant 0$. [No negatividad]

(2) $|a| = |-a|$. [Valor absoluto de simétricos]

3.2.3 Suma y producto

Para poder llegar a establecer que la suma y el producto de números enteros es un número entero, introducimos una serie de enunciados, a modo de propiedades y definiciones, que justificarán lo requerido.

(E_4) La suma y el producto de números enteros positivos junto al cero, siempre es un número entero positivo o cero, esto es, para cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ se verifica que

$$a + b \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \text{y} \qquad a \cdot b \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Ejemplos

(a) $2 + 0 = 2 \in \mathbb{Z}_0^+$, con $2, 0 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(b) $4 + 7 = 11 \in \mathbb{Z}_0^+$, con $4, 7 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(c) $0 + 0 = 0 \in \mathbb{Z}_0^+$, con ambos $0 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(d) $3 \cdot 6 = 18 \in \mathbb{Z}_0^+$, con $3, 6 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(*e*) $7 \cdot 1 = 7 \in \mathbb{Z}_0^+$, con $7, 1 \in \mathbb{Z}_0^+$.

(*f*) $0 \cdot 5 = 0 \in \mathbb{Z}_0^+$, con $0, 5 \in \mathbb{Z}_0^+$.

Observación En general, para todo $a \in \mathbb{Z}_0^+$ se verifica que:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0\,.$$

Definición Dados dos números enteros negativos, digamos $-a, -b \in \mathbb{Z}^-$. Definimos:

$$(-a) + (-b) = -(a + b) \in \mathbb{Z}^-,$$

siendo a y b los *simétricos* de $-a$ y $-b$, respectivamente, en $\mathbb{Z}^+$. Es decir,

$$-(-a) = a \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{y} \quad -(-b) = b \in \mathbb{Z}^+.$$

Notación Con $-(a+b)$ indicamos al *simétrico de* $a+b$. Y además, $a+b \in \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}_0^+$, por lo enunciado en (E_4).

Ejemplo $(-5) + (-8) = -(\underbrace{5+8}_{13}) = -13$.

Definición Dados un número entero positivo y otro negativo, digamos $a \in \mathbb{Z}^+$ y $-b \in \mathbb{Z}^-$. Definimos:

$$a + (-b) = \begin{cases} a - b \in \mathbb{Z}_0^+ & \text{si } \underbrace{|a|}_{a} \geqslant \underbrace{|-b|}_{b}, \\ -(b-a) \in \mathbb{Z}^- & \text{si } \underbrace{|-b|}_{b} > \underbrace{|a|}_{a}, \end{cases}$$

siendo b el *simétrico de* $-b$, en $\mathbb{Z}^+$.

Observación Al utilizar el valor absoluto en la definición previa, lo que se busca es *hacer positivo* al entero negativo para trabajar con la diferencia natural, cuando el minuendo sea mayor que el sustraendo en las diferencias $a-b$ o $b-a$, de la llave definitoria anterior. O bien con la diferencia de dos números naturales que sean iguales, esto es, cuando $\underbrace{|a|}_{a} = \underbrace{|-b|}_{b}$, resultando que $a + (-b) = a - a = 0$.

De manera similar, se puede definir $(-b) + a$ resultando que coincide con lo anterior. Esto es,

$$a + (-b) = (-b) + a.$$

Observación Con $-(b-a)$ indicamos al *simétrico de* $b - a$.

Ejemplos

(*a*) $20 + (-11) = 20 - 11 = 9$, puesto que $\underbrace{|20|}_{20} \geqslant \underbrace{|-11|}_{11}$.

(*b*) $15 + (-23) = -(23 - 15) = -8$, puesto que $\underbrace{|-23|}_{23} \geqslant \underbrace{|15|}_{15}$.

Definición Dados dos números enteros negativos, digamos $-a, -b \in \mathbb{Z}^-$. Definimos:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \in \mathbb{Z}^+,$$

siendo a y b los *simétricos de* $-a$ y $-b$, respectivamente, en $\mathbb{Z}^+$.

Ejemplo $(-6) \cdot (-4) = 6 \cdot 4 = 24$.

Definición Dados un número entero positivo y otro negativo, digamos $a \in \mathbb{Z}^+$ y $-b \in \mathbb{Z}^-$. Definimos:

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \in \mathbb{Z}^-,$$

siendo b el *simétrico de* $-b$, en $\mathbb{Z}^+$.

Notación Con $-(a \cdot b)$ indicamos el *simétrico de* $a \cdot b$. Y además, $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}_0^+$, por lo enunciado en (E_4).

De manera similar, se puede definir $(-b) \cdot a$ resultando que coincide con lo anterior. Esto es,

$$a \cdot (-b) = (-b) \cdot a.$$

Ejemplos

(*a*) $8 \cdot (-7) = -(\underbrace{8 \cdot 7}_{56}) = -56$.

(*b*) $5 \cdot (-20) = -(\underbrace{5 \cdot 20}_{100}) = -100$.

Por todo lo presentado hasta el momento, podemos decir que:

(E_5) Para cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que [O.B.I.]

$$a + b \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad a \cdot b \in \mathbb{Z}.$$

Esto es, la suma y el producto de números enteros es un número entero, lo que hace que sean *operaciones binarias internas*.

3.2.3.1 Propiedades

Para cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se verifica que:

(E_6) $(a + b) + c = a + (b + c)$. [Asociativa]

(E_7) $a + b = b + a$. [Conmutativa]

(E_8) Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$. [Existencia del neutro de la suma]

(E_9) Para cada $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a$ [14] $\in \mathbb{Z}$, llamado el *opuesto de* a, tal que $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

[Existencia del opuesto]

(E_{10}) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. [Asociativa]

(E_{11}) $a \cdot b = b \cdot a$. [Conmutativa]

(E_{12}) Existe $1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. [Existencia del neutro del producto]

(E_{13}) $-1 \cdot a = -a$.

(E_{14}) $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$.

(E_{15}) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. [Distributiva]

Observaciones

(1) La validez de la propiedad asociativa en la suma y en el producto de números enteros permite eliminar los paréntesis al asociar, esto es,

$$\boxed{(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c} \qquad \text{y} \qquad \boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}.$$

(2) El opuesto de $-a$ es a, esto es, $-(-a) = a$.

(3) Claramente, el opuesto de 0 es el propio 0, es decir, $-0 = 0$, ya que se verifica que $0 + 0 = 0$.

Definición Dados dos números enteros a y b, es decir, $a, b \in \mathbb{Z}$. Definimos la *resta* o *diferencia* entre a y b, que denotamos $a - b$ como sigue:

$$a - b = a + (-b) \in \mathbb{Z}.$$

Esto es, *para restar dos números enteros lo que debemos hacer es sumar al minuendo, el opuesto del sustraendo con lo que obtenemos un número entero.*

¿Pasará lo mismo con la división? Analicemos algunos casos:

$$6 : 2 = 3, \qquad \text{ya que} \qquad 3 \cdot 2 = 6$$

[14] El mismo símbolo del simétrico de a, pues ambos coinciden cuando $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$, es decir, $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$.

$$-10 : 5 = -2, \qquad \text{ya que} \qquad -2 \cdot 5 = -10$$

$$0 : 2 = 0, \qquad \text{ya que} \qquad 2 \cdot 0 = 0$$

En general:

$$a : b = c, \ \text{con } b \neq 0, \quad \text{si se cumple que} \quad c \cdot b = a$$

Nos preguntamos: ¿Cuál será el resultado de 5 : 3?, esto es, ¿existe algún número entero tal que al multiplicarlo por 3 dé como resultado 5?
La respuesta es NO, esto es, es imposible encontrar un número entero que cumpla con esta condición. Para resolver éste problema hay que introducir un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números racionales que veremos en la siguiente sección.

<u>Curiosidad</u> *¡No se puede dividir por cero!*
Imaginen que entran en un negocio en donde toda la mercadería que se puede comprar cuesta \$ 1000. Y ustedes entran justamente con esa cantidad: \$ 1000. Si se les preguntara: ¿cuántos artículos pueden comprar?, creo que la respuesta es obvia: uno solo. Si en cambio en el negocio todos los objetos valieran \$ 500, entonces, con los \$ 1000 que trajeron podrían comprar, ahora, dos objetos. Si ahora los objetos que vende el negocio costaran sólo \$ 1 cada uno, ustedes podrían comprar, con los \$ 1000, exactamente mil artículos. Como se aprecia, a medida que disminuye el precio, aumenta la cantidad de objetos que ustedes pueden adquirir. Siguiendo con la misma idea, si ahora los artículos costaran \$ 0,10, es decir, 10 centavos, ustedes podrían comprar... diez mil artículos. Y si costaran \$ 0,01, es decir, un centavo, sus \$ 1000 alcanzarían para adquirir cien mil artículos. O sea, a medida que los artículos son cada vez más baratos, se pueden comprar más unidades. En todo caso, el número de unidades aumenta tanto como uno quiera, siempre y cuando uno logre que los productos sean cada vez de menor valor. Ahora bien: ¿y si los objetos fueran gratuitos? Es decir, si no costaran nada ¿Cuántos se pueden llevar? Piensen un poco. Se dan cuenta que si los objetos que se venden en el negocio no costaran nada, tener o no tener mil pesos poco importa, porque ustedes se podrían llevar todo. Con esta idea en la cabeza es que uno podría decir que no tiene sentido 'dividir' \$ 1000 entre 'objetos que no cuestan nada'. En algún sentido, se los invita a que concluyan que *no tiene sentido dividir por cero.*

¿Y la Matemática, qué dice de esto?
Supongamos tener un número entero a el cual se pretenda dividir en 0, entonces hay dos casos que tiene sentido que analicemos:

(I) Si a es distinto de 0 entonces si existiera un único número entero c que sea el resultado del cociente entre a y 0, es decir, estamos suponiendo que $a : 0 = c$, entonces tendría que ser $a = 0$, ya que cualquier número multiplicado por cero da cero, es decir, $a = c \cdot 0 = 0$. Pero esto no puede suceder si estamos bajo el supuesto de que a no es 0.

(II) Si a es cero entonces observe que no existe un único número entero c que sea el cociente de 0 entre 0, ya que sabemos que cualquier número multiplicado entre 0 da como resultado 0, es decir, serían infinitos los números que serían resultados de dividir 0 entre 0. Por esta razón, se dice que el resultado del cociente $0 : 0$ es una *indeterminación*.

En Aritmética, existe un procedimiento para realizar la división euclídea o euclidiana de números enteros, también llamado *algoritmo de la división entera*, que es un teorema que establece que el proceso habitual de división entre dos números enteros, con divisor distinto de cero, puede llevarse a cabo obteniéndose un cociente y un resto, ambos enteros y únicos.
Para entender el algoritmo de la división entera, vamos a ver en primer lugar el caso en que la división sea entre dos números enteros no negativos, con divisor distinto de cero, es decir, positivo.

3.2.4 Algoritmo de la división entera no negativa

Dados dos números enteros no negativos m y d, con $d \neq 0$, llamados *dividendo* y *divisor* respectivamente. Esto es, m y d son dos números enteros tal que $m \geqslant 0$ [15] y $d > 0$ [16], puesto que $d \geqslant 0$ y $d \neq 0$. Llamamos *cociente* q entre m y d, al mayor número entero no negativo c [17] que multiplicado por el divisor d no supere a m. Esto es,

$$q = \max\Big(\{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \cdot d \leqslant m\}\Big)^{18}.$$

Esto significa que q es el mayor de los elementos que pertenecen al conjunto de todos los $c \in \mathbb{Z}_0^+$ que cumple con la cláusula $c \cdot d \leqslant m$, esto es, $q \in \{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \cdot d \leqslant m\}$ y, además, para todo $c \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $c \cdot d \leqslant m$ se verifica que $c \leqslant q$. Así, $q \in \mathbb{Z}_0^+$ es el máximo que verifica la condición $q \cdot d \leqslant m$.
Llamamos *resto* a la diferencia no negativa r que hay entre el dividendo m con el producto del cociente q por el divisor d, esto es,

$$(\circ) \quad r = m - q \cdot d.$$

Así, $r \in \mathbb{Z}_0^+$ y, además, verifica la siguiente desigualdad:

$$0 \leqslant r < d.$$

[15] Significando que $m \in \mathbb{Z}_0^+$.
[16] Significando que $d \in \mathbb{Z}^+$, esto es, d es un positivo.
[17] Es decir, $c \geqslant 0$ significando que $c \in \mathbb{Z}_0^+$.
[18] q es el elemento máximo o último elemento del conjunto $\{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \cdot d \leqslant m\}$.

De la igualdad ($\circ$) anterior, se deduce inmediatamente la siguiente identidad:

$$\boxed{m = q \cdot d + r}\,.$$

Con lo que obtenemos la clásica representación de la división entera no negativa de m dividido en d:

$$\begin{array}{c|l} m & d \\ \cline{2-2} \boxed{r} & q\,. \end{array}$$

Ejemplo Encontremos el cociente que resulta al realizar la división entera no negativa entre los números enteros 8 y 3, donde el dividendo es 8 es no negativo y el divisor es 3 es positivo. El *cociente* buscado es

$$q = \max\Big(\{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \cdot 3 \leqslant 8\}\Big).$$

Por comodidad, pongamos $A = \{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \cdot 3 \leqslant 8\}$. Luego, tenemos que

$0 \in A$, puesto que $0 \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $\underbrace{0 \cdot 3}_{0} \leqslant 8$,

$1 \in A$, puesto que $1 \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $\underbrace{1 \cdot 3}_{3} \leqslant 8$,

$2 \in A$, puesto que $2 \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $\underbrace{2 \cdot 3}_{6} \leqslant 8$.

En cambio,

$3 \notin A$, ya que $3 \in \mathbb{Z}_0^+$ pero $\underbrace{3 \cdot 3}_{9} \not\leqslant 8$.

Así, $A = \{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \leqslant 2\} = \{0, 1, 2\}$. Por lo tanto, su elemento máximo es 2, es decir,

$$q = \max(A) = \max\Big(\{c \in \mathbb{Z}_0^+ : c \leqslant 2\}\Big) = \max\Big(\{0, 1, 2\}\Big) = 2\,.$$

Luego, el resto

$$r = 8 - \underbrace{2 \cdot 3}_{6} = 8 - 6 = 2,$$

es un número entero no negativo y, además verifica, la desigualdad $0 \leqslant \underbrace{2}_{r} < \underbrace{3}_{d}$. De la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\boxed{8 = 2 \cdot 3 + 2}\,.$$

Con lo que tenemos la clásica representación de la división entera no negativa de 8 dividido en 3:

$$\begin{array}{c|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} \boxed{2} & 2\,. \end{array}$$

Ahora si, estamos preparados para enunciar el

3.2.5 Algoritmo de la división entera

Dados dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, donde a es el *dividendo* y b es el *divisor*, la división euclídea de a dividido en b les hace corresponder un único entero q y un único entero r tales que verifican lo siguiente:

$$\boxed{a = b \cdot q + r}\,, \text{ con } 0 \leqslant r < |b|\,.$$

A los números enteros q y r que existen, se los denomina *cociente* y *resto* respectivamente, de manera que el resto r es un entero no negativo, estrictamente menor que el valor absoluto de b, esto es, $0 \leqslant r < |b|$.
Más formalmente, tenemos que:
"Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tales que $a = b \cdot q + r$ y $0 \leqslant r < |b|$".
Resultando que:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} \boxed{r} & q \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = q \cdot b + r\,.$$

Observaciones

(1) El cociente q en el algoritmo de la división entera entre a y b, con $b > 0$, se encuentra como:

$$\boxed{q = \max\Big(\{c \in \mathbb{Z} : c \cdot b \leqslant a\}\Big)}\,.$$

(2) El cociente q en el algoritmo de la división entera entre a y b, con $b < 0$, se encuentra como:

$$\boxed{q = \min\Big(\{c \in \mathbb{Z} : c \cdot b \leqslant a\}\Big)}\,.$$

(3) El resto r en el algoritmo de la división entera entre a y b, con $b \neq 0$, se encuentra como:

$$\boxed{r = a - q \cdot b}\,.$$

3.2.6 Múltiplos y divisores

Definición Dados dos números enteros a y b, decimos que *a es múltiplo de b* si existe un número entero c de manera que $a = c \cdot b$.
Ejemplo -6 es múltiplo de 3, porque existe el número entero -2 de manera que $-6 = -2 \cdot 3$.
Nota Con $M(a)$ denotamos al conjunto de múltiplos de un número entero a, es decir,

$$M(a) = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \text{ es múltiplo de } a\}\,.$$

Ejemplo

$$M(2) = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \text{ es múltiplo de } 2\}$$

y algunos elementos de $M(2)$ son,

$$\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \ldots, 26, 28, \ldots, 308, 310, \ldots, 12344, \ldots$$

Dado $a \in \mathbb{Z}$, notemos que,

(1) $M(a) \neq \emptyset$. En efecto:

Sabemos que todo número entero es múltiplo de sí mismo, por lo tanto resulta que existe al menos $a \in M(a)$.

(2) $M(a)$ es un conjunto infinito.

Definición Dados dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, decimos que a *es divisible por* b, si al realizar la división euclidea[19] de a en b se obtiene resto 0 (cero), esto es,

$$\begin{array}{c|l} a & \underline{\ b \quad} \\ \boxed{0} & \ c \ \rightarrow \text{cociente entero}\,. \end{array}$$

Equivalentemente, por el algoritmo de la división entera tenemos que $a = c \cdot b + 0 = c \cdot b$, es decir, a es múltiplo de b. Por lo que concluimos que

$$\boxed{a \text{ es divisible por } b \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ es múltiplo de } b}\,.$$

Además, si a es divisible por b, entonces podemos decir que b *divide a* a o bien b *es un divisor de* a.

Nota Con $D(a)$ denotamos al conjunto de divisores de un número entero a, es decir,

$$D(a) = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \text{ es divisor de } a\}$$

Ejemplo

$$D(2) = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \text{ es divisor de } 2\} = \{-1, 1, -2, 2\}$$

[19] División clásica utilizando el algoritmo de la división entera con cociente entero, es decir, *sin coma* decimal.

Dado $a \in \mathbb{Z}$, notemos que:

(1) $D(a) \neq \emptyset$. En efecto:

Sabemos que todo número entero es divisible por sí mismo. Más aún, el número entero 1 divide a cualquier número entero a. Por lo tanto, existen al menos $a, 1 \in D(a)$.

(2) $D(a)$ es un conjunto finito y, además, tiene elemento mínimo y elemento máximo.

Notación Más adelante, vamos a necesitar contar con el *conjunto de los múltiplos positivos de un número entero* a y con el *conjunto de los divisores positivos de un número entero* a, que denotamos $M^+(a)$ y $D^+(a)$ respectivamente. De este modo,

$$M^+(a) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \text{ es múltiplo de } a\}$$

y

$$D^+(a) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \text{ es divisor de } a\}.$$

3.2.7 Criterios de divisibilidad para enteros positivos

(i) *Divisibilidad por* 1: Cualquier número entero positivo es divisible por 1.

(ii) *Divisibilidad por* 2: Un número entero positivo es divisible por 2, si la cifra de la unidad es 0, 2, 4, 6 u 8. Por ejemplo, $\underline{4}$, $1\underline{2}$, $3\underline{0}$, $15\underline{6}$, $204\underline{8}$, etc. son divisibles por 2 porque la cifra de la unidad es 0, 2, 4, 6 u 8.

(iii) *Divisibilidad por* 3: Un número entero positivo es divisible por 3, si es 3, 6, 9 o la suma de sus *cifras*[20] da 3, 6 o 9. En caso de dar un número mayor que 10, se vuelve a sumar las cifras hasta obtener un número del 1 al 9. Por ejemplo, 6 , 12 pues $1 + 2 = 3$, 51 pues $5 + 1 = 6$, 234 pues $2 + 3 + 4 = 9$, 1563 pues $1 + 5 + 6 + 3 = 15$ y $1 + 5 = 6$, 98136 pues $9 + 8 + 1 + 3 + 6 = 27$ y $2 + 7 = 9$, etc. son divisibles por 3.

(iv) *Divisibilidad por* 4: Un número entero positivo es divisible por 4, si es 4 u 8 o si sus dos últimas cifras (cifras de la decena y de la unidad) son ceros o múltiplo de 4. Por ejemplo, 8, $24 = 4 \cdot 6$, $2\underline{00}$, $5\underline{48}$ pues $48 = 4 \cdot 12$, etc son divisibles por 4.

(v) *Divisibilidad por* 5: Un número entero positivo es divisible por 5, si la cifra de la unidad es 0 o 5. Por ejemplo, $\underline{5}$, $2\underline{0}$, $6\underline{5}$, $14\underline{0}$, $247\underline{5}$, $300\underline{0}$, etc. son divisibles por 5 porque la cifra de la unidad es 0 o 5.

[20] Números dígitos que lo forman.

(*vi*) *Divisibilidad por* 6: Un número entero positivo es divisible por 6, si es divisible por 2 y por 3 al mismo tiempo. Esto quiere decir que debe verificar las condiciones de divisibilidad por 2 y por 3 simultáneamente. Por ejemplo, 6 es divisible por 2 y por 3, $1\underline{8}$ y porque $1 + 8 = 9$, $4\underline{2}$ y porque $4 + 2 = 6$, etc. son divisibles por 6, al ser divisibles por 2 y por 3 a la vez.

(*vii*) *Divisibilidad por* 7: Un número entero positivo es divisible por 7, si es múltiplo de 7. Por ejemplo, $7 = 7 \cdot 1, 14 = 7 \cdot 2, 35 = 7 \cdot 5, 49 = 7 \cdot 7, 77 = 7 \cdot 11, 105 = 7 \cdot 15$, etc son divisibles por 7, pues son múltiplos de 7.

(*viii*) *Divisibilidad por* 8: Un número entero positivo es divisible por 8, si es 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96 o sus tres últimas cifras son ceros o múltiplo de 8. Por ejemplo, $248 = 8 \cdot 31$, $6\underline{000}$, $3\underline{216}$ pues $216 = 8 \cdot 27$, etc. son divisibles por 8.

(*ix*) *Divisibilidad por* 9: Un número entero positivo es divisible por 9, si es 9 o la suma de sus cifras da 9. En caso de dar un número mayor que 10, se vuelve a sumar las cifras hasta obtener un número del 1 al 9. Por ejemplo, 9, 45 pues $4 + 5 = 9$, 324 pues $3 + 2 + 4 = 9$, 5643 pues $5 + 6 + 4 + 3 = 18$ y $1 + 8 = 9$, etc. son divisibles por 9.

(*x*) *Divisibilidad por* 10: Un número entero positivo es divisible por 10, si la cifra de la unidad es 0. Por ejemplo, $6\underline{0}$, $11\underline{0}$, $25\underline{0}$, $80\underline{0}$, $170\underline{0}$, etc. son divisibles por 10.

(*xi*) *Divisibilidad por* 11: Un número entero positivo es divisible por 11, si la *diferencia* o *resta* de la suma de las cifras que ocupan los lugares impares menos la suma de las cifras que ocupan los lugares pares da 0, $\pm 11, \pm 22, \pm 33, \pm 44$, etc. Por ejemplo, el número $2\underline{8}5\underline{6}3\underline{7}$ es divisible por 11, ya que las cifras 8, 6, 7 son las que ocupan los lugares impares ($5°, 3°$ y $1°$ de derecha a izquierda y que están subrayados) y su suma es: $8 + 6 + 7 = 21$. Y por otro lado las cifras 2, 5, 3 son las que ocupan los lugares pares ($6°, 4°$ y $2°$ de derecha a izquierda y que están sin subrayar) y su suma es: $2 + 5 + 3 = 10$. Luego, la diferencia entre ellas es $21 - 10 = 11$ o también, $10 - 21 = -11$. Es decir, ± 11[21].

(*xii*) *Divisibilidad por* 25: Un número entero positivo es divisible por 25, si es 25, 50 o 75 o si sus dos últimas cifras son 00, 25, 50 o 75. Por ejemplo, $\underline{75}$, $3\underline{50}$, $14\underline{25}$, $52\underline{00}$, etc. son divisibles por 25.

(*xiii*) *Divisibilidad por* 100: Un número entero positivo es divisible por 100, si sus dos últimas cifras son 00. Por ejemplo, $3\underline{00}$, $42\underline{00}$, $10\underline{00}$, $72\underline{00}$, $351\underline{00}$, etc. son divisibles por 100.

[21] El signo $\pm$ se lee *más o menos*, es decir, la combinación entre los signos $+$ y $-$.

(xiv) *Divisibilidad por* 1000: Un número entero positivo es divisible por 1000, si sus tres últimas cifras son 000. Por ejemplo, $4\underline{000}$, $53\underline{000}$, $50\underline{000}$, $100\underline{000}$, $2364\underline{000}$, etc. son divisibles por 1000.

3.2.8 Primos y compuestos

Definición Dado un número entero p, distinto de $0, 1$ y -1. Decimos que p es *primo*, si solamente es divisible por él mismo, su opuesto (en signo), el 1 y el -1 y ningún otro más. Es decir, p es primo si tiene exactamente cuatro divisores distintos, a saber: $p, -p, 1$ y -1.

Ejemplo El número entero 2 es primo, puesto que 2 es distinto de $0, 1$ y -1, y sus únicos divisores enteros son: $2, -2, 1$ y -1.

Definición Dado un número entero c, distinto de $0, 1$ y -1. Decimos que c es *compuesto*, si no es primo[22].

Ejemplos Los números enteros 8 y 25 son compuestos, porque son distintos de $0, 1$ y -1 y además, no son primos.

Observaciones Respecto al conjunto de divisores de $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

(1) Si $a \neq 1, -1, 0$ entonces

- a es primo si, y sólo si, $D(a) = \{-1, 1, -a, a\}$, es decir, la cantidad de elementos de $D(a)$ es exactamente 4, es decir, $\#\big(D(a)\big) = 4$.
- a es compuesto si, y sólo si, la cantidad de elementos de $D(a)$ es mayor a 4, es decir, $\#\big(D(a)\big) > 4$.

(2) Si $a = \pm 1$, es decir, $a = 1$ o $a = -1$ entonces $D(a) = \{-1, 1\}$, es decir, la cantidad de elementos de $D(a)$ es 2, esto es, $\#\big(D(a)\big) = 2$. Por este hecho, 1 y -1 no son primos ni compuestos.

3.2.8.1 Métodos para encontrar números primos positivos

Va a ser de mucha utilidad tener presente que:

Dado $a \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 1$ entonces siempre existe un número primo positivo p que divide a a. De acá, si a es compuesto entonces existe un número primo positivo p menor o igual que a que divide a a.

(I) <u>Criba de Eratóstenes:</u>

Supongamos que queremos encontrar el conjunto de números primos menores o iguales a 38. Podemos proceder de la siguiente manera:

[22] De acuerdo a la definición anterior de número primo.

- Consideremos la lista de todos los números enteros positivos menores o iguales a 38. Vamos a ir tachando todos aquellos números que no sean primos, y al terminar, los números que no están tachados son los primos que buscamos. En primer lugar tachamos el número 1 ya que no es primo.

$\cancel{1}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38		

- Ahora bien, nos ubicamos en el siguiente número de la grilla, que es el 2. Si 2 no fuese primo entonces existiría un número primo positivo p menor a 2 que divida a 2 por lo dicho en la introducción previa. Pero como esto no ocurre, resulta que 2 es primo. Además, ningún otro múltiplo de 2 puede ser primo, ya que serían divisibles por 2. Así que en la lista, recuadramos el número 2 que ya probamos que es primo y tachamos todos los múltiplos de 2.

$\cancel{1}$	$\boxed{2}$	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	15	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
21	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	27	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	33	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$		

- Ahora, el primer número que no está tachado ni marcado, es decir, el número 3 debe ser primo. En efecto, si 3 no fuese primo entonces existiría un número primo positivo menor a 3 que divida a 3 por lo dicho en la introducción previa. Pero el único primo positivo menor a 3 es 2 y ya sabemos que 3 no es divisible por 2. Por lo tanto, 3 es primo y ningún otro múltiplo de 3 puede ser primo, ya que si lo fuese, sería divisible por 3. Recuadramos el número 3 y tachamos todos los números de la criba que sean múltiplos de 3,

$\cancel{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$		

- A continuacón, el primer número que no está tachado ni marcado, es decir, el número 5 debe ser primo. En efecto, si 5 no fuese primo entonces existiría un número primo positivo menor a 5 que divida a 5 por lo dicho en la introducción previa. Pero los primos positivos menores a 5 son 2 y 3, y ya sabemos que ninguno divide a 5. Por lo tanto, 5 es primo y ningún otro múltiplo de 5 puede ser primo, ya que si lo fuese, sería divisible por 5. Recuadramos el número 5 y tachamos todos los números de la criba que sean múltiplos de 5,

$\cancel{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$	$\boxed{5}$	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$		

- El proceso continua de la misma forma, hasta que todos los números de la criba estén marcados o tachados.

$\cancel{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$	$\boxed{5}$	$\cancel{6}$	$\boxed{7}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
$\boxed{11}$	$\cancel{12}$	$\boxed{13}$	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\boxed{17}$	$\cancel{18}$	$\boxed{19}$	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	$\boxed{23}$	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	$\boxed{29}$	$\cancel{30}$
$\boxed{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	$\boxed{37}$	$\cancel{38}$		

- Finalmente, los números primos positivos menores a 38 son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ y 37.

(II) Método de la raíz:

Un método para identificar a un número primo positivo es el siguiente: *Un número entero positivo $n \geqslant 2$ es primo, si no es divisible por todo número primo positivo p tal que $p \leqslant \sqrt{n}$.*

Ejemplos El número $17 \geqslant 2$ es primo, porque no es divisible por 2 ni por 3 que son los primos positivos menores o iguales a $\sqrt{17} \cong 4,123105626\ldots$ (con calculadora).

En cambio, $25 \geqslant 2$ no es primo, porque 25 es divisible por 5, que es uno de los primos positivos menores o iguales que $\sqrt{25} = 5$, por más que 2 y 3 no lo dividan.

Los números primos positivos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

3.2.9 Descomposición en factores primos

El *Teorema fundamental de la aritmética*, también conocido como *Teorema de la factorización única*, afirma que "todo número entero positivo mayor que 1: o es un número primo o, bien, puede descomponerse como producto de factores primos, y esta factorización es única, salvo el orden de los factores".

Ejemplos

(a) Consideremos el número 8. Es obvio que es un entero positivo mayor a 1 y que no es primo, ya que es divisible por 2. Expresemos a 8 como producto de dos números enteros positivos, pongamos $8 = 4 \cdot 2$. Ahora bien, observemos los factores en esta representación, sabemos que 2 es primo pero 4 no es primo. Por lo que debemos descomponer a 4 como producto de dos números enteros positivos, a saber $4 = 2 \cdot 2$ y 2 es primo. Por lo tanto, $8 = 4 \cdot 2 = (2 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, cuyo factor primo es 2 (tres veces).

(b) Consideremos ahora el número 18. Es obvio que es un entero positivo mayor a 1 y que no es primo, ya que es divisible por 2 y por 3. Expresemos a 18 como producto de dos números enteros positivos, pongamos $18 = 6 \cdot 3$. Observemos los factores en esta representación, sabemos que 3 es primo, pero 6 no lo es. Así descomponemos a 6 como producto de dos enteros positivos, a saber $6 = 2 \cdot 3$ y ambos factores son primos. Luego, $18 = 6 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$, cuyos factores primos son: 2 (una vez) y 3 (dos veces).

Este razonamiento, que ilustra el enunciado del teorema fundamental de la aritmética, podemos resumirlo para fines prácticos, en la siguiente regla:
Supongamos que queremos descomponer en factores primos el número 210. Podemos proceder de la siguiente manera:
$\boxed{\text{Paso 1}}$ Escribimos el número 210 y al lado trazamos una línea vertical. Como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r|l} 210 & \\ & \\ & \end{array}$$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Del lado derecho de la línea anterior colocamos solo números primos, comenzando con el menor primo que divida a 210, que en este caso es 2. Abajo de 210 colocamos el cociente de la división entre 210 y 2.

$$\begin{array}{r|l} 210 & \boxed{2} \longrightarrow \text{menor primo que divide a 210} \\ 105 & \\ & \end{array}$$

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Ahora bien, continuamos con el mismo proceso: colocamos del lado derecho de la línea el menor número primo que divide a 105, que es 3, y abajo de éste colocamos el cociente de dividir 210 entre 3. Reiteramos este proceso que termina cuando obtenemos cociente 1, en la parte izquierda de la tabla.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{\text{PASO 4}}$ La factorización del número 210 es la multiplicación de todos los números primos que se ubicaron del lado derecho en la tabla anterior, esto es, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

3.2.9.1 Una aplicación interesante

Desarrollamos un método para encontrar la *cantidad de divisores* de un número entero positivo, es decir, dado $a \in \mathbb{Z}^+$, calculamos $\#\big(D^+(a)\big)$. Posteriormente, determinamos los elementos de $D^+(a)$. Mas aún, conociendo esto, podremos conocer la contidad de elementos de $D(a)$ y su cardinalidad.

Supongamos que queremos encontrar $\#\big(D^+(72)\big)$, podemos proceder de la siguiente manera:

$\boxed{\text{PASO 1}}$ Descomponemos a 72 como producto de factores primos

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

$\boxed{\text{PASO 2}}$ Para conocer $\#\big(D^+(72)\big)$, multiplicamos los *exponentes* de los factores primos en la factorización de 72 *aumentados en una unidad*. Por lo tanto,

$$\#\big(D^+(72)\big) = (3 + \mathbf{1}) \cdot (2 + \mathbf{1}) = 4 \cdot 3 = 12$$

Si además, queremos conocer los elementos del conjunto $D^+(72)$, para escribirlo por extensión, seguimos los pasos siguientes.

$\boxed{\text{PASO 3}}$ Construimos una tabla. En la parte superior colocamos las potencias de 2, desde 2^0 hasta 2^3, y en la columna izquierda colocamos las potencias de 3, desde 3^0 hasta 3^2, como se muestra a continuación:

1	2	4	8
3			
9			

$\boxed{\text{PASO 4}}$ Ahora se multiplica el número 3 por los números de la primera fila, es decir, por 2; 4 y 8. Los resultados los colocamos en las casillas de la segunda fila, como se muestra a continuación:

1	2	4	8
3	6	12	24
9			

$\boxed{\text{PASO 5}}$ Multiplicamos el número 9 por los números de la primera fila : $2; 4$ y 8. Los resultados los colocamos en la tercera fila.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

Los números resultantes de esta última tabla son los elementos del conjunto $D^+(72)$. Por lo tanto,

$$D^+(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}.$$

Conociendo los elementos de este conjunto, podremos determinar el conjunto de divisores enteros negativos de 72, tomando los opuestos de cada uno de los divisores enteros positivos de 72. Así,

$$D^-(72) = \{-1, -2, -3, -4, -6, -8, -9, -12, -18, -24, -36, -72\}.$$

Entonces, tenemos que $D(72) = D^+(72) \cup D^-(72)$. Así, por el Principio de Adición, debido a que $D^+(72)$ y $D^-(72)$ son disjuntos, resulta que:

$$\#\big(D(72)\big) = \#\big(D^+(72)\big) + \#\big(D^-(72)\big)^{23} = 12 + 12 = 24\,.$$

[23] O bien, $\#\big(D(72)\big) = 2 \cdot \#\big(D^+(72)\big)$, puesto que $\#\big(D^+(72)\big) = \#\big(D^-(72)\big)$.

3.2.10 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Definición Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que alguno de los dos no sea cero, esto es, $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Definimos el *máximo común divisor* entre a y b, que denotamos $m.c.d.(a, b)$, como el máximo entre los divisores positivos comunes de a y b.

Esto es, el $m.c.d.(a, b) = c$ si, y sólo si,

(i) c es un divisor común entre los divisores positivos de a y b, es decir, $c \in D^+(a) \cap D^+(b)$.

(ii) c es el elemento máximo (último elemento) entre los divisores positivos de a y b que tengan en común, o bien, el mayor[24] entero positivo que divide a a y b en simultáneo, es decir, $c = \max\Big(D^+(a) \cap D^+(b)\Big)$.

Ejemplo Supongamos que queremos calcular $m.c.d.(12, 18)$ podemos proceder de la siguiente manera:
$\boxed{\text{Paso 1}}$ Determinamos los conjuntos finitos $D^+(12)$ y $D^+(18)$, como se muestra a continuación:

$$D^+(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \qquad \text{y} \qquad D^+(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Determinamos los elementos *comunes* entre los conjuntos $D^+(12)$ y $D^+(18)$. Esto es, hallamos

$$D^+(12) \cap D^+(18) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Ahora bien, el $m.c.d.(12, 28) = 6$, puesto que es el elemento máximo de $D^+(12) \cap D^+(18)$.
Observaciones Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces

(1) Siempre $D^+(a) \cap D^+(b) \neq \emptyset$. En efecto:

Notemos que 1 es un divisor positivo de a y de b. En consecuencia, $1 \in D^+(a)$ y $1 \in D^+(b)$. Luego, existe $1 \in D^+(a) \cap D^+(b)$.

(2) Siempre es posible encontrar un elemento que sea máximo en $D^+(a) \cap D^+(b)$. En efecto:

Como $D^+(a) \cap D^+(b) \subseteq D^+(a)$, por por la propiedad (I_3) de la intersección, y puesto que $D^+(a)$ es finito, entonces $D^+(a) \cap D^+(b)$ es finito, por la propiedad (F_1) de conjuntos finitos e infinitos. Y además, como $D^+(a) \cap D^+(b) \subseteq \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, entonces por la propiedad (N_7) de la subsubsección 3.1.1.1 resulta que $D^+(a) \cap D^+(b)$ tiene elemento máximo (y mínimo también).

[24] En el sentido del orden $\leqslant$ de los enteros positivos, que es el orden usual de los naturales.

Estas son las razones que fundamentan la existencia del máximo común divisor entre dos enteros dados. A lo sumo, en varios ejercicios, podremos encontrarnos con que $D^+(a) \cap D^+(b) = \{1\}$, en cuyo caso el $m.c.d.(a,b) = 1$. Este hecho da lugar al concepto de números enteros coprimos.

Definición Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que son coprimos cuando $m.c.d.(a,b) = 1$.

Ejemplo Los números enteros 4 y 15 son coprimos, debido a que $m.c.d.(4,15) = 1$.

Definición Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que ninguno de los dos sea cero, esto es, $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Definimos el *mínimo común múltiplo* entre a y b, que denotamos $m.c.m.(a,b)$, como el mínimo entre los múltiplos positivos comunes de a y b.
Esto es, $m.c.m.(a,b) = c$ si, y sólo si,

(i) c es un múltiplo común entre los múltiplos positivos de a y b, es decir, $c \in M^+(a) \cap M^+(b)$.

(ii) c es el elemento mínimo (primer elemento) entre los múltiplos positivos de a y b que tengan en común, o bien, el menor[25] entero positivo que es múltiplo de a y b en simultáneo, es decir, $c = \min\Big(M^+(a) \cap M^+(b)\Big)$.

Ejemplo Para calcular $m.c.m\ (12,18)$ podemos proceder de la siguiente manera:

$\boxed{\text{PASO 1}}$ Determinamos los conjuntos infinitos $M^+(12)$ y $M^+(18)$, como se muestra a continuación:

$$M^+(12) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \text{ es múltiplo de } 12\} \qquad \text{y} \qquad M^+(18) = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \text{ es múltiplo de } 18\}.$$

Escribimos la secuencia ordenada de los elementos de los conjuntos anteriormente mencionados:

- *múltiplos positivos de* 12: $12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, \ldots$

- *múltiplos positivos de* 18: $18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, \ldots$

$\boxed{\text{PASO 2}}$ Determinamos los elementos *comunes* entre los conjuntos $M^+(12)$ y $M^+(18)$. Esto es, hallamos $M^+(12) \cap M^+(18)$ que va a ser un conjunto infinito también y, por lo tanto, es no vacío por la propiedad (F_2) de conjuntos finitos e infinitos, es decir, $M^+(12) \cap M^+(18) \neq \emptyset$. Luego, puesto que el conjunto $M^+(12) \cap M^+(18) \subseteq \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, entonces por la propiedad (N_6) de la subsubsección 3.1.1.1 el conjunto $M^+(12) \cap M^+(18)$ tiene elemento mínimo o primer elemento.

[25] Como antes, en el sentido del orden $\leqslant$ de los enteros positivos, que es el orden usual de los naturales.

Escribamos la secuencia ordenada de los elementos de $M^+(12) \cap M^+(18)$:

$$36, 72, 108, \ldots$$

$\boxed{\text{PASO 3}}$ Ahora bien, el $m.c.m.(12, 28) = 36$, puesto que es el elemento mínimo de $M^+(12) \cap M^+(18)$.

Observaciones Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces

(1) Siempre $M^+(a) \cap M^+(b) \neq \emptyset$. En efecto:

Notemos que el *valor absoluto de* $a \cdot b$, esto es, $|a \cdot b|$ es un múltiplo positivo de a y de b. En consecuencia, $|a \cdot b| \in M^+(a)$ y $|a \cdot b| \in M^+(b)$. Luego, existe $|a \cdot b| \in M^+(a) \cap M^+(b)$.

(2) Siempre es posible encontrar un elemento que sea mínimo en $M^+(a) \cap M^+(b)$. En efecto:

Como $M^+(a) \cap M^+(b) \neq \emptyset$, por el ítem anterior, y puesto que $M^+(a) \cap M^+(b) \subseteq \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, entonces por la propiedad (N_6) de la subsubsección 3.1.1.1 resulta que $M^+(a) \cap M^+(b)$ tiene elemento mínimo.

3.2.10.1 Relación entre el m.c.m. y el m.c.d.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, a partir del $m.c.d.(a, b)$ podemos determinar el $m.c.m.(a, b)$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c} |a \cdot b| & m.c.d.(a,b) \\ \cline{2-2} \boxed{0} & m.c.m.(a,b) \end{array} .$$

Esto es, la división entera entre $|a \cdot b|$ y $m.c.d.(a, b) \neq 0$ es exacta y su cociente es $m.c.m.(a, b)$, ya que $|a \cdot b|$ es divisible por $m.c.d.(a, b)$. Por lo que podemos poner que $|a \cdot b| : m.c.d.(a, b) = m.c.m.(a, b)$, ya que por el algoritmo de la división entera tenemos que $|a \cdot b| = m.c.d.(a, b) \cdot m.c.m.(a, b)$.

Ejemplo En virtud a los ejemplos que hemos trabajado anteriormente:

$$m.c.m.(12, 18) = |12 \cdot 18| : m.c.d.(12, 18) = |216| : 6 = 216 : 6 = 36$$

tal como habíamos concluido anteriormente.

3.2.10.2 Método alternativo para encontrar el m.c.m. y el m.c.d.

Alternativamente, podemos encontrar el *máximo común divisor* ($m.c.d.$) o *divisor común mayor* entre dos o más números enteros, como *el producto de los factores primos* *<u>comunes</u>*[26]*, con su menor exponente,*

[26] Que aparezca en *todas* las factorizaciones.

y el *mínimo común múltiplo* (*m.c.m.*) o *múltiplo común menor* entre dos o más números enteros, como *el producto de los factores primos comunes y no comunes, con su mayor exponente.*

Ejemplo Hallemos el *m.c.d.* y el *m.c.m.* entre 4, 8 y 12 .

Primero factorizamos cada número entero descomponiéndolos por sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Así, la factorización de $4 = 2 \cdot 2 = \underline{2}^2$, la de $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{2}^3$ y la de $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{2}^2 \cdot 3^1$. Por lo tanto, el

$$m.c.d.(4, 8, 12) = \underline{2}^2 = 4\,,$$

puesto que $\underline{2}$ es el factor primo común (el único, en este caso) y el *cuadrado* ($\square^2$) es el menor de los exponentes con el que aparece en las factorizaciones, y por otro lado, el

$$m.c.m.(4, 8, 12) = \underline{2}^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24\,,$$

puesto que $\underline{2}$ es el factor primo común (el único, en este caso) y el *cubo* ($\square^3$) es el mayor de los exponentes con el que aparece en las factorizaciones, multiplicado por el factor primo no común 3 (el único también, en este caso) elevado al exponente *uno* ($\square^1$), que generalmente no se escribe, que es el mayor de los exponentes con el que aparece en las factorizaciones, porque no hay otros exponentes para comparar.

Otra forma de hallar el $m.c.d.(4, 8, 12)$ y el $m.c.m.(4, 8, 12)$ es a través de la tradicional *tabla conjunta* de factorización por números primos, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccc|cl} 4 & 8 & 12 & \boxed{2} & \rightarrow \text{ divide a todos (es un } \textit{divisor primo común}) \\ 2 & 4 & 6 & \boxed{2} & \rightarrow \text{ divide a todos (es un } \textit{divisor primo común}) \\ 1 & 2 & 3 & 2 & \\ & 1 & 3 & 3 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Luego, el *m.c.d.* es el producto de todos los divisores primos comunes marcados en la columna derecha de la tabla y el *m.c.m.* es el producto de todos los factores primos de la derecha de la tabla. Esto es,

$$m.c.d.(4, 8, 12) = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{y} \quad m.c.m.(4, 8, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Nota En caso de no encontrarse un divisor primo común, se considera como máximo común divisor al único *divisor común* posible que es el 1 (uno).

3.3 Números fraccionarios

De los casos en que el cociente de números enteros se tenga que el dividendo no sea múltiplo del divisor, surge la necesidad de originar los números fraccionarios $\mathbb{F}$.

Específicamente estos números aparecieron con el objetivo de expresar porciones o partes de un entero o unidad. Un número fraccionario positivo es cociente o división de dos números naturales o enteros positivos, que se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \text{barra} & & n \longrightarrow \text{numerador} \\ \text{fraccionaria} & \longleftarrow & \overline{m} \longrightarrow \text{denominador} \end{array}$$

donde los números $n, m \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ y n no es múltiplo de m, es decir, $n \neq k \cdot m$ para cualquier $k \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.

Ejemplos $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}$ (que se leen: *un medio*, *tres quintos*, *cuatro séptimos* y *tres cuartos* respectivamente) son números fraccionarios positivos, por ser cociente de números naturales o enteros positivos, donde el numerador no es múltiplo del denominador. Al conjunto de las fracciones positivas lo simbolizaremos con $\mathbb{F}^+$.

Así, el conjunto de los números fraccionarios positivos es

$$\mathbb{F}^+ = \left\{ \frac{n}{m} \, : \, n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ no es un múltiplo de } m \right\}.$$

Observación Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $n = \frac{n}{1}$, pero no es fraccionario positivo, puesto que n es múltiplo de 1 siempre, por lo que solamente n es un número natural simplemente.

Llamamos números fraccionarios negativos al conjunto

$$\mathbb{F}^- = \left\{ -\frac{n}{m} \, : \, \frac{n}{m} \in \mathbb{F}^+ \right\}.$$

Finalmente, el conjunto de los números fraccionarios, que simbolizamos con $\mathbb{F}$, es el conjunto formado por la unión de las fracciones positivas junto con las negativas. En símbolos,

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^+ \cup \mathbb{F}^-.$$

3.3.1 Fracciones equivalentes e irreducibles

Definición Decimos que dos fracciones positivas son *equivalentes*[27] cuando las multiplicaciones entre los números naturales que son el numerador de una con el denominador de otra, dan el mismo resultado. En símbolos, dadas $\frac{n}{m}, \frac{h}{k} \in \mathbb{F}^+$, decimos que:

$$\frac{n}{m} \text{ y } \frac{h}{k} \text{ son equivalentes si, y sólo si, } n \cdot k = h \cdot m.$$

Para facilitar la escritura, de ahora en adelante vamos a poner el signo = entre dos fracciones que sean equivalentes. Así, dadas $\frac{n}{m}, \frac{h}{k} \in \mathbb{F}^+$ tenemos que son equivalentes, es decir, con la nueva notación

$$\boxed{\frac{n}{m} = \frac{h}{k}} \iff \boxed{n \cdot k = h \cdot m}.$$

3.3.1.1 Métodos para encontrar fracciones equivalentes

(I) Amplificación:

Consiste en *multiplicar tanto el numerador como el denominador de una fracción positiva por un mismo número natural o entero positivo.*

Ejemplo Si multiplicamos tanto el numerador como el denominador de la fracción positiva $\frac{4}{6}$ por el número natural 5, se obtiene una nueva fracción positiva, a saber $\frac{20}{30}$ que resulta ser equivalente a la dada al principio, esto es,

$$\frac{4}{6} = \frac{20}{30},$$

puesto que $\underbrace{4 \cdot 30}_{120} = \underbrace{20 \cdot 6}_{120}$.

(II) Reducción:

Consiste en *dividir tanto el numerador como el denominador de una fracción positiva por un mismo número natural o entero positivo*, siempre y cuando sea posible.

Ejemplo Si dividimos tanto el numerador como el denominador de la fracción positiva $\frac{9}{12}$ por el número natural 3, se obtiene una nueva fracción positiva, a saber $\frac{3}{4}$ que resulta ser equivalente a la dada al principio, esto es,

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4},$$

[27]En este contexto, la equivalencia es una generalización, del concepto de igualdad. Usamos la *equivalencia* para referirnos a objetos que a simple vista son distintos pero que aluden al mismo ente matemático.

puesto que $\underbrace{9 \cdot 4}_{36} = \underbrace{12 \cdot 3}_{36}$.

Definición Tres o más fracciones positivas se dicen equivalentes, si *tomando de a pares*[28] resultan que son equivalentes. Esto es, dadas $\frac{n}{m}, \frac{h}{k}, \frac{i}{j}, \ldots \in \mathbb{F}^+$ son equivalentes, es decir,

$$\boxed{\frac{n}{m} = \frac{h}{k} = \frac{i}{j} = \ldots} \text{ si, y sólo si, } \boxed{\frac{n}{m} = \frac{h}{k}} \text{ y } \boxed{\frac{h}{k} = \frac{i}{j}} \text{ y } \boxed{\frac{n}{m} = \frac{i}{j}} \text{ y } \ldots.$$

El concepto de fracciones positivas equivalentes puede transmitirse con facilidad entre las fracciones negativas, de la siguiente manera:

Definición Dos o más fracciones negativas se dicen equivalentes, si sus correspondientes fracciones positivas lo son.

Definición Decimos que una fracción es irreducible si el numerador y el denominador son enteros positivos coprimos. Esto es, la fracción $\frac{n}{m}$ es irreducible si $m.c.d.(n, m) = 1$.

Ejemplo La fracción $\frac{4}{5}$ es irreducible, debido a que 4 y 5 son coprimos, pues el $m.c.d.(4, 5) = 1$.

Definición Llamamos *simplificación* al procedimiento de encontrar una fracción irreducible[29] equivalente a un fracción dada, mediante el método de reducción.

3.3.2 Fracciones propias e impropias

Definición Llamamos *fracciones propias* a aquellas fracciones cuyo numerador sea menor que su denominador, ambos en valor absoluto.

Ejemplos Las fracciones $\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$ son fracciones propias, puesto que $\underbrace{|3|}_{3} < \underbrace{|5|}_{5}$ y $\underbrace{|-1|}_{1} < \underbrace{|2|}_{2}$ respectivamente.

Definición Llamamos *fracciones impropias* a aquellas fracciones cuyo numerador sea mayor que su denominador, ambos en valor absoluto.

Ejemplos Las fracciones $\frac{7}{4}$ y $-\frac{5}{3} = \frac{-5}{3}$ son fracciones impropias, puesto que $\underbrace{|7|}_{7} > \underbrace{|4|}_{4}$ y $\underbrace{|-5|}_{5} > \underbrace{|3|}_{3}$ respectivamente.

3.4 Números racionales

El conjunto de los números fraccionarios unido a los números enteros forma el conjunto de los números racionales. Al conjunto de los números racionales lo denotamos con $\mathbb{Q}$ (por la palabra inglesa *quotient*

[28] Considerando, en todas las posibilidades, sólo dos fracciones positivas por vez.

[29] Que ya no pueda reducirse más.

que significa *cociente*). Así, tenemos que

$$(\diamond) \ \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}.$$

Por comprensión, tenemos

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}.$$

En general, toda expresión de la forma $\frac{a}{b}$ se lee *a sobre b* y expresa la *razón* o *cociente* de los números enteros a y b, con $b \neq 0$.

Observaciones

(1) Por $(\diamond)$, es fácil ver que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{F}$ son subconjuntos de $\mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Q}$, y además $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{F}$ son disjuntos, esto es, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{F} = \emptyset$.

(2) El número racional de la forma $\frac{a}{1}$ es el cociente entre los números enteros a y 1, que claramente representa al número entero a. Por este motivo, también se concluye que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Ejemplos

(*a*) $\frac{-1}{2} \in \mathbb{Q}$, porque $-1, 2 \in \mathbb{Z}$ y $2 \neq 0$;

(*b*) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, porque $3, 5 \in \mathbb{Z}$ y $5 \neq 0$;

(*c*) $\frac{4}{-7} \in \mathbb{Q}$, porque $4, -7 \in \mathbb{Z}$ y $-7 \neq 0$;

(*d*) $\frac{-6}{-8} \in \mathbb{Q}$, porque $-6, -8 \in \mathbb{Z}$ y $-8 \neq 0$;

(*e*) $\frac{9}{3} \in \mathbb{Q}$, porque $9, 3 \in \mathbb{Z}$ y $3 \neq 0$;

(*f*) $\frac{0}{4} \in \mathbb{Q}$, porque $0, 4 \in \mathbb{Z}$ y $4 \neq 0$.

En cambio:

(*g*) $\frac{5}{0} \notin \mathbb{Q}$, puesto que si bien $5, 0 \in \mathbb{Z}$, el denominador es igual a 0.

Recordar: "En un número racional el *denominador*[30] no puede ser 0 (cero), debe ser distinto 0".

Observaciones

(1) *Todo número entero es número racional*, es decir, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, puesto que cualquiera que sea $a \in \mathbb{Z}$ se puede escribir de la forma:

[30] El que está debajo de la barra fraccionaria.

$$\frac{a}{1},$$

esto es, $a = \dfrac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, porque $a, 1 \in \mathbb{Z}$ y $1 \neq 0$. Por ejemplo, $2 = \dfrac{2}{1} \in \mathbb{Q}$.

(2) Es fácil ver que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{Q}$, esto es, *todo número fraccionario es número racional.*

(3) Como se dijo el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es igual a la unión de los números enteros $\mathbb{Z}$ con los números fraccionarios $\mathbb{F}$, es decir,

$$\boxed{\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}}.$$

Notaciones

– Cualquier número racional que tenga por numerador al 0 y por denominador un número entero cualquiera, distinto de 0, es igual a 0 (cero). Por ejemplo, $\dfrac{0}{5} = 0$.

– Un número racional que tenga numerador y denominador negativos es igual al racional con numerador y denominador positivos. Por ejemplo, $\dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

– Un número racional que tenga numerador positivo y denominador negativo es igual al racional con numerador negativo y denominador positivo. Por ejemplo, $\dfrac{5}{-4} = \dfrac{-5}{4}$. En este último caso, que claramente representa a los números racionales negativos, ponemos el signo $(-)$ menos delante de la barra fraccionaria y, de ahora en más, asumimos que es negativo el numerador y positivo el denominador. Por ejemplo, $-\dfrac{5}{4} = \dfrac{-5}{4}$.

– Un número racional que tenga por numerador y denominador al mismo número entero (que no sea el 0) representa al entero 1 (uno). En símbolos, $\dfrac{a}{a} = 1$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$. Por ejemplo, $\dfrac{5}{5} = 1$ y $\dfrac{-7}{-7} = 1$.

– Un número racional que tenga por numerador al opuesto (en signo) del denominador (exceptuando al 0) representa al entero -1. Por ejemplo, $\dfrac{4}{-4} = -1$ y $\dfrac{-6}{6} = -1$.

– Cuando el numerador sea un múltiplo del denominador se igualará al resultado de la división exacta entre ellos (que va ser un número entero). Por ejemplo, $\dfrac{8}{2} = 4$, porque 8 es múltiplo de 2 y porque $8 \div 2 = 4$.

– Si para un racional cualquiera existe un número entero positivo o natural, distinto de 1, que divida tanto al numerador como al denominador, procedemos a dividir a ambos por ese número y de ser posible continuamos con este proceso de simplificación del número racional hasta llegar a una fracción irreducible o a un número entero. Por ejemplo, simplifiquemos el número racional $\dfrac{30}{24}$

$$\begin{array}{lc} & 5 \\ \text{(dividimos 10 en 2)} & \cancel{10} \\ \text{(dividimos 30 en 3)} & \cancel{30} \\ \text{(dividimos 24 en 3)} & \overline{\cancel{24}} \\ \text{(dividimos 8 en 2)} & \cancel{8} \\ & 4 \end{array} = \frac{5}{4}.$$

La simplificación para en $\frac{5}{4}$ porque no existe ningún número entero positivo distinto de 1 que divida simultáneamente a 5 y a 4, es decir, 5 y 4 son coprimos, por este motivo a este tipo de fracciones se les llama *fracciones irreducibles*, porque ya no pueden simplificarse o reducirse más.

Nota Notemos que podría haberse dividido por 6 tanto al numerador como al denominador en la fracción $\frac{30}{24}$ y obtenido $\frac{5}{4}$ más rápidamente.

3.4.1 Suma y producto

Definición Dados dos números racionales cualesquiera, de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$, con $b \neq 0$, esto es, con el mismo denominador. Definimos la *suma de igual denominador*, como sigue:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}.$$

Ejemplo $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3+6}{5} = \frac{9}{5}$.

Definición Dados dos números racionales cualesquiera, de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$ tal que $b \neq d$, esto es, con distinto denominador. Definimos la *suma con diferente denominador*, como sigue:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}}.$$

Observaciones

(1) Si el resultado de la suma de racionales (de igual o diferente denominador) no es una fracción irreducible, debemos simplificarla hasta obtener una que sea irreducible o bien un entero.

(2) Si al sumar dos racionales que sean enteros, obviamente resolvemos la suma racional como suma de enteros aplicando el procedimiento clásico.

(3) Si al sumar dos racionales tenemos que uno de ellos sea entero y el otro una fracción, resolvemos la suma racional recordando que debemos considerar como denominador del entero al número 1 y aplicar el procedimiento de la suma con distinto denominador, esto es,

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + 1 \cdot b}{1 \cdot c} = \frac{a \cdot c + b}{c}.$$

Así,

$$\boxed{a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}}.$$

Ejemplos

(*a*) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \dfrac{8 + 15}{20} = \dfrac{23}{15}.$

(*b*) $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{-3 \cdot 2 + 4 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \dfrac{-6 + 20}{8} = \dfrac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{8}_{4}} = \dfrac{7}{4}.$

(*c*) $-2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{-2 \cdot 3 + 5}{3} = \dfrac{-6 + 5}{3} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}.$

Definición Dados dos números racionales cualesquiera, de la forma $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$. Definimos el *producto*, como sigue:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}.$$

Nota Para resolver un producto de racionales, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, para lo cual debe tenerse en cuenta la regla de los signos vista en la sección de enteros.

Observaciones

(1) Si el resultado del producto de racionales no es una fracción irreducible, debemos simplificarla hasta obtener una que sea irreducible o bien un entero.

(2) Si al multiplicar dos racionales que sean enteros, obviamente resolvemos el producto racional como producto de enteros aplicando el procedimiento clásico, para el cual se tendrá en cuenta la regla de los signos.

(3) Si al multiplicar dos racionales tenemos que uno de ellos sea entero y el otro una fracción, resolvemos el producto racional recordando que debemos considerar como denominador del entero al número 1 y aplicar el procedimiento del producto, esto es,

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Así,

$$\boxed{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}}.$$

Ejemplos

(*a*) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \dfrac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{12}_{6}} = \dfrac{5}{6}.$

(*b*) $-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{7}{6}\right)=\dfrac{(-3)\cdot(-7)}{5\cdot 6}=\dfrac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{30}_{\,10}}=\dfrac{7}{10}.$

(*c*) $\dfrac{3}{2}\cdot 8=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{8}{1}=\dfrac{3\cdot 8}{2\cdot 1}=\dfrac{\cancel{24}^{\,12}}{\cancel{2}_{\,1}}=12.$

3.4.1.1 Inverso racional

Dado cualquier número racional, de la forma $\dfrac{a}{b}\neq 0$, esto es, $a\neq 0$ y $b\neq 0$. Llamamos el *inverso de* $\dfrac{a}{b}$ al número racional $\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo El inverso de $-\dfrac{4}{7}$ es $-\dfrac{7}{4}$.

3.4.2 Números mixtos

Definición Llamamos *número mixto* al número racional cuya expresión numérica está compuesta por un número entero, distinto de cero, junto a una fracción propia irreducible positiva. Los números mixtos pueden ser, *positivos* o *negativos*, dependiendo del signo del número entero que acompaña a la fracción propia irreducible positiva, al que llamamos *parte entera*.

Ejemplos

Los números racionales cuyas expresiones numéricas son $2\,\dfrac{1}{2}$ y $-1\,\dfrac{2}{3}$ representan a números mixtos, el primero positivo y el segundo negativo.

Observaciones

(1) Los números mixtos tienen la forma general:

$$a\,\frac{b}{c}$$

donde $a\in\mathbb{Z}$, con $a\neq 0$, y en la fracción irreducible positiva el numerador b es menor que el denominador c.

(2) Los números mixtos positivos pueden interpretarse como:

$$a\,\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c},$$

siendo $a\in\mathbb{Z}^+$ y $\dfrac{b}{c}$ una fracción propia irreducible positiva.

(3) Los números mixtos negativos pueden interpretarse como:

$$-a\,\frac{b}{c}=-\left(a+\frac{b}{c}\right)=-a-\frac{b}{c},$$

siendo $-a\in\mathbb{Z}^-$ y $\dfrac{b}{c}$ una fracción propia irreducible positiva.

3.4.3 Orden racional

Definición Dados dos números racionales cualesquiera, de la forma $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, decimos que

$$\boxed{\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \text{ en } \mathbb{Q} \iff a \cdot d \leqslant b \cdot c \text{ en } \mathbb{Z}}.$$

O equivalentemente:

$$\boxed{\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \text{ en } \mathbb{Q} \iff a \cdot d \geqslant b \cdot c \text{ en } \mathbb{Z}}.$$

Nota El símbolo $\iff$ se lee *si, y sólo si.*

Ejemplos

(*a*) $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{5}{4}$ en $\mathbb{Q} \iff \underbrace{2 \cdot 4}_{8} \leqslant \underbrace{3 \cdot 5}_{15}$ en $\mathbb{Z}$.

(*b*) $-\dfrac{3}{2} \leqslant -\dfrac{1}{4}$ en $\mathbb{Q} \iff \underbrace{-3 \cdot 4}_{-12} \leqslant \underbrace{2 \cdot (-1)}_{-2}$ en $\mathbb{Z}$. $\left[\text{Recordando que: } -\dfrac{3}{2} = \dfrac{-3}{2} \text{ y } -\dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{4}\right]$

(*c*) $4 \geqslant \dfrac{7}{2}$ en $\mathbb{Q} \iff \underbrace{4 \cdot 2}_{8} \geqslant \underbrace{1 \cdot 7}_{7}$ en $\mathbb{Z}$. [Teniendo en cuenta que: $4 = \dfrac{4}{1}$]

De este manera, resulta que la relación $\leqslant$, definida recién, verifica las propiedades de orden $(O_1), (O_2)$ y (O_3), produciendo que $\mathbb{Q}$ con el orden $\leqslant$ es un conjunto ordenado.

3.4.3.1 Propiedades

En el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con el orden racional $\leqslant$, se verifican las siguientes propiedades:

(Q_1) $\mathbb{Q}$ es un *conjunto totalmente ordenado.*

(Q_2) $\mathbb{Q}$ no tiene elemento mínimo ni elemento máximo.

(Q_3) $\mathbb{Q}$ es un *conjunto no discreto*, esto es, entre dos números racionales distintos existen infinitos racionales. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.

3.4.4 Representación entera y expansión decimal

Todo número racional admite una representación entera o una expansión decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador, en caso de ser un número fraccionario.

Ejemplos

(a) $\dfrac{2364}{12} = 197$ [Representación entera]

(b) $-\dfrac{30}{10} = -3$ [Representación entera]

(c) $\dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ [Expansión decimal exacta]

(d) $1\,\dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4} = 1,75$ [Expansión decimal exacta]

(e) $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} = 0,33333\ldots = 0,\widehat{3}$ [Expansión decimal periódica pura]

(f) $\dfrac{1}{6} = 0,16666666666\ldots = 0,1\widehat{6}$ [Expansión decimal periódica mixta]

Algunas de estas expansiones decimales presentan una cantidad finita de cifras decimales, mientras que otras tienen una cantidad infinita de cifras decimales que se repiten indefinidamente en ciclos a partir de un cierto lugar en el desarrollo. A estos dos tipos de expansiones decimales se las llama *exactas* y *periódicas* respectivamente.

$$\text{Expansiones decimales}\begin{cases}\text{finitas} \longrightarrow \text{exactas}\\[2em] \text{infinitas} \longrightarrow \text{periódicas}\begin{cases}\text{puras}\\[1em] \text{mixtas}\end{cases}\end{cases}$$

Recíprocamente, dada una expansión decimal exacta o periódica, puede encontrarse el racional fraccionario que le corresponde.

Ejemplos

(a) $0,5 = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

(b) $0,\widehat{3} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

(c) $0,1\widehat{6} = \dfrac{16-1}{90} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6}$.

Para realizar esto se debe tener en cuenta que:

– Si la expansión decimal es exacta, se coloca como numerador el número entero que resulta de suprimir la "," (coma) y como denominador la unidad (1) seguida de tantos 0 (ceros) como cifras se encuentran a la derecha de la "," (coma) en la expansión decimal original.

Ejemplo $7,125 = \dfrac{7125}{1000} = \dfrac{57}{8}$.

Otra forma, sería encontrar algebraicamente el número racional fraccionario, digamos x, que representa a la expansión decimal $7,125$. Es decir, queremos hallar la fracción x tal que

$$x = 7,125.$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad anterior por 1000, para transformar la expansión decimal en un entero corriendo tres lugares hacia la derecha la coma, obtenemos

$$1000\,x = 7125$$

Por lo tanto, si multiplicamos miembro a miembro por $\dfrac{1}{1000}$, obtenemos que

$$x = \frac{1}{1000} \cdot 7125 = \frac{7125}{1000}$$

que al simplificar queda

$$x = \frac{57}{8}.$$

- Si la expansión decimal es periódica, se coloca como numerador el resultado de restar el número entero que resulta de suprimir la “,” (coma) y el arco de las cifras periódicas con el número entero que se obtiene juntando la parte entera con el anteperíodo (la decimal no periódica) y como denominador tantos nueves (9) como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros (0) como cifras tenga el anteperíodo en la expansión decimal original.

Ejemplos

(*a*) $3,2\overset{\frown}{53} = \dfrac{3253-32}{990} = \dfrac{3221}{990}$.

(*b*) $218,7\overset{\frown}{4} = \dfrac{21874-2187}{90} = \dfrac{19687}{90}$

Otra forma, sería encontrar algebraicamente el número racional fraccionario, digamos x, que representa a la expansión decimal periódica pura $0,\overset{\frown}{7}$. Esto es, queremos hallar la fracción x tal que

$$(1)\ x = 0,\overset{\frown}{7}.$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad (1) por 10, para transformar la expansión decimal periódica pura del segundo miembro en otra con el mismo período corriendo un lugar hacia la derecha la coma[31], obtenemos

[31]Puesto que el ciclo del período es de una cifra.

$$(2)\ 10\,x = 7,\widehat{7}$$

Si restamos cada miembro, de las igualdades obtenidas en (1) y (2) respectivamente, resulta que

$$10\,x - x = 7,\widehat{7} - 0,\widehat{7} = 7$$

Así,

$$9\,x = 7$$

Por lo tanto, si multiplicamos miembro a miembro por $\frac{1}{9}$, obtenemos que

$$x = \frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{7}{9}.$$

Observemos como funciona este mismo proceso algebraico cuando queremos encontrar el número racional fraccionario, digamos x, que representa a la expansión decimal periódica mixta $3,2\widehat{53}$. Es decir, queremos hallar la fracción x tal que

$$(1)\ x = 3,2\widehat{53}.$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad (1) por 10, para transformar la expansión decimal periódica mixta del segundo miembro en otra periódica pura corriendo un lugar hacia la derecha la coma[32], obtenemos

$$(2)\ 10\,x = 32,\widehat{53}$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad (2) por 100, para transformar la expansión decimal periódica pura del segundo miembro en otra periódica pura de igual período, corriendo dos lugares hacia la derecha la coma[33], obtenemos

$$(3)\ 1000\,x = 3253,\widehat{53}$$

Si restamos cada miembro, de las igualdades obtenidas en (3) y (2) respectivamente, resulta que

$$1000\,x - 10\,x = 3253,\widehat{53} - 32,\widehat{53} = 3221$$

[32]Para eliminar el anteperíodo de una cifra.
[33]Puesto que el ciclo del período es de dos cifras.

Así,

$$990\,x = 3221$$

Por lo tanto, si multiplicamos miembro a miembro por $\dfrac{1}{990}$, obtenemos que

$$x = \frac{1}{990} \cdot 3221 = \frac{3221}{990}.$$

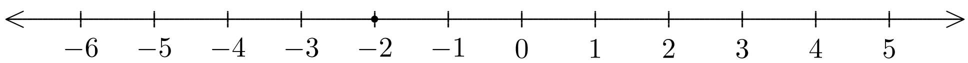
3.4.5 Representación gráfica

Si queremos representar en la recta numérica a un número racional, debemos tener presente el hecho de que

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F},$$

por lo que dicho número racional puede ser un entero o una fracción. A continuación se explica, el procedimiento en cada caso.

– Para señalar en la recta un número racional que sea un entero, colocamos un *afijo* ($\bullet$) sobre la marca que corresponde al número entero que estamos graficando. Por ejemplo, si se pide que se represente gráficamente al número entero -2 hacemos lo siguiente:



– Para señalar en la recta un número racional que sea una fracción procedemos de la siguiente manera:

1°) En caso de ser posible, *simplificamos* la fracción.

2°) Observamos el *signo* de la fracción, debido a que si es positiva la vamos a representar a la derecha del 0 y si es negativa la vamos a representar a la izquierda del 0.

3°) Trazamos una *semirrecta* con origen en el 0 que forme un *ángulo agudo* con parte positiva o negativa de la recta númerica dependiendo del signo de la fracción que vamos a representar.

4°) Graduamos y numeramos la semirrecta con una unidad conveniente (se sugiere una *escala* de 5 mm, es decir, medio cm) a partir del 0.

5°) Sobre la semirrecta marcamos al *numerador* y al *denominador* (con signos positivos).

6°) Unimos con un *segmento* la marca del denominador sobre la semirrecta con la marca del 1 o -1 sobre la recta numérica (según el signo que tenga la fracción).

7°) Trazamos una *paralela* al segmento anterior que pase por la marca del numerador hacia la recta numérica hasta que la corte.

8°) En el punto donde se corta la paralela con la recta numérica colocamos un *afijo* ($\bullet$), el cual representa a la fracción que queremos graficar.

Por ejemplo, representemos a la fracción:

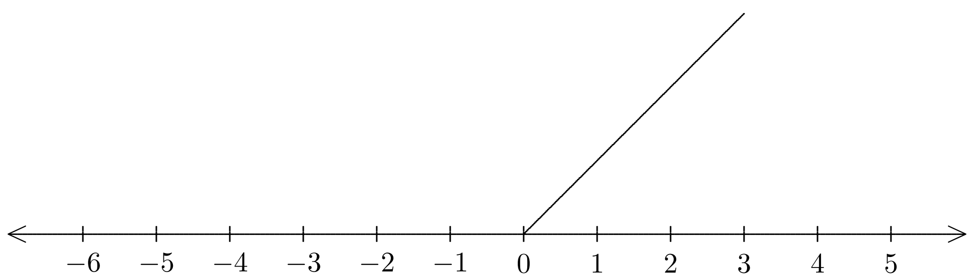
$$\frac{10}{15},$$

que es igual por simplificación a la fracción:

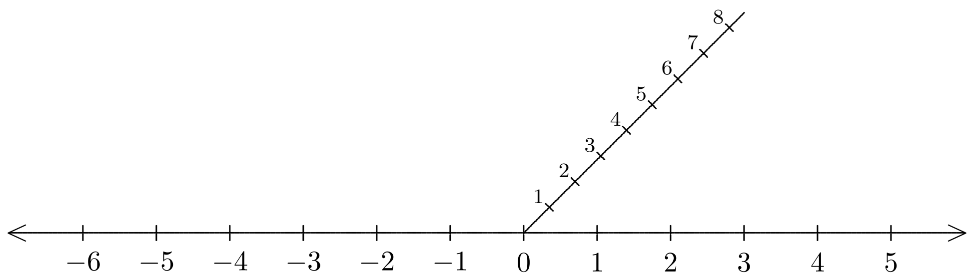
$$\frac{2}{3}.$$

Al ser una fracción positiva la representamos a la derecha del 0.

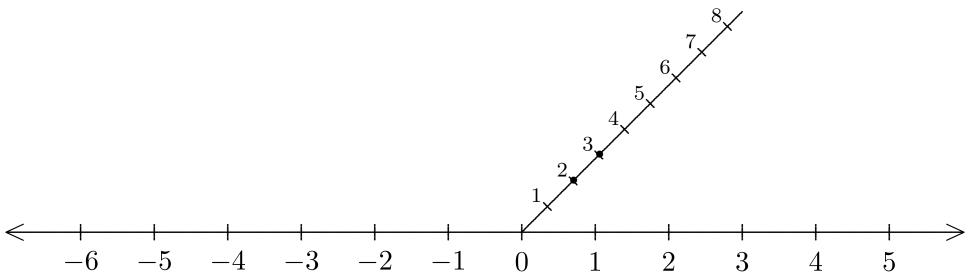
Trazamos una semirrecta con origen en el 0 que forme un ángulo agudo con la parte positiva de la recta numérica, como la que se muestra a continuación:



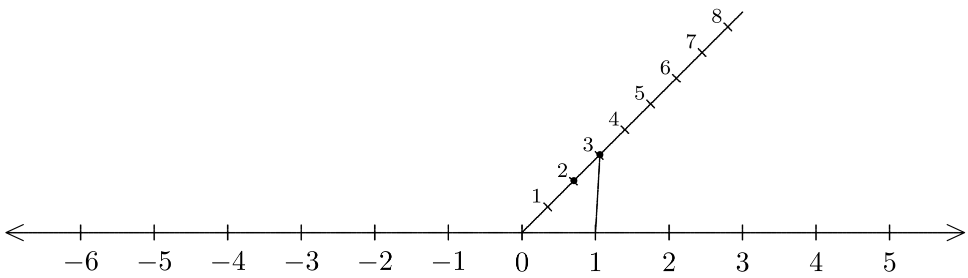
Graduamos y numeramos la semirrecta con unidades cada 5 mm a partir del 0, como se ve a continuación:



Sobre la semirrecta marcamos al numerador 2 y al denominador 3, como sigue:

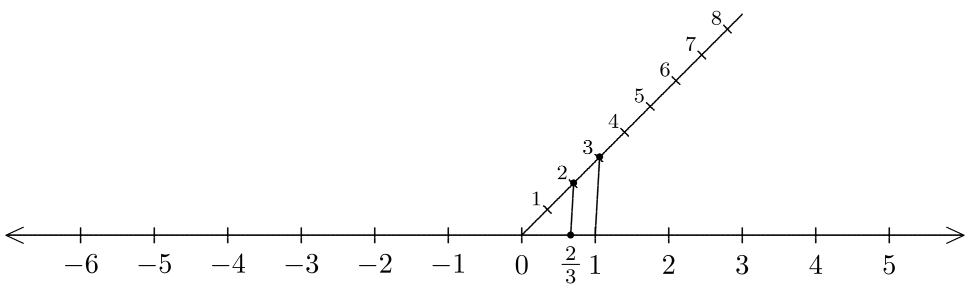


Unimos con un segmento la marca del denominador 3 sobre la semirrecta con la marca del 1 sobre la recta numérica, por tratarse de la representación de una fracción positiva.



Trazamos una paralela al segmento anterior que pase por la marca del numerador 2 hacia la recta numérica hasta que la corte.

En el punto donde se corta la paralela con la recta numérica colocamos un *afijo* ($\bullet$), que representa a la fracción $\frac{2}{3}$.



3.5 Números irracionales

Hasta el momento hemos visto los números racionales que están formados por los números enteros y los números fraccionarios. A estos últimos se los puede identificar con su expansión decimal que puede ser, como ya hemos visto, exacta (cantidad finita de cifras decimales) o periódica (cantidad infinita de cifras decimales con un bloque repetido indefinidamente en ciclos).

Ahora bien, prestemos atención a la siguiente expansión decimal:

$$1,0100100010000100000 1\ldots$$

Es evidente que no es un decimal exacto, porque la seguidilla de los dígitos 0 y 1 después de la coma es infinita. Y tampoco es un decimal periódico, porque no hay un ciclo de cifras después de la coma que se repita indefinidamente (cada vez se agrega un 0 más).
A los números que tengan una expansión decimal de este tipo (es decir, infinita no periódica) los llamamos números irracionales y los simbolizamos con $\mathbb{I}$. Esto es, el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales, por comprensión, es

$$\mathbb{I} = \{x \,:\, x \text{ es un número irracional}\}.$$

Un número es *irracional* si, y sólo si, no es número racional, es decir, *no puede expresarse como un cociente o razón de dos números enteros, con divisor distinto de cero.*
En símbolos,

$$x \in \mathbb{I} \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \neq \frac{a}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0.$$

Observaciones

(1) Se verifica que $\mathbb{I} \not\subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{I}$.

(2) Además, el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los números racionales son disjuntos, es decir, $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Ejemplos Son números irracionales:

(a) Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural.
Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt{6}$.

(b) Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero.
Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5} = -\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{13}$.

(c) El número π, utilizado para calcular la longitud de la circunferencia

$$\pi \cong [34]\; 3,141592653589\ldots$$

[34]El signo $\cong$ se lee *es aproximádamente igual a.*

(d) El número de Euler[35], que indicamos con e (base de los logaritmos naturales)

$$e \cong 2,718281828459\ldots$$

(e) El número de oro, conocido también como *número divino, número de Dios*, o *número áureo*, que indicamos con la letra griega φ[36], que se lee *fi*,

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618033988749\ldots$$

Recordar que:

– La expansión decimal de un número racional fraccionario *termina o se repite.*

– La expansión decimal de un número irracional *nunca termina ni se repite.*

3.5.1 Orden lexicográfico

Al *orden lexicográfico* se lo llama así, porque es el comportamiento que tienen los vocablos del diccionario al ordenarse alfabéticamente. Por eso, también se lo conoce como el *orden del diccionario.* Haciendo una analogía entre las letras del abecedario con los números enteros podemos utilizarlo para comparar cualquier par de números que estén expresados mediante sus expansiones decimales, en particular, para las de los números irracionales .

Para ordenar a dos números irracionales positivos expresados en decimales, lo primero que debemos hacer es comparar sus *componentes enteras*[37].

Si la componente entera de uno de los dos números irracionales es menor que la del otro, según el orden de los números enteros, entonces la desigualdad obtenida nos indica el orden que tienen en los irracionales.

Así por ejemplo, si queremos ordenar a los números irracionales π y e, cuyas expansiones decimales son respectivamente $3,141592653589\ldots$ y $2,718281828459\ldots$, mediante el orden lexicográfico, hacemos lo siguiente:

Comparamos sus componentes enteras $\underline{3}$ y $\underline{2}$ según el orden de los enteros, obteniendo que $3 \geqslant 2$ en $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\underline{3},141592653589\ldots \geqslant \underline{2},718281828459\ldots$. Esto es,

$$2,718281828459\ldots \leqslant 3,141592653589\ldots, \text{ es decir, } e \leqslant \pi.$$

[35]Se pronuncia *Oiler*.

[36]En honor al escultor griego *Fidias*.

[37]La componente entera es aquel número entero ubicado antes de la coma decimal en su expansión.

Si las componentes enteras fuesen las mismas debemos comparar las cifras decimales que están después de la coma, comenzando por el primer lugar, es decir, los *décimos*, teniendo en cuenta el orden de los enteros entre 0 y 9, es decir, los números dígitos[38] que es

$$0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 5 \leqslant 6 \leqslant 7 \leqslant 8 \leqslant 9.$$

Por ejemplo, para ordenar π y $\sqrt{10}$ cuyas expansiones decimales son:

$$3,141592653589\ldots \text{ y } 3,162277660168\ldots,$$

respectivamente. Al tener la misma componente entera que es 3 en las dos expansiones, comparamos las primeras cifras decimales que es $\underline{1}$ en ambas expansiones. Pero al ser también iguales, comparamos las segundas cifras y así siguiendo hasta encontrar la diferencia en el orden de los dígitos. En nuestro ejemplo, tenemos que $\pi \leqslant \sqrt{10}$, puesto que en la segunda cifra decimal resulta que $\underline{4} \leqslant \underline{6}$, produciendo que $3,1\underline{4}1592653589\ldots \leqslant 3,1\underline{6}2277660168\ldots$ según el orden lexicográfico.
Finalmente, el orden de los números irracionales negativos es inverso[39] al de los irracionales positivos. Así, el conjunto de los números irracionales $I\!I$ con el orden lexicográfico introducido previamente resulta ser un conjunto ordenado, puesto que dicho orden verifica claramente las propiedades (O_1), (O_2) y (O_3).

3.5.1.1 Propiedades

En el conjunto de los números irracionales $I\!I$ con el orden lexicográfico $\leqslant$, se verifican las siguientes propiedades:

(I_1) $I\!I$ es un *conjunto totalmente ordenado.*

(I_2) $I\!I$ no tiene elemento mínimo ni elemento máximo.

(I_3) $I\!I$ es un *conjunto no discreto*, esto es, entre dos números irracionales distintos existen infinitos irracionales. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números irracionales consecutivos.

3.5.2 Orden radical de raíces cuadradas no exactas de números naturales

Dados los números naturales n y m, que no sean cuadrados perfectos, resulta que el orden de los radicales positivos, que son irracionales positivos es:

$$\boxed{\sqrt{n} \leqslant \sqrt{m}} \text{ en } I\!I^+, \text{ si ocurre que } \boxed{n \leqslant m} \text{ en } I\!N.$$

[38] Esto es, el conjunto de los números dígitos $D = \{x \in Z\!\!\!Z : 0 \leqslant x \leqslant 9\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

[39] En sentido invertido.

O equivalentemente:

$$\boxed{\sqrt{n} \geqslant \sqrt{m}} \text{ en } \mathbb{I}^{+}, \text{ si ocurre que } \boxed{n \geqslant m} \text{ en } \mathbb{N}.$$

En los irracionales negativos que sean radicales negativos de raíz cuadrada no exacta de un número natural tenemos que se verifica el orden inverso:

$$\boxed{-\sqrt{n} \leqslant -\sqrt{m}} \text{ en } \mathbb{I}^{-} \quad \text{si, y sólo si, } \boxed{\sqrt{m} \leqslant \sqrt{m}} \text{ en } \mathbb{I}^{+}.$$

Ejemplos

(a) $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{3}$ en $\mathbb{I}^{+}$, puesto que $2 \leqslant 3$ en $\mathbb{N}$.

(b) $\sqrt{8} \geqslant \sqrt{6}$ en $\mathbb{I}^{+}$, puesto que $8 \geqslant 6$ en $\mathbb{N}$.

(c) $\sqrt{5} \leqslant \sqrt{7}$ en $\mathbb{I}^{+}$, puesto que $5 \leqslant 7$ en $\mathbb{N}$,

resultando que:

$-\sqrt{7} \leqslant -\sqrt{5}$ en $\mathbb{I}^{-}$, por lo anterior.

3.5.3 Representación gráfica

Recordemos, en primer lugar el famoso y conocido:

3.5.3.1 Teorema de Pitágoras

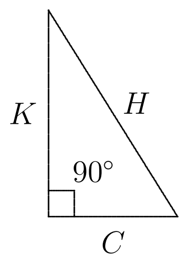
"En todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos".
Recordar que:

(i) Un triángulo es rectángulo si, y sólo si, tiene un ángulo interior recto, es decir, que mida 90°.

(ii) La *hipotenusa* es el lado del triángulo rectángulo opuesto al ángulo recto, es decir, el lado que está enfrente del ángulo recto.

(iii) Los *catetos* son los lados del triángulo rectángulo que forman el ángulo recto. Para diferenciarlos, a veces, se los suele llamar cateto mayor y cateto menor (si uno es más grande que el otro), pero también puede ocurrir que ambos midan lo mismo.

Gráficamente, tenemos que en el triángulo rectángulo



tenemos que H representa a la longitud de la *hipotenusa* y C, K representan a la longitudes de los *catetos*. En símbolos, la fórmula del Teorema de Pitágoras es:

$$\boxed{H^2 = C^2 + K^2}\,.$$

– Representación de un número irracional positivo que sea una raíz cuadrada no exacta de un número natural.

Llamamos raíz cuadrada no exacta de un número natural a la raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto. *Los números naturales cuadrados perfectos son aquellos números naturales que son potencias cuadradas de un número natural.* Por ejemplo, son cuadrados perfectos los números naturales: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, etc., debido a que:

$$1 = 1^2\,,\ \ 4 = 2^2\,,\quad 9 = 3^2\,,\quad 16 = 4^2\,,\quad 25 = 5^2,$$

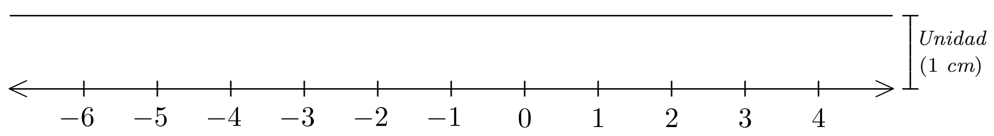
$$36 = 6^2\,,\quad 49 = 7^2\,,\quad 64 = 8^2\,,\quad 81 = 9^2\,,\quad 100 = 10^2$$

y así siguiendo.

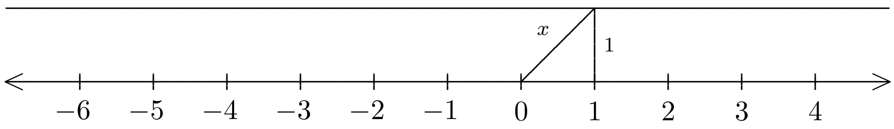
Para representar un irracional positivo que sea una raíz cuadrada no exacta, es decir, la raíz cuadrada de un número natural que no sea un cuadrado perfecto, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. procedemos de la siguiente manera:

Representemos, a modo de ejemplo, a la $\sqrt{2}$:

1°) Tracemos una recta horizontal paralela a la recta numérica a una distancia de *una unidad* de la escala considerada en la recta numérica. Recordemos que es conveniente usar sobre la recta numérica una escala de 1 cm ('2 cuadritos' de la hoja cuadriculada) por *unidad*, como sigue:



2°) Construimos un triángulo rectángulo de cateto horizontal de longitud 1, comprendido entre 0 y 1 sobre la recta numérica, y de cateto vertical de longitud 1 también, desde la marca del 1 sobre la recta numérica hasta su paralela horizontal, como se muestra a continuación:



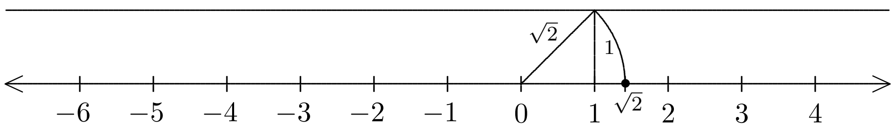
3°) Calculemos la longitud de la hipotenusa x, utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ x^2 &= 1 + 1 \\ x^2 &= 2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

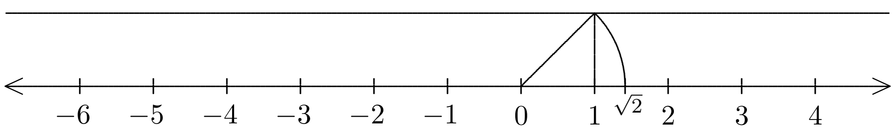
$$x = \sqrt{2}\,.$$

4°) Luego, con un compás, tomamos la longitud de la hipotenusa (que mide $\sqrt{2}$) y la llevamos a la recta númerica, colocando la "punta" del compás en la marca del 0 y haciendo un arco que corte a la recta numérica del lado de los positivos, es decir, a la derecha del 0 (puesto que $\sqrt{2}$ es un número irracional positivo). Finalmente donde el arco trazado con el compás corta a la recta numérica ponemos un afijo ($\bullet$) que representa a la $\sqrt{2}$.

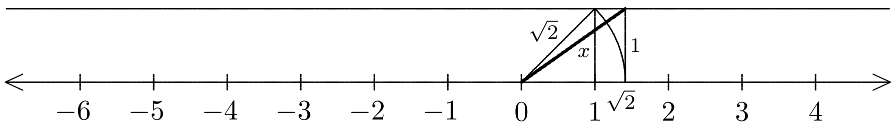


Para representar a la $\sqrt{3}$ procedemos de la siguiente manera:

1°) Construimos el triángulo rectángulo de catetos iguales a 1 (el de hipotenusa $\sqrt{2}$ realizado anteriormente) y marcamos $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica:



2°) Luego, construimos un nuevo triángulo rectángulo de cateto horizontal de longitud $\sqrt{2}$, comprendido entre 0 y $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, y de cateto vertical de longitud 1, desde la marca de $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica hasta su paralela horizontal, como puede verse en la figura:



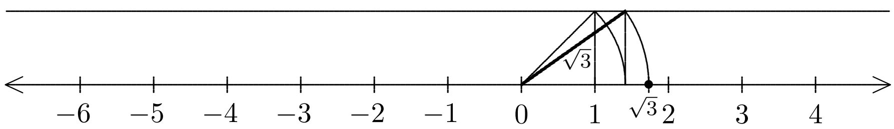
3°) Calculemos la longitud de la hipotenusa x (del segundo triángulo rectángulo), utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \\ x^2 &= 2 + 1 \\ x^2 &= 3 . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x = \sqrt{3}\,.$$

4°) Luego, con un compás, tomamos la longitud de la hipotenusa del segundo triángulo (que mide $\sqrt{3}$) y la llevamos a la recta númerica, colocando la "punta" del compás en la marca del 0 y haciendo un arco que corte a la recta numérica del lado de los positivos, es decir, a la derecha del 0 (puesto que $\sqrt{3}$ es un número irracional positivo). Finalmente donde el arco trazado con el compás corta a la recta numérica ponemos un afijo ($\bullet$) que representa a la $\sqrt{3}$.



Observación En todos los casos, *la raíz cuadrada no exacta de un número natural*, como lo son: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, etc. resultan ser la longitud de la *hipotenusa* de un triángulo rectángulo, como ocurrió con la representación de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, es decir, en el primer triángulo rectángulo la hipotenusa $x = \sqrt{2}$, o lo que es lo mismo, $x^2 = 2$, y en el segundo triángulo rectángulo la hipotenusa $x = \sqrt{3}$, o lo que es lo mismo, $x^2 = 3$.

Por lo que, para representar en la recta numérica a la $\sqrt{5}$, debemos encontrar un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa $x = \sqrt{5}$, o lo que es lo mismo, $x^2 = 5$.

Una forma rápida y sencilla, en este caso, consiste en utilizar los números naturales que son cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, etc.

Nuestra intensión es, de ser posible, *"expresar a x^2 como suma de cuadrados perfectos"*.

En nuestro caso tenemos que $x = \sqrt{5}$, por lo que $x^2 = 5$. Luego,

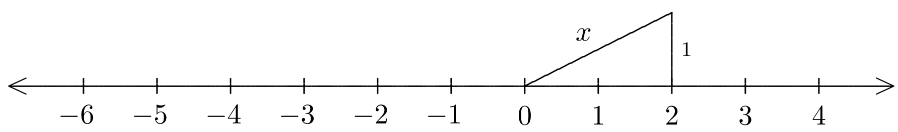
$$x^2 \;=\; 4 \;+\; 1\,,$$

es decir, $x^2 = 5$ es la suma de los cuadrados perfectos 4 y 1.

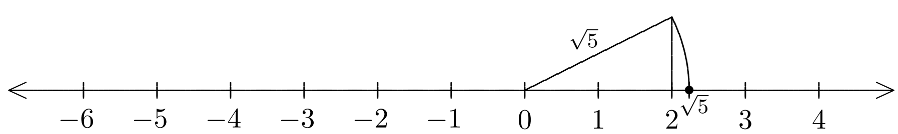
Por el Teorema de Pitágoras, tendríamos que:

$$x^2 \;=\; 2^2 \;+\; 1^2.$$

Finalmente, construimos el triángulo rectángulo cuyo cateto tenga longitud 2 sobre la recta numérica (comprendido entre 0 y 2), y el otro cateto de longitud 1 se traza verticalmente desde la marca del 2 sobre la recta numérica hacia arriba, resultando que la longitud de la hipotenusa $x = \sqrt{5}$ (por lo dicho previamente), como se muestra en la figura:



Luego, con un compás, tomamos la longitud de la hipotenusa, que mide $\sqrt{5}$, y la llevamos a la recta numérica, colocando la "punta" del compás en la marca del 0 y haciendo un arco que corte a la recta numérica del lado de los positivos, es decir, a la derecha del 0 puesto que $\sqrt{5}$ es un número irracional positivo. Finalmente donde el arco trazado con el compás corta a la recta numérica ponemos un afijo ($\bullet$) que representa a la $\sqrt{5}$, como se muestra a continuación:



Observación Si se nos pide representar a $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ y $-\sqrt{5}$, procedemos igual que antes considerando los mismos triángulos utilizados para representar a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente y al finalizar marcamos las longitudes de las hipotenusas hacia la izquierda del 0 por tratarse de números irracionales negativos.

- Representación de un número irracional positivo que no sea una raíz cuadrada:

  Si tenemos que representar en la recta numérica a un número irracional positivo que no sea una raíz cuadrada, lo primero que hacemos es redondear[40] su expansión decimal a un decimal exacto y después vemos entre que números enteros y decimales se encuentra. Por ejemplo, el número irracional

  $$\pi \cong 3,141592653589\ldots$$

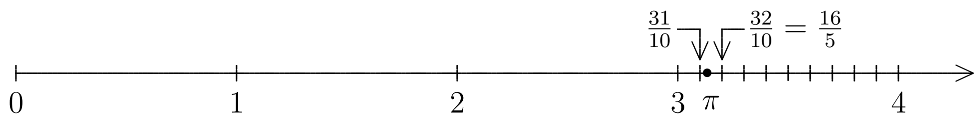
  que tiene infinitos decimales no periódicos y que usualmente suele nombrarse mediante la aproximación:

  $$3,14$$

  que es su redondeo a centésimos, resultando un decimal exacto que puede transformarse a fracción. Luego, el número $3,14$ es racional.

  El número $3,14$ se encuentra entre los números enteros 3 y 4, y más precisamente, entre los decimales exactos $3,1$ y $3,2$ que escritos en forma fraccionaria son $\dfrac{31}{10}$ y $\dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5}$, que claramente están en la zona comprendida por los números enteros 3 y 4.

  Por lo tanto, el número irracional positivo π se encuentra entre los números racionales $\dfrac{31}{10}$ y $\dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5}$. Gráficamente, ampliando la graduación de la escala para tener una mejor visualización, resulta que:



3.6 Números reales

Al conjunto formado por los números racionales junto con los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo simboliza con $\mathbb{R}$. Esto es, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

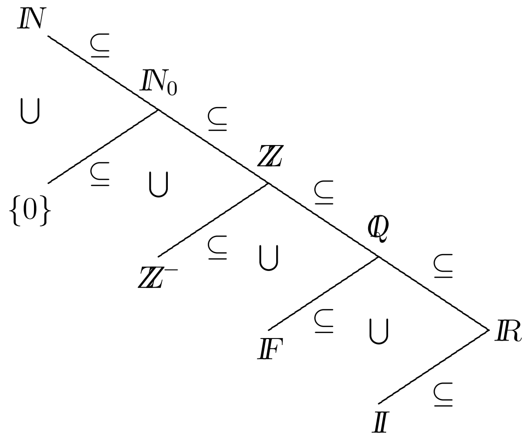
Por comprensión,

$$\mathbb{R} = \{a : a \text{ es un número real}\}.$$

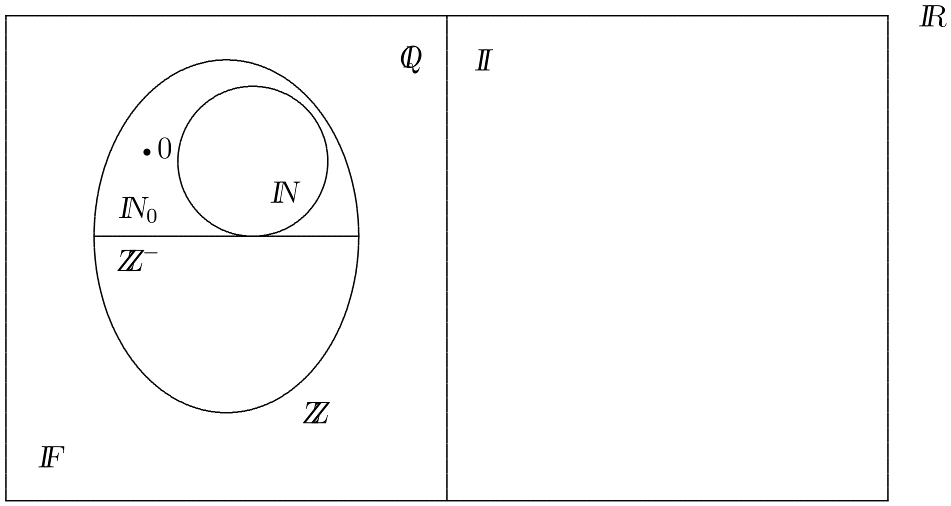
[40] En general, aproximamos a *centésimos*, que es el segundo lugar después de la coma en la expansión decimal de un número.

El símbolo $a \in \mathbb{R}$ significa que a *es un número real*.

Luego tenemos el siguiente esquema que relaciona a los conjuntos numéricos que conocemos hasta el momento:



Si utilizamos diagramas de Venn, tenemos el siguiente dibujo que muestra la relación que existe entre los conjuntos numéricos que conocemos hasta el momento:



3.6.1 Signo de un número real

(R_1) Un número real puede ser: *positivo, negativo* o *cero*, esto es, si $a \in \mathbb{R}$ entonces puede suceder que:

$$a > 0\,,\ \text{es decir,}\ \ a\ \ \text{es positivo,}\ \ \text{o}$$

$$a < 0\,,\ \text{es decir,}\ \ a\ \ \text{es negativo,}\ \ \text{o}$$

$$a = 0\,,\ \text{es decir,}\ \ a\ \ \text{es el número real 0.}$$

Nota El signo $<$ se lee *es menor que* y el signo $>$ se lee *es mayor que.*

Con la simbología previa, definimos por un lado

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

como el *conjunto de los números reales positivos*, y por otro lado

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

como el *conjunto de los números reales negativos.*

Luego, con $\mathbb{R}^+_0 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ indicamos al *conjunto de los números reales positivos con el cero* y con $\mathbb{R}^-_0 = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ indicamos al *conjunto de los números reales negativos con el cero*, que por comprensión se escriben:

$$\mathbb{R}^+_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^-_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}.$$

Finalmente, tenemos que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^+_0 \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-_0\,.$$

Observaciones

(1) Los conjuntos $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$ son el complemento uno del otro en $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{I} = \mathbb{Q}^C = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} = \mathbb{I}^C = \mathbb{R} - \mathbb{I}$.

(2) El número real 0 no es positivo ni negativo, es decir, $0 \notin \mathbb{R}^+$ y $0 \notin \mathbb{R}^-$.

(3) Los conjuntos $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ y $\{0\}$ son disjuntos tomados de a dos, esto es, $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, $\mathbb{R}^+ \cap \{0\} = \emptyset$ y $\{0\} \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$.

(4) Los conjuntos $\mathbb{R}^+_0$ y $\mathbb{R}^-$ son disjuntos, como así también los conjuntos $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-_0$, es decir, $\mathbb{R}^+_0 \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$ y $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-_0 = \emptyset$.

3.6.2 Operaciones

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales están definidas las operaciones binarias *suma* o *adición* (+), *producto* o *multiplicación* ($\cdot$), *resta* o *diferencia* ($-$) y *cociente* o *división* (:) que satisfacen las siguientes propiedades:

3.6.2.1 Suma o adición

(A_1) Cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica que $a + b \in \mathbb{R}$. Esto significa que *"la suma de dos números reales dá por resultado un número real".* [O.B.I.]

(A_2) Cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifica que $(a+b)+c = a+(b+c)$. [Asociativa]

(A_3) Cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica que $a+b = b+a$. Esto significa que *"el orden de los sumandos no altera la suma"*. [Conmutativa]

(A_4) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a+0 = a$, esto es, 0 es el *neutro* en la suma de números reales, ya que *sumar* 0 *a cualquier número real no afecta al número real.*

[Existencia del neutro aditivo]

(A_5) Para cada número real a, existe un único número real que simbolizamos con $-a$, llamado el *opuesto de* a tal que $a+(-a) = 0$. Esto significa que *"si se suma un número real con su opuesto dá por resultado* 0 (que es el neutro de la suma de números reales)".

[Existencia del opuesto (o inverso aditivo)]

(A_6) Si $x = a$ entonces

$$x+b = a+b$$

cualquiera sea $b \in \mathbb{R}$. Esto significa que *"si se suma a ambos miembros de una igualdad un mismo número real, la igualdad se mantiene"*. [Uniforme]

(A_7) Si $x+b = a+b$ para cualquier $b \in \mathbb{R}$, entonces podemos cancelar el sumando b miembro a miembro en la igualdad anterior de la siguiente manera:

$$x+\cancel{b} = a+\cancel{b}\,,$$

resultando que

$$x = a\,.$$

Esto significa que *"si se elimina el mismo sumando en ambos miembros de una igualdad, esta se mantiene"*. [Cancelativa]

Observaciones

(1) La validez de la propiedad asociativa nos permite eliminar los paréntesis al sumar.

(2) En general, el opuesto de un número real se obtiene cambiando el signo del número real, siempre que el número sea positivo o negativo.

(3) El opuesto de 0 es el mismo 0, es decir, $-0 = 0$, porque el 0 *no es positivo ni negativo*[41] y además, porque se verifica que $0+0 = 0$.

[41] Por este hecho se dice que 0 no tiene signo.

3.6.2.2 Multiplicación o producto

(M_1) Cualesquiera sean $a, b \in I\!R$, se verifica que $a \cdot b \in I\!R$. Esto significa que *"el producto de dos números reales dá por resultado un número real"*. [O.B.I.]

(M_2) Cualesquiera sean $a, b, c \in I\!R$, se verifica que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. [Asociativa]

(M_3) Cualesquiera sean $a, b \in I\!R$, se verifica que $a \cdot b = b \cdot a$. Esto significa que *"el orden de los factores no altera el producto"*. [Conmutativa]

(M_4) Existe $1 \in I\!R$ tal que para todo $a \in I\!R$ se tiene que $a \cdot 1 = a$, esto es, 1 es el *neutro* en el producto de números reales, ya que *multiplicar por* 1 *a cualquier número real no afecta al número real.*

[Existencia del neutro multiplicativo]

(M_5) Para cada número real a, $a \neq 0$, existe un único número real que simbolizamos con $\dfrac{1}{a}$, llamado el *inverso de* a tal que $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$. Esto significa que *"si se multiplica un número real distinto de cero por su inverso dá por resultado* 1 (que es el neutro del producto de números reales)".

[Existencia del inverso (u opuesto multiplicativo)]

(M_6) Si $x = a$ entonces

$$x \cdot b = a \cdot b$$

cualquiera sea $b \in I\!R$. Esto significa que *"si se multiplica a ambos miembros de una igualdad un mismo número real, la igualdad se mantiene"*. [Uniforme]

(M_7) Si $x \cdot b = a \cdot b$ para cualquier $b \in I\!R$, con $b \neq 0$, entonces podemos simplificar el factor b miembro a miembro en la igualdad anterior de la siguiente manera:

$$x \cdot \cancel{b} = a \cdot \cancel{b}\,,$$

resultando que

$$x = a\,.$$

Esto significa que *"si se elimina el mismo factor, distinto de cero, en ambos miembros de una igualdad, esta se mantiene"*. [Simplificación]

Observaciones

(1) La validez de la propiedad asociativa nos permite eliminar los paréntesis al multiplicar.

(2) El número real 1 es positivo, es decir, $1 \in I\!R^+$, pues $1 > 0$.

(3) En general, el inverso de un número real distinto de cero se obtiene *dando vuelta*, o dicho más correctamente *invirtiendo* al número real dado y conservando su signo.

(4) El único número real que no tiene inverso es el 0 y, además, el inverso de un número real distinto de cero es también distinto de cero.

3.6.2.2.1 Propiedad distributiva

Para cualesquiera sean $a, b, c \in I\!R$, se verifica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números reales:

- por izquierda: $\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$.
- por derecha: $\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$.

3.6.2.3 Resta o diferencia

Sean $a, b \in I\!R$. Definimos la resta de a con b, como sigue:

$$a - b = a + (-b)\,,$$

donde a es el *minuendo* y b es el *sustraendo* en la resta $a - b$, y el símbolo $-b$ representa al *opuesto de* b. Es decir, *la resta de dos números reales se resuelve sumando al minuendo, el opuesto del sustraendo.*
Observación Con la definición previa de la resta o diferencia de números reales tenemos que es una *operación binaria interna*; que además verifica las propiedades: *uniforme* y *cancelativa*. El *neutro* es el 0 cuando es usado como sustraendo[42], esto es, para cualquier $a \in I\!R$ se tiene que $a - 0 = a$.

3.6.2.4 División o cociente

Sean $a, b \in I\!R$, con $b \neq 0$. Definimos la división de a en b, como sigue:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}\,,$$

donde a es el *dividendo* y b es el *divisor* en la división $a : b$, y el símbolo $\frac{1}{b}$ representa al *inverso de* b. Es decir, *la división de dos números reales, con divisor distinto de cero, se resuelve multiplicando al dividendo, el inverso del divisor.*

[42] Lo que se suele decir *neutro a derecha*.

Observación Con la definición previa de la división o cociente de números reales, tenemos que es una *operación binaria interna*, siempre y cuando el divisor sea distinto de cero; que además verifica las propiedades: *uniforme* y *simplificación*. El *neutro* es el 1 cuando es usado como divisor[43], esto es, para cualquier $a \in I\!R$ se tiene que $a : 1 = a$.

Notación De acuerdo a lo anterior, podemos escribir al cociente de los números reales a y b, con $b \neq 0$ de otra manera. En lugar de los *dos puntos* (:) colocamos la *barra fraccionaria* $\left(\_\_\right)$. Esto es,

$$a : b = \frac{a}{b}\,,$$

con $b \neq 0$.

3.6.2.4.1 Propiedad distributiva

Para cualesquiera sean $a, b, c \in I\!R$, con $c \neq 0$, se verifica sólo la propiedad distributiva por derecha del cociente respecto a la suma de números reales:

$$* \ \boxed{(a+b) : c = a : c + b : c}\,, \text{ o bien, } \boxed{\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}}\,.$$

Observación Ambas propiedades distributivas enunciadas anteriormente, también son válidas respecto a la resta de números reales, cuyas fórmulas se obtienen reemplazando el signo $+$ por $-$ en las expresiones anteriores.

<u>*Recordatorio:*</u> Al resolver un producto o un cociente hay que tener en cuenta la *regla de los signos*, que dice:

"positivo por (o dividido) positivo, resultado positivo",
"positivo por (o dividido) negativo, resultado negativo",
"negativo por (o dividido) positivo, resultado negativo",
"negativo por (o dividido) negativo, resultado positivo".

O bien, con la famosa *tabla de la regla de los signos*:

$+ \cdot + = +$	$+ : + = +$
$+ \cdot - = -$	$+ : - = -$
$- \cdot + = -$	$- : + = -$
$- \cdot - = +$	$- : - = +$

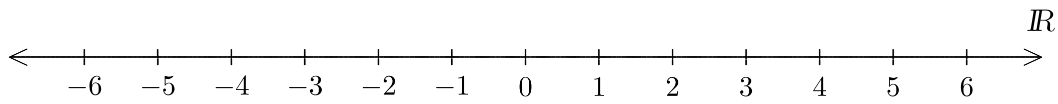
[43] Lo que se suele decir *neutro a derecha*.

3.6.3 Representación gráfica

El conjunto de los números reales se representa sobre una linea recta horizontal llamada *recta númerica* o *recta real.*

Cada punto de la recta númerica representa a un único número real y recíprocamente *a cada número real le corresponde un único punto de la recta numérica.*

Se fija un origen que representa al número 0, se considera un segmento unidad como escala, a la derecha del 0 se representan los reales positivos y a la izquierda los reales negativos, como se muestra a continuación:



3.6.4 Orden real

Para comparar dos números reales a y b, analizamos la *diferencia* de a y b, esto es, $a - b = a + (-b)$. Al ser $a - b$ un número real, puede ocurrir que:

$$(\star) \qquad a-b>0, \qquad \text{o} \qquad (\star\star) \qquad a-b<0, \qquad \text{o} \qquad (\star\star\star) \qquad a-b=0.$$

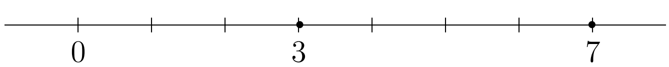
($\star$) Si $a - b > 0$, es decir, si la diferencia $a - b$ es positiva, entonces $b < a$. De esta manera, el punto asociado a a esta a la derecha del punto asociado a b sobre la recta numérica, o lo que es lo mismo, el punto asociado a b esta a la izquierda del punto asociado a a sobre la recta numérica.

($\star\star$) Si $a - b < 0$, es decir, si la diferencia $a - b$ es negativa, entonces $a < b$. De esta manera, el punto asociado a a esta a la izquierda del punto asociado a b sobre la recta numérica, o lo que es lo mismo, el punto asociado a b esta a la derecha del punto asociado a a sobre la recta numérica.

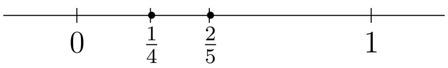
($\star\star\star$) Si $a-b = 0$, entonces resulta que $a = b$. De esta manera, el punto asociado a a y el punto asociado a b coinciden en la recta numérica, por tratarse del mismo número.

Ejemplos

(a) Comparemos 3 y 7. Es fácil resolver la diferencia $7 - 3 = 4$ y ver que es positiva, entonces $3 < 7$. Gráficamente:



(b) Comparemos $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{5}$. Es fácil resolver la diferencia $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$ y ver que es positiva, entonces $\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$. Gráficamente:



Así, el *orden* $\leqslant$ en el conjunto $I\!R$ de los números reales, se define como sigue:

Definición Dados dos números reales cualesquiera a y b, decimos que:

$$a \leqslant b \quad \text{si, y sólo si,} \quad a < b \quad \text{o} \quad a = b.$$

De este manera, resulta que la relación $\leqslant$, definida recién, verifica las propiedades de orden $(O_1), (O_2)$ y (O_3), produciendo que $I\!R$ con el orden $\leqslant$ es un conjunto ordenado.

Observaciones

(1) La propiedad (O_3) del orden de los números reales definido anteriormente, es la transitiva de $\leqslant$, que expresa que para cualesquiera sean $a, b, c \in I\!R$, si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.

(2) Para cualesquiera sean $a, b, c \in I\!R$, se tiene que

$$a \leqslant b \ \text{ y } \ b \leqslant c, \text{ es equivalente a decir que } a \leqslant b \leqslant c.$$

Esto es,

$$a \leqslant b \ \text{ y } \ b \leqslant c \iff a \leqslant b \leqslant c.$$

Y en consecuencia, $a \leqslant c$, por la propiedad transitiva (O_3).

Similarmente:

(3) Para cualesquiera sean $a, b, c \in I\!R$, se tiene que

$$a < b \ \text{ y } \ b < c, \text{ es equivalente a decir que } a < b < c.$$

Esto es,

$$a < b \ \text{ y } \ b < c \iff a < b < c.$$

3.6.4.1 Propiedades

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con el orden real $\leqslant$, se verifican las siguientes propiedades:

(R_2) $\mathbb{R}$ es un *conjunto totalmente ordenado.*

(R_3) $\mathbb{R}$ es un *conjunto no discreto.*

(R_4) $\mathbb{Q}$ es un *conjunto denso* en $\mathbb{R}$, es decir, dados dos números reales, donde uno sea menor que el otro, se verifica que existe un racional entre ellos, esto es, cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $a < b$, entonces se verifica que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

(R_5) $\mathbb{I}$ es un *conjunto denso* en $\mathbb{R}$, es decir, dados dos números reales, donde uno sea menor que el otro, se verifica que existe un irracional entre ellos, esto es, cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $a < b$, entonces se verifica que existe $x \in \mathbb{I}$ tal que $a < x < b$.

3.6.5 Valor absoluto

Definición Sea x un número real cualquiera, esto es, $x \in \mathbb{R}$. Definimos el *valor absoluto de x*, que lo simbolizamos con $|x|$, como el número real no negativo[44] definido de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0\,, \\ -x & \text{si} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Es decir, si el número real x es positivo o cero, $|x| = x$ y si el número real x es negativo, $|x| = -x$, donde el símbolo $-x$ representa al opuesto de x, esto es, si x es negativo, entonces su opuesto $-x$ es positivo.

Ejemplos

(a) $|3| = 3$, (b) $|0| = 0$, (c) $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, (d) $|-4| = -(-4) = 4$,

(e) $\left|-\sqrt{5}\right| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, (f) $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$.

Observaciones

(1) El cálculo del valor absoluto de un número real consiste en

hacerlo positivo

si el número es negativo, y

dejarlo como está

si el número es positivo o cero.

[44] Es decir, positivo o cero.

(2) La interpretación gráfica del valor absoluto de un número real x es su distancia al 0.

3.6.5.1 Propiedades

Para cualesquiera sean $x, y \in I\!R$, se verifica que:

(V_1) $|x| \geqslant 0$. [No negatividad]

(V_2) $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

(V_3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(V_4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$.

(V_5) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. [Desigualdad triangular]

(V_6) $|x| = |-x|$.

(V_7) $|x - y| = |y - x|$.

(V_8) $\sqrt{x^2} = |x|$. En general, vale que

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|\,,$$

para cualquier $n \in I\!N$ tal que n es par.

(V_9) Si $a > 0$ entonces,

$$|x| = a \text{ si, y sólo si, } x = \pm a, \text{ esto es, } x = a \text{ o } x = -a.$$

(V_{10}) Si $a > 0$ entonces,

$$|x| < a \text{ si, y sólo si, } -a < x \text{ y } x < a, \text{ que es equivalentemente a decir que } -a < x < a.$$

(V_{11}) Si $a > 0$ entonces,

$$|x| \leqslant a \text{ si, y sólo si, } -a \leqslant x \text{ y } x \leqslant a, \text{ que es equivalentemente a decir que } -a \leqslant x \leqslant a.$$

(V_{12}) Si $a > 0$ entonces,

$$|x| > a \text{ si, y sólo si, } x < -a \text{ o } x > a.$$

(V_{13}) Si $a > 0$ entonces,

$$|x| \geqslant a \text{ si, y sólo si, } x \leqslant -a \text{ o } x \geqslant a.$$

(V_{14}) $|x| = |y|$ si, y sólo si, $x = \pm y$, esto es, $x = y$ o $x = -y$.

(V_{15}) $|x| = y$ si, y sólo si, $x = y$ o $x = -y$, con $y \geqslant 0$.

(V_{16}) $|x| < |y|$ si, y sólo si, $(y < x$ o $-x < y)$ y $(y < -x$ o $x < y)$.

(V_{17}) $|x| \leqslant |y|$ si, y sólo si, $(y \leqslant x$ o $-x \leqslant y)$ y $(y \leqslant -x$ o $x \leqslant y)$.

3.6.6 Intervalos

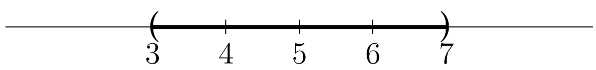
Frecuentemente se trabaja con porciones o fragmentos de la recta numérica, la cual representa al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Estos fragmentos, son subconjuntos de números reales conocidos con el nombre de *intervalos*, en cuyas cláusulas definitorias aparece alguna desigualdad.

Ejemplo

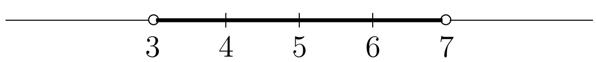
(a) Consideremos el conjunto A de los números reales mayores que 3 y menores que 7. Este conjunto A puede expresarse por comprensión como:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}.$$

El conjunto A anterior, también puede indicarse como $(3, 7)$, el cual es un intervalo acotado abierto. Se dice *acotado* porque sus extremos 3 y 7 son números reales y *abierto* porque sus extremos no pertenecen al intervalo, lo que se indica utilizando los paréntesis de apertura $\rightarrow$ $($ y paréntesis de clausura $\rightarrow$ $)$. Su representación gráfica es la siguiente:



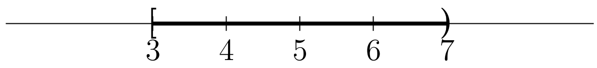
O bien



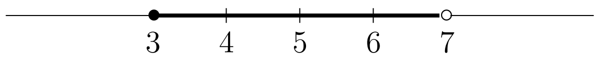
(b) Consideremos el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leqslant x < 7\}$. El conjunto B puede indicarse como el intervalo acotado semi-cerrado $[3, 7)$. Esto es,

$$B = [3, 7).$$

Gráficamente,



O bien,



Antes de dar la definición y clasificación de intervalos, vamos a introducir el símbolo '∞', conocido como *infinito* y el símbolo '$-\infty$' conocido como *menos infinito.* Tanto '∞' como '$-\infty$' no pertenecen al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, además se consideran hacia el *extremo infinito derecho* de la recta numérica del lado de los positivos y hacia el *extremo infinito izquierdo* de la recta numérica del lado de los reales negativos respectivamente.
Los *intervalos de números reales* son subconjuntos de $\mathbb{R}$, considerando al conjunto de los números reales como el conjunto referencial. Estos pueden clasificarse en *acotados* o *no acotados*, dependiendo de si ambos extremos son números reales o bien alguno de ellos es $\pm\infty$. Y además en *abiertos, cerrados, semi-abiertos o semi-cerrados*, dependiendo de si sus extremos reales pertenecen o no al intervalo.

A continuación definimos a los intervalos de números reales, indicando sus características:

3.6.6.1 Intervalos acotados

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$,

⋆ llamamos *intervalo acotado abierto de extremos* a *y* b, o simplemente *intervalo abierto* a, b al conjunto

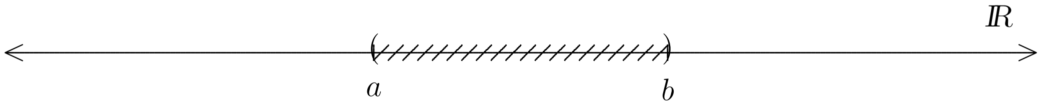
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

donde a es el extremo inferior y b es el extremo superior del intervalo.

Nota En el intervalo acotado abierto (a, b), sus extremos a, b no pertenecen al intervalo, es decir,

$$a, b \notin (a, b)\,.$$

Gráficamente,



Observación Cuando en el intervalo acotado abierto (a, b), los extremos a y b son iguales, es decir, cuando $a = b$ se obtiene que el intervalo

$$(a, a) = \emptyset.$$

⋆ llamamos *intervalo acotado cerrado de extremos* a *y* b, o simplemente *intervalo cerrado* a, b al conjunto

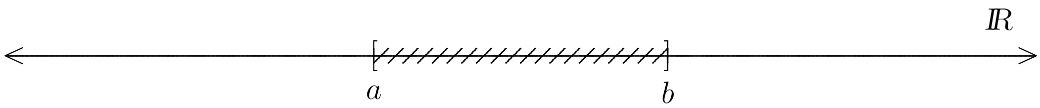
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\},$$

donde a es el extremo inferior y b es el extremo superior del intervalo.

Nota En el intervalo acotado cerrado $[a, b]$, sus extremos a, b pertenecen al intervalo, es decir,

$$a, b \in [a, b].$$

Gráficamente,



Observación Cuando en el intervalo acotado cerrado $[a, b]$, los extremos a y b son iguales, es decir, cuando $a = b$ se obtiene que el intervalo

$$[a, a] = \{a\}.$$

⋆ llamamos *intervalo acotado semi-abierto de extremos* a *y* b, o simplemente *intervalo semi-abierto* a, b al conjunto

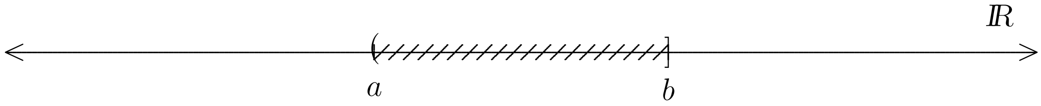
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\},$$

donde a es el extremo inferior y b es el extremo superior del intervalo.

Nota En el intervalo acotado semi-abierto $(a, b]$, el extremo a no pertenece al intervalo y, en cambio, el extremo b si pertenece, es decir,

$$a \notin (a, b] \quad \text{y} \quad b \in (a, b].$$

Gráficamente,



⋆ llamamos *intervalo acotado semi-cerrado de extremos a y b*, o simplemente *intervalo semi-cerrado* a, b al conjunto

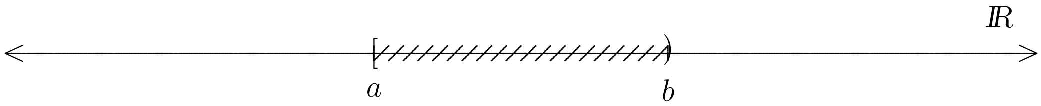
$$[a, b) = \{x \in I\!R : a \leqslant x < b\},$$

donde a es el extremo inferior y b es el extremo superior del intervalo.

Nota En el intervalo acotado semi-cerrado $[a, b)$, el extremo a pertenece al intervalo y, en cambio, el extremo b no pertenece, es decir,

$$a \in [a, b) \quad \text{y} \quad b \notin [a, b)\,.$$

Gráficamente,



Observación Cuando en el intervalo acotado semiabierto $(a, b]$ o semicerrado $[a, b)$, los extremos a y b son iguales, es decir, cuando $a = b$ se obtiene que el intervalo

$$(a, a] = \emptyset \qquad \text{y} \qquad [a, a) = \emptyset.$$

Ejemplos

(a) El intervalo abierto $(1, 5) = \{x \in I\!R : 1 < x < 5\}$, es decir, el intervalo $(1, 5)$ está formado por todos los números reales mayores que 1 y menores que 5 (entre 1 y 5, sin tomarlos). Por ejemplo, los números reales $\pi, \dfrac{7}{2}, 4, \sqrt{3} \in (1, 5)$.

(b) El intervalo cerrado $[0, 2] = \{x \in I\!R : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, esto es, el intervalo $[0, 2]$ está formado por todos los números reales mayores o iguales que el 0 y, menores o iguales que 2 (entre el 0 y 2 inclusive). Por ejemplo, $0, \sqrt{2}, \dfrac{3}{4}, 1 \in [0, 2]$.

3.6.6.2 Intervalos no acotados

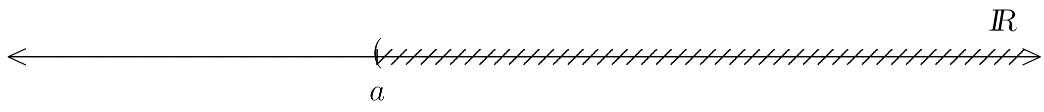
Sea a un número real cualquiera, es decir, $a \in \mathbb{R}$. Es claro que $-\infty < a$ y que $a < \infty$, o equivalentemente $-\infty < a < \infty$, esto es, *un número real* a *cualquiera se encuentra entre* $-\infty$ *y* ∞.

⋆ llamamos *intervalo no acotado abierto de extremo inferior* a, al conjunto

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}.$$

Nota En el intervalo no acotado abierto (a, ∞), el extremo inferior a no pertenece al intervalo.

Gráficamente,

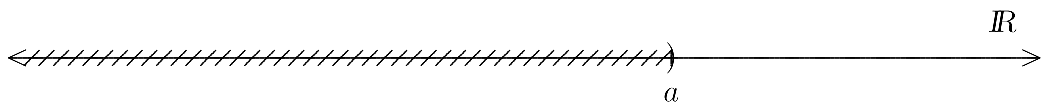


⋆ llamamos *intervalo no acotado abierto de extremo superior* a, al conjunto

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

Nota En el intervalo no acotado abierto $(-\infty, a)$, el extremo superior a no pertenece al intervalo.

Gráficamente,

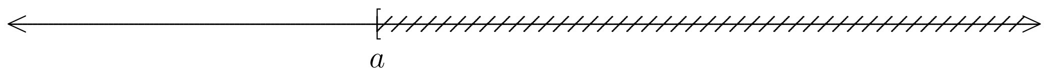


⋆ llamamos *intervalo no acotado cerrado de extremo inferior* a, al conjunto

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}.$$

Nota En el intervalo no acotado cerrado $[a, \infty)$, el extremo inferior a pertenece al intervalo.

Gráficamente,

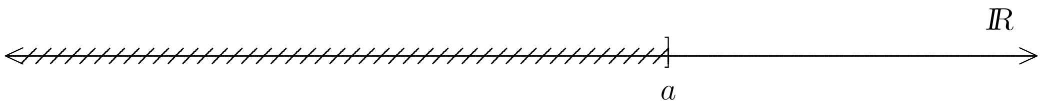


⋆ llamamos *intervalo no acotado cerrado de extremo superior* a, al conjunto

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}.$$

Nota En el intervalo no acotado cerrado $(-\infty, a]$, el extremo superior a pertenece al intervalo.

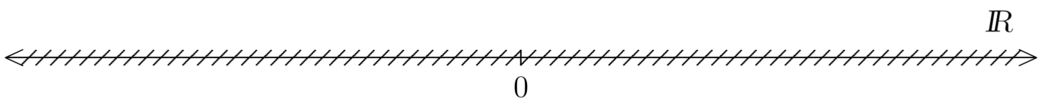
Gráficamente,



⋆ Finalmente, es obvio que el intervalo no acotado

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Gráficamente,



Observaciones

(1) Usando intervalos podemos expresar a:

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty), \quad \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty), \quad \mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0] \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^- = (-\infty, 0).$$

(2) Sabemos que si $|x| < a$ entonces $-a < x < a$, por lo que podemos indicar que $x \in (-a, a)$

(3) Sabemos que si $|x| \geqslant a$ entonces $x \leqslant -a$ o $x \geqslant a$, por lo que podemos indicar que $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

(4) En todos los intervalos no acotados tanto $-\infty$ como ∞ no pertenecen al intervalo, por lo que en el extremo correspondiente siempre se coloca *"paréntesis"* para indicar que *no lo toma* o *no lo alcanza*, y el extremo real es el que define si es abierto o cerrado.

3.6.7 Potenciación

3.6.7.1 Potencia de exponente natural o cero

Definición Dados $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$, definimos las *potencias de base* a *de exponente* n *natural o cero*, por medio de las siguientes dos reglas:

(PN_1) $a^0 = 1$.

(PN_2) $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

De este modo, aplicando estas dos reglas y las propiedades del producto de números reales vistas anteriormente, tenemos que:

(PN_3) $a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. [Por (PN_1), (PN_2), (M_3) y (M_5)]

(PN_4) $a^2 = a^{1+1} = a^1 \cdot a = a \cdot a$. [Por (PN_2) y (PN_3)]

(PN_5) $a^3 = a^{2+1} = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$. [Por (PN_2), (PN_4) y (M_2)]

Y así siguiendo, encontramos el caso más general, para un exponente natural $n \geqslant 2$:

(PN_6) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{veces}}$.

3.6.7.2 Propiedades

Para cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}_0$, entonces se verifica que:

(PN_7) $0^n = 0$, si $n \neq 0$. [Potencias de cero]

(PN_8) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. [Distributiva del exponente respecto al producto en la base]

(PN_9) $(a : b)^n = a^n : b^n$, con $b \neq 0$. [Distributiva del exponente respecto al cociente en la base]

O bien, expresando el cociente a través de su forma fraccionaria:

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$.

(PN_{10}) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ [Producto de potencias de igual base]

(PN_{11}) $a^n : a^m = a^{n-m}$, con $a \neq 0$, si $n \geqslant m$. [Cociente de potencias de igual base]

O bien, expresando el cociente a través de su forma fraccionaria:

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, con $a \neq 0$, si $n \geqslant m$.

(PN_{12}) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ [Potencia de una potencia]

Observaciones

(1) Las propiedades (PN_{10}) y (P_{12}) pueden generalizarse, de una manera fácil, de la siguiente forma respectivamente:

$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = a^{n+m+k} \qquad \text{y} \qquad \Big[(a^n)^m\Big]^k = a^{n \cdot m \cdot k}.$$

(2) En general, se tiene que $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$, esto es, el exponente *no distribuye* con respecto a la suma o resta de números reales, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo Tomemos por un lado $(2+3)^4 = 5^4 = 625$ y por otra parte $2^4 = 16$ y $3^4 = 81$. Por lo tanto,

$$(2+3)^4 \neq 2^4 + 3^4, \text{ pues } 625 \neq \underbrace{16+81}_{97}.$$

Ejemplos

(*a*) $(-2)^5 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{\text{5-veces}} = -32.$

(*b*) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \underbrace{\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{4}}_{\text{3-veces}} = \dfrac{27}{64}.$

(*c*) $(-\pi)^2 = \underbrace{(-\pi)\cdot(-\pi)}_{\text{2-veces}} = \pi^2 \cong 9,8696\ldots$

(*d*) $5^4 = \underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{\text{4-veces}} = 625.$

(*e*) $\left(\sqrt{2}\right)^7 = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{\text{7-veces}}$ [45] $\cong 11,3137\ldots$

[45] En la próxima sección se verá que $\left(\sqrt{2}\right)^7 = \sqrt{2^7} = 2^3\cdot\sqrt{2} = 8\,\sqrt{2} \cong 11,3137\ldots$

De los ejemplos mostrados podemos inferir que:

(i) Cuando la base es un número real negativo y el exponente sea un número par, el resultado de la potencia es un número real positivo.

(ii) Cuando la base es un número real negativo y el exponente sea un número impar, el resultado de la potencia es un número real negativo.

(iii) Es claro que, cuando la base es un número real positivo el resultado de la potencia es siempre un número real positivo, sin importar que el exponente sea par o impar.

A continuación vamos a ver algunos desarrollos de potencias, los cuales son de mucha utilidad en la resolución de algunos ejercicios en el que tengamos dos términos en donde uno de ellos contenga al menos una variable, o bien una suma/resta de un racional con un irracional, o más generalmente, una suma/resta de dos irracionales de distinta naturaleza o dos términos que no sean radicales semejantes[46]. Estas son las famosas fórmulas del desarrollo del *binomio al cuadrado* y del *binomio al cubo*, también llamados:

3.6.7.3 Cuadrado y cubo de un binomio

Dados dos números reales a, b, llamamos *forma binómica* o simplemente *binomio*, en general, a la expresión en suma[47] no resuelta de dos términos que indicamos a más b, esto es,

$$a + b$$

es un binomio, donde 'a' representa al *primer término* y 'b' al *segundo término*.
Ahora estamos listos para ver a qué es igual el desarrollo del binomio al cuadrado $(a+b)^2$. Recordando que elevar al cuadrado una base es multiplicarla por sí misma dos veces según (PN_4), aplicando la propiedad del distributiva del producto respecto a la suma de números reales (a derecha y a izquierda), y la propiedad conmutativa del producto de números reales enunciada en (M_3), obtenemos que:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b = a\cdot a + a\cdot b + \overbrace{b\cdot a}^{a\cdot b} + b\cdot b =$$

$$= a^2 + \underbrace{a\cdot b + a\cdot b}_{\text{son dos sumandos iguales}} + b^2 = a^2 + 2\,a\cdot b + b^2.$$

Así, la fórmula del desarrollo del cuadrado de un binomio es:

[46] Según la definición que vamos a dar en una sección siguiente.

[47] Inclusive en resta, debido a que *restar* es *sumar el opuesto*.

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\cdot\, b + b^2},$$

que se lee diciendo *el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.*

Ahora veamos a qué es igual el binomio al cubo $(a+b)^3$. Recordando la regla (PN_2) de la definición de potencia, utilizando el desarrollo del binomio al cuadrado anterior, usando (PN_4) y (PN_{10}), aplicando la propiedad del distributiva del producto respecto a la suma de números reales y las propiedades asociativa del producto y conmutativa de la suma y el producto de números reales, obtenemos que:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\cdot(a+b) = (a+b)^2\cdot a + (a+b)^2\cdot b = (a^2+2\,a\cdot b+b^2)\cdot a + (a^2+2\,a\cdot b+b^2)\cdot b =$$

$$= a^3 + 2\,\underline{a^2\cdot\, b} + \underline{\underline{a\cdot\, b^2}} + \underline{b\cdot\, a^2} + 2\,\underline{\underline{a\cdot\, b^2}} + b^3 = a^3 + 3\,\underline{a^2\cdot\, b} + 3\,\underline{\underline{a\cdot\, b^2}} + b^3.$$

Finalmente, la fórmula del desarrollo del cubo de un binomio es:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\cdot\, b + 3\,a\cdot\, b^2 + b^3},$$

que se lee diciendo *el cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple del primero elevado al cuadrado por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.*

Otra fórmula muy importante es la llamada:

3.6.7.4 Diferencia de cuadrados

¿A qué es igual $(a+b)\cdot(a-b)$? Lo calculemos y veamos que nos dá. Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta, la propiedad conmutativa de la multiplicación y la cancelativa de la suma de números reales, obtenemos que:

$$(a+b)\cdot(a-b) = (a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b = \overbrace{a\cdot a}^{a^2} + b\cdot a - (a\cdot b + \overbrace{b\cdot b}^{b^2}) = a^2 + \underbrace{b\cdot a}_{a\cdot b} - a\cdot b - b^2 =$$

$$= a^2 \cancel{+a\cdot b} \cancel{-a\cdot b} - \, b^2 = a^2 - b^2.$$

Así, la fórmula obtenida es:

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2},$$

que nos será útil en la próxima sección.
Si consideramos la igualdad *simétrica* a la anterior, resulta que obtenemos que:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)},$$

A esta fórmula se la conoce con el nombre de *diferencia*[48] *de cuadrados*, donde a y b son las *bases* de las potencias cuadradas que están restadas a^2 y b^2 respectivamente.

3.6.7.5 Potencia de exponente entero negativo

Definición Dados $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $-n \in \mathbb{Z}^-$, es decir, $n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, definimos la *potencia de base a de exponente negativo*, como sigue:

$$(PN_{12})\ \ a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

donde $\dfrac{1}{a}$ es el inverso de a.

Ejemplos

(a) $3^{-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = \dfrac{1}{3}$.

(b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} = 4^1 = 4$.

(c) $2^{-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

(d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

Observación Se puede extender, sin mayores problemas, las propiedades vistas anteriormente con exponente natural o cero[49] para el caso en que tengamos, en general, exponentes enteros, esto es, enteros negativos y no negativos, para lo cual debemos utilizar la suma, resta y multiplicación de números enteros, como así también la regla de los signos y la definición dada para exponente negativo.

Ejemplos En los siguientes ejemplos se muestra el uso de las propiedades de la potenciación de exponente no negativo y también de su generalización a un entero cualquiera.

(a) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{-3} = 3^{4+2+(-3)} = 3^{6-3} = 3^3 = 27$.

(b) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^5 : \left(-\dfrac{3}{4}\right)^3 = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{5-3} = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

(c) $\{[(-2)^2]^{-1}\}^3 = (-2)^{2\cdot(-1)\cdot 3} = (-2)^{-6} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$.

(d) $(3\cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$.

[48] Recordar que *diferencia* es un sinónimo de *resta* o *sustracción*.

[49] Entero no negativo.

(e) $5^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^2 : 5^3 = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$

(f) $(-1)^9 = -1.$

(g) $\left(\frac{5}{6}\right)^4 : \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^{4-7} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125}.$

(h) $10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1^4}{10^4} = \frac{1}{10000}.$

(i) $\left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{8-3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}.$

O bien, utilizando la fórmula del desarrollo del binomio al cuadrado:

$$\left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(2 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 4 - 3 + \frac{9}{16} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}.$$

3.6.8 Radicación

3.6.8.1 Raíz de índice natural de un número real

Definición Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la raíz de índice n de a, como el número real que simbolizamos como

$$\sqrt[n]{a}$$

y que leemos *raíz n-ésima de a*, que se obtiene a partir de la potencia de exponente n de la siguiente manera:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a},$$

donde el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical*, el número natural n (ubicado en la parte superior izquierda del radical) se llama *índice* de la raíz y el número real a (ubicado dentro del radical) se llama *radicando* de la raíz.

Notación El símbolo $\sqrt{a}$ representa a $\sqrt[2]{a}$. Es decir, cuando tengamos una raíz de índice 2, comúnmente llamada *raíz cuadrada*, omitimos el índice 2.

Observación De la definición de raíz de índice n de un número real a, puede concluirse que si $n = 1$, resulta que:

$$\sqrt[1]{a} = b \iff \underbrace{b^1}_{b} = a\,,$$

es decir, $b = a$. Por lo que

$$\boxed{\sqrt[1]{a} = a}.$$

Ejemplos

(a) $\sqrt{25} = 5 \iff 5^2 = 25.$

(b) $\sqrt[3]{64} = 4 \iff 4^3 = 64.$

(c) $\sqrt[5]{32} = 2 \iff 2^5 = 32.$

(d) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2} \iff \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}.$

(e) $\sqrt[3]{8} = 2 \iff 2^3 = 8.$

(f) $\sqrt[3]{-8} = -2 \iff (-2)^3 = -8.$

(g) $\sqrt[4]{81} = 3 \iff 3^4 = 81.$

Pero también, por la definición que hemos presentado, es válido decir que:

$\sqrt[4]{81} = -3 \iff (-3)^4 = 81.$

Por lo que podemos pensar que:

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3 \begin{cases} \sqrt[4]{81} = 3 \\ \text{o} \\ \sqrt[4]{81} = -3 \end{cases}$$

Pero para trabajar con un sólo resultado, por convención se opta por el resultado *positivo*, esto es, $\sqrt[4]{81} = 3$. De manera que su *raíz opuesta* es $-\sqrt[4]{81} = -3$.

Observaciones

(1) En los ejemplos (e) y (f) anteriores en donde el índice es 3, que es impar, podemos observar que $\sqrt[3]{8}$ y $\sqrt[3]{-8}$ son opuestos, esto es,

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}\,.$$

En general, se verifica que $\boxed{\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}}$, si el índice n es un natural impar.

(2) En cambio, veamos que ocurre en el caso de tener un radicando negativo e índice 6, que es par:

$\sqrt[6]{-64} = \square \iff \square^6 = -64.$

En este caso, notemos que *ningún número real es la raíz sexta de* -64, puesto que cualquiera sea el número real que elevemos al exponente 6 nunca nos dará -64. Era tentador pensar que la respuesta es -2, pero como sabemos

$$(-2)^6 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = \boxed{64}\,.$$

Por lo tanto, *no existe un número real cuya potencia sexta sea* -64.

En casos como este, donde el radicando es un número real negativo y el índice es un número natural par, vamos a decir que *la raíz no tiene solución en el conjunto de los números reales.* Finalmente, $\sqrt[6]{-64}$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, esto es, $\sqrt[6]{-64} \notin \mathbb{R}$.

De lo expuesto en los ejemplos y observaciones anteriores, inferimos que

(i) Cuando el radicando sea un número real positivo y el índice sea un número natural impar, el resultado de la raíz es un número real positivo.

(ii) Cuando el radicando sea un número real negativo y el índice sea un número natural impar, el resultado de la raíz es un número real negativo.

(iii) Cuando el radicando sea un número real positivo y el índice sea un número natural par, el resultado de la raíz es un número real positivo o su opuesto negativo. Pero por convención, vamos a quedarnos con la respuesta positiva.

(iv) Cuando el radicando sea un número real negativo y el índice sea un número natural par, la raíz no tiene solución dentro de los números reales.

3.6.8.2 Propiedades

Para cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n, m, k, r \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que:

(RN_1) *Distributiva del radical respecto al producto en el radicando*: $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$.

(RN_2) *Distributiva del radical respecto al cociente en el radicando*: $\boxed{\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$.

O bien, expresando el cociente a través de su forma fraccionaria: $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$, con $b \neq 0$.

Por ejemplo, $\sqrt[4]{81 : 16} = \sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}$, o bien, expresando el cociente a través de su forma fraccionaria, $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}$.

(RN_3) *Raíz de una raíz*: $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}}$.

Por ejemplo, $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64}$.

(RN_4) <u>*Simplificación de exponente e índice idénticos*</u>: $\boxed{\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}} = a}$.

Por ejemplo, $\left(\sqrt[\cancel{3}]{-8}\right)^{\cancel{3}} = -8$ y $\left(\sqrt[\cancel{4}]{5}\right)^{\cancel{4}} = 5$.

(RN_5) <u>*Simplificación de índice y exponente impar idénticos*</u>: $\boxed{\sqrt[\cancel{n}]{a^{\cancel{n}}} = a}$, si n es impar.

Por ejemplo, $\sqrt[\cancel{5}]{(-3)^{\cancel{5}}} = -3$.

Sin embargo, en caso de índice y exponente par idénticos, no podemos simplificar, pero obtenemos que:

(RN_6) <u>*Raíz de índice y exponente par idénticos*</u>: $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$, si n es par.

En particular, $\sqrt{a^2} = |a|$, donde el símbolo $|a|$ representa al *valor absoluto de* a. Recordemos que *el valor absoluto de un número real positivo o cero es el mismo número real.* En cambio, *el valor absoluto de un número real negativo, es el número real positivo que se obtiene al cambiarle el signo, es decir, el opuesto del número real negativo.*

Por ejemplo, $\sqrt[6]{3^6} = |3| = 3$ y $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$, puesto que $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

(RN_7) <u>*Exponente fraccionario*</u>: $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$, en general, con $m \neq n$.

En particular, cuando $m = 1$ y $n \neq 1$ resulta que:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Por ejemplo, $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{4^3}$ y $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$.

(RN_8) <u>*Extracción de factores*</u>: $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^k \cdot \sqrt[n]{a^r}}$, si $n < m$ y, además, se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \hline \text{resto} \rightarrow \boxed{r} & k \leftarrow \text{cociente} \end{array}$$

donde el cociente k y el resto r se obtienen por medio del algoritmo de la división entera no negativa, como se vio en la subsección 3.2.4.

Por ejemplo, apliquemos esta propiedad para ver a qué es igual $\sqrt[3]{1024}$. Factoricemos el radicando 1024, descomponiéndolo como producto de sus factores primos, como sigue:

$$
\begin{array}{r|l}
1024 & 2 \\
512 & 2 \\
256 & 2 \\
128 & 2 \\
64 & 2 \\
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
$$

Luego, $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$. Así, puesto que

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 10 & \;3 \\ \cline{3-3}
r \;\rightarrow & \boxed{1} & \;3 \;\leftarrow\; k
\end{array} \;,
$$

resulta que

$$\sqrt[3]{1024} = \underline{\underline{\sqrt[3]{2^{10}} = \overset{\overset{k}{\downarrow}}{2^{3}} \cdot \sqrt[3]{2^{\boxed{1}}}}} = 8\,\sqrt{2}.$$

Otra manera de extraer factores fuera del radical, sin utilizar lo expresado en la propiedad (R_8), en la que utilizamos las primeras siete propiedades de la radicación y además la igualdad simétrica de la propiedad del *producto de potencias de igual base* que dice:

$$(PN_{10})\;\; a^n \cdot a^m = a^{n+m}\,,$$

y que, vista al revés, sería:

$$(I)\;\; \boxed{a^{n+m} = a^n \cdot a^m}\,.$$

Supongamos que tenemos $\sqrt{27}$ y pretendemos extraer factores fuera del radical. Procedemos como sigue:

1°) Factorizamos el radicando 27, descomponiéndolo como producto de sus factores primos. Es decir,

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Luego, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$.

2°) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^{2+1}}$

$= \sqrt{3^2 \cdot 3^1}$ [Por (I)]

$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}$ [Por (RN_1)]

$= |3| \cdot \sqrt{3}$ [Por (RN_6)]

$= 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Otra manera de resolverlo es:

$27 = 3^3 = \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot 3 = 3^2 \cdot 3$, ya que es conveniente agrupar de a dos, puesto que el índice es 2.
Entonces

$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3}$

$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}$ [Por (RN_1)]

$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$

$= 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Por lo tanto, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

(RN_9) *Simplificación*: $\boxed{\left(\sqrt[n\cdot \cancel{k}]{a}\right)^{m\cdot \cancel{k}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$, con $m \neq n$.

O bien: $\boxed{\sqrt[n\cdot \cancel{k}]{a^{m\cdot \cancel{k}}} = \sqrt[n]{a^m}}$, con $m \neq n$.

Por ejemplo, $\left(\sqrt[6]{5}\right)^9 = \left(\sqrt[2\cdot \cancel{3}]{5}\right)^{3\cdot \cancel{3}} = \left(\sqrt[2]{5}\right)^3$, o más rápidamente, $\left(\sqrt[2\cancel{6}]{5}\right)^{\cancel{9}\,3} = \left(\sqrt{5}\right)^3$. Otro ejemplo, sería $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3\cdot \cancel{3}]{2^{2\cdot \cancel{3}}} = \sqrt[3]{2^2}$, o más rápidamente, $\sqrt[3\cancel{9}]{2^{\cancel{6}\,2}} = \sqrt[3]{2^2}$.

(RN_{10}) *Producto de raíces con el mismo índice*: $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$, que es la igualdad simétrica de (R_1), es decir, la igualdad vista al revés.

Por ejemplo, $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{32} = 2$.

(RN_{11}) <u>*Producto de raíces con distinto índice*</u>: $\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[M]{a^{\frac{M}{n}}\cdot b^{\frac{M}{m}}}}$, con $n\neq m$ y el número natural $M=m.c.m.(n,m)$, es decir, M es el *mínimo común múltiplo* entre n y m.

Por ejemplo, resolvamos por un lado $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{5^{\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}}}\cdot 3^{\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{4}}}}=\sqrt[12]{5^4\cdot 3^3}$, donde el $m.c.m.(3,4)=12$, ya que

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 3\\ & 1 & \boxed{12} \end{array}\quad\leftarrow\quad m.c.m.$$

y por otro lado $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{2^{\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{6}}}\cdot 5^{\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}}}}=\sqrt[6]{2\cdot 5^2}$, donde el $m.c.m.(6,3)=6$, ya que

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & \boxed{6} \end{array}\quad\leftarrow\quad m.c.m.$$

(RN_{12}) <u>*Cociente de raíces con el mismo índice*</u>:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}}\qquad \text{y}\qquad \boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}},$$

con $b\neq 0$ en ambas igualdades, que son las simétricas de las igualdades obtenidas en la propiedad (RN_2).

Por ejemplo, $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{16:4}=\sqrt[3]{4}$. Otro ejemplo sería, $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\dfrac{\cancel{64}^{32}}{\cancel{2}}}=\sqrt[5]{32}=2$.

(RN_{13}) <u>*Cociente de raíces con distinto índice*</u>: $\boxed{\sqrt[n]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[M]{a^{\frac{M}{n}}:b^{\frac{M}{m}}}}$, con $n\neq m$, $b\neq 0$ y el número natural $M=m.c.m.(n,m)$.

Por ejemplo, resolvamos por un lado $\sqrt[8]{3}:\sqrt[4]{2}=\sqrt[8]{3^{\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}}:2^{\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}}}}=\sqrt[8]{3:2^2}$, donde el $m.c.m.(8,4)=8$, ya que

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & & \boxed{8} \end{array}\quad\leftarrow\quad m.c.m.$$

y por otro lado $\sqrt{5} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{5^{\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}} : 3^{\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}}}} = \sqrt[6]{5^3 : 3^2}$, donde el $m.c.m.(2,3) = 6$, ya que

$$\begin{array}{cc|c}
2 & 3 & 2 \\
1 & 3 & 3 \\
 & 1 & \boxed{6} \quad \leftarrow \quad m.c.m.
\end{array}$$

Observación Al igual que en la potenciación, en general se tiene que el radical *no distribuye* con respecto a la suma o resta en el radicando. Esto es, en general se cumple que:

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}\,.$$

Ejemplo $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq \underbrace{3+4}_{7} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

3.6.9 Radicales

Definición Llamamos *radical* a toda expresión irracional que sea producto de un número racional por una raíz n-ésima no racional, es decir, que sea un irracional. En símbolos, un radical tiene la forma:

$$a \cdot \sqrt[n]{b}\,,$$

donde a es un número racional, que llamamos *parte racional* del radical, y la raíz $\sqrt[n]{b}$ es un número irracional, que llamamos *parte irracional* del radical.

Observaciones

(1) La parte racional del radical puede ser un número entero o un número fraccionario.

(2) Toda raíz n-ésima que sea irracional es por sí sola un radical, cuya parte racional es el número 1.

(3) En todo radical de la forma:

$$a \cdot \sqrt[n]{b},$$

el radicando de la raíz n-ésima que forma la parte irracional, es un número real distinto de cero, en símbolos, $b \neq 0$, puesto que si $b = 0$, resultaría que $\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{0} = 0$ no sería un irracional.

Notación Puesto que la única operación aritmética que se sobre entiende sin estar explícitamente expresada es el *producto*, de ahora en adelante, en una expresión radical podremos omitir el signo $\cdot$ (*por*) del producto entre la parte racional y la parte irracional. Esto es,

$$\boxed{a \cdot \sqrt[n]{b} = a\ \sqrt[n]{b}}\,.$$

Ejemplos

(*a*) $3 \cdot \sqrt{5} = 3\,\sqrt{5}$.

(*b*) $\dfrac{\sqrt[5]{8}}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{8} = \dfrac{1}{2}\,\sqrt[5]{8}$.

(*c*) $-1 \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7}$.

(*d*) $-4 \cdot \sqrt[4]{10} = -4\,\sqrt[4]{10}$.

(*e*) $\dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{6}}{5} = \dfrac{2\,\sqrt[3]{6}}{5} = \dfrac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \dfrac{2}{5}\,\sqrt[3]{6}$

3.6.9.1 Radicales semejantes

Definición Llamamos *radicales semejantes* a todos aquellos radicales que, después de aplicar las propiedades de la radicación (distributiva, simplificación, extracción de factores, etc.), tengan la misma parte irracional.

Ejemplos Son radicales semejantes:

(*a*) $2\,\sqrt[3]{5}$ y $3\,\sqrt[3]{5}$.

(*b*) $5\,\sqrt{3}\,,\ \dfrac{5}{4}\,\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$.

(*c*) $\dfrac{3}{2}\,\sqrt[4]{6}$ y $-\sqrt[4]{6}$.

Ahora bien, los siguientes radicales:

$$¿\sqrt{50}, -\sqrt{8}, \sqrt[4]{4} \text{ y } \sqrt{\frac{2}{9}} \text{ son semejantes?}$$

Pareciera que no lo son. Pero, de acuerdo a la definición previa, debemos aplicar las propiedades de la radicación y ver qué pasa. Trabajemos con cada uno, por separado:

(1) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sqrt{5^2}}_{|5|} = \sqrt{2} \cdot \underbrace{|5|}_{5} = 5 \cdot \sqrt{2} = \boxed{5\,\sqrt{2}}$.

(2) $-\sqrt{8} = -\sqrt{2^3} = -\sqrt{2^2 \cdot 2} = -\underbrace{\sqrt{2^2}}_{|2|} \cdot \sqrt{2} = -\underbrace{|2|}_{2} \cdot \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2} = \boxed{-2\,\sqrt{2}}$.

(3) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[\overset{2}{\cancel{4}}]{2^{\cancel{2}}} = \sqrt[2]{2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

(4) $\sqrt{\dfrac{2}{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}\,\sqrt{2}}$.

Por lo que, claramente, puede verse que los radicales

$$5\,\sqrt{2}, -2\,\sqrt{2}, \sqrt{2} \text{ y } \frac{1}{3}\,\sqrt{2}$$

son semejantes.

3.6.9.2 Suma algebraica de radicales semejantes

Definición Llamamos *suma algebraica de radicales semejantes* a una suma o resta combinadas de radicales que sean semejantes.

Para resolver una suma algebraica de radicales semejantes debemos agrupar entre paréntesis la suma algebraica de las partes racionales y multiplicarlas por fuera del paréntesis por la parte irracional en común que las hace semejantes. Finalmente, se resuelve el paréntesis y se obtiene una expresión radical semejante a la de los términos de la suma algebraica o bien se obtiene 0.

Ejemplos

(a) $2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = (2+3)\sqrt[3]{5} = \boxed{5\sqrt[3]{5}}$.

(b) $\dfrac{5}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \left(\dfrac{5}{2} - 1 + 2\right)\sqrt{3} = \boxed{\dfrac{7}{2}\sqrt{3}}$.

(c) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (3-3)\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = \boxed{0}$.

3.6.9.3 Suma algebraica de radicales

Para resolver una suma de radicales en donde sus términos son radicales que aparentemente no son semejantes, pero que aplicando propiedades de la radicación se transforman y resultan ser algunos o todos radicales semejantes. Procedemos de la siguiente manera:

(i) Descomponemos cada radicando compuesto como producto de factores primos.

(ii) Extraemos factores fuera del radical, utilizando las propiedades (R_1) y (R_8).

(iii) Identificamos y agrupamos términos en donde intervienen radicales semejantes

(iv) Resolvemos las sumas o restas de radicales semejantes tal cual hemos descripto anteriormente.

Ejemplos

(a)
$$
\begin{aligned}
5\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + 9\sqrt{32} &= 5\sqrt{2\cdot 5^2} - 2\sqrt{2\cdot 3^2} + 9\sqrt{2^5} = \\
&= 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{5^2} - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2} + 9\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2} = \\
&= 5\sqrt{2}\cdot\underbrace{|5|}_{5} - 2\sqrt{2}\cdot\underbrace{|3|}_{3} + 9\underbrace{|2|}_{2}\cdot\underbrace{|2|}_{2}\cdot\sqrt{2} = \\
&= 25\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 9\cdot 4\sqrt{2} = \\
&= 25\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 36\sqrt{2} = \\
&= (25-6+36)\sqrt{2} = \boxed{55\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b)\ \ -3\sqrt[3]{2}\ +\ \sqrt[6]{4}\ -\ 8\sqrt[9]{8} = -3\sqrt[3]{2}\ +\ \sqrt[6]{2^2}\ -\ 8\sqrt[9]{2^3} &= \\
= -3\sqrt[3]{2}\ +\ \sqrt[3\cancel{6}]{2^{\cancel{2}}}\ -\ 8\sqrt[3\cancel{9}]{2^{\cancel{3}}} &= \\
= -3\sqrt[3]{2}\ +\ \sqrt[3]{2}\ -\ 8\sqrt[3]{2} &= \\
= (-3\ +\ 1\ -\ 8)\sqrt[3]{2} = (-10)\sqrt[3]{2} &= \boxed{-10\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c)\ \ 4\sqrt[3]{625}\ -\ \sqrt[3]{81}\ +\ 2\sqrt[3]{40}\ +\ 5\sqrt[6]{9} &= 4\sqrt[3]{5^4}\ -\ \sqrt[3]{3^4}\ +\ 2\sqrt[3]{2^3\cdot 5}\ +\ 5\sqrt[3\cancel{6}]{3^{\cancel{2}}} = \\
&= 4\sqrt[3]{5^3\cdot 5}\ -\ \sqrt[3]{3^3\cdot 3}\ +\ 2\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}\ +\ 5\sqrt[3]{3} = \\
&= 4\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\ -\ \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\ +\ 2\cdot\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}\cdot\sqrt[3]{5}\ +\ 5\sqrt[3]{3} = \\
&= 4\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}}\cdot\sqrt[3]{5}\ -\ \sqrt[\cancel{3}]{3^{\cancel{3}}}\cdot\sqrt[3]{3}\ +\ 2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5}\ +\ 5\sqrt[3]{3} = \\
&= 4\cdot 5\cdot\sqrt[3]{5}\ -\ 3\sqrt[3]{3}\ +\ 4\sqrt[3]{5}\ +\ 5\sqrt[3]{3} = \\
&= 20\sqrt[3]{5}\ -\ 3\sqrt[3]{3}\ +\ 4\sqrt[3]{5}\ +\ 5\sqrt[3]{3} = \\
&= 20\sqrt[3]{5}\ +\ 4\sqrt[3]{5}\ +\ \left(-3\sqrt[3]{3}\ +\ 5\sqrt[3]{3}\right) \\
&= (20\ +\ 4)\sqrt[3]{5}\ +\ \left(-3\ +\ 5\right)\sqrt[3]{3} = \boxed{24\sqrt[3]{5}\ +\ 2\sqrt[3]{3}}.
\end{aligned}
$$

3.6.9.4 Producto y cociente de radicales

($*$) Con igual índice: Para multiplicar o dividir dos radicales cuyos índices de las raíces de la parte irracional sean el mismo, debemos multiplicar o dividir las respectivas partes racionales de los radicales que intervienen y en virtud de las propiedades (R_{10}) y (R_{12}), multiplicar o dividir los radicandos bajo un sólo radical con el índice común, esto es,

$$\boxed{a\sqrt[n]{c}\ \cdot\ b\sqrt[n]{d} = (a\cdot b)\sqrt[n]{c\cdot d}}$$

y

$$\boxed{a\sqrt[n]{c}\ :\ b\sqrt[n]{d} = (a:b)\sqrt[n]{c:d}},\ \text{con } b\neq 0.$$

Observación No es necesario, aclarar que $d\neq 0$, puesto que en todo radical, el radicando de la raíz de la parte irracional siempre es distinta de cero, esto es, tanto c como d no son ceros, como se indicó en el ítem (3) de las observaciones, posterior a la definición de radicales.

Ejemplos

$(a)\ \ 2\sqrt{5}\ \cdot\ 5\sqrt{3} = (2\ \cdot\ 5)\sqrt{5\cdot 3} = \boxed{10\sqrt{15}}.$

$(b)\ \ \dfrac{2}{7}\sqrt[5]{-384}\ :\ \dfrac{5}{14}\sqrt[5]{6} = \left(\dfrac{2}{\cancel{7}_1}\ :\ \dfrac{5}{\cancel{14}_2}\right)\sqrt[5]{(-384)\ :\ 6} = \dfrac{4}{5}\sqrt[5]{-64} = \dfrac{4}{5}\cdot\left(-\sqrt[5]{64}\right) = \dfrac{4}{5}\cdot\left(-\sqrt[5]{2^6}\right) =$

$$= -\frac{4}{5}\cdot\sqrt[5]{2^5\cdot 2} = -\frac{4}{5}\cdot\underbrace{\sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}}}_{2}\cdot\sqrt[5]{2} = \Big(\underbrace{-\frac{4}{5}\cdot 2}_{-\frac{8}{5}}\Big)\cdot\sqrt[5]{2} = \left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\sqrt[5]{2} =$$

$$= \boxed{-\frac{8}{5}\sqrt[5]{2}}.$$

(*c*) $10\sqrt[4]{128} \ : \ (-5\sqrt[4]{4}) = \big[\underbrace{10 \ : \ (-5)}_{-2}\big]\sqrt[4]{128 \ : \ 4} = -2\sqrt[4]{32} = -2\sqrt[4]{2^5} = -2\sqrt[4]{2^4\cdot 2} =$

$$= (-2)\cdot\underbrace{\sqrt[\cancel{4}]{2^{\cancel{4}}}}_{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \boxed{-4\sqrt[4]{2}}.$$

($**$) Con distinto índice: Para multiplicar o dividir dos radicales cuyos índices de las raíces de la parte irracional sean distintos, debemos multiplicar o dividir las respectivas partes racionales de los radicales que intervienen y en virtud de las propiedades (R_{11}) y (R_{13}), multiplicar o dividir los radicandos elevados al cociente del mínimo común multiplo entre ambos índices dividido en el índice correspondiente a la raíz de cada radicando bajo un sólo radical cuyo índice será el múltiplo común menor entre ambos índices, esto es,

$$\boxed{a\sqrt[n]{c}\ \cdot\ b\sqrt[m]{d} = (a\cdot b)\ \sqrt[M]{c^{\frac{M}{n}}\cdot d^{\frac{M}{m}}}}, \text{ con } n\neq m \text{ y } M = m.c.m.(n,m).$$

y

$$\boxed{a\sqrt[n]{c}\ :\ b\sqrt[m]{d} = (a : b)\ \sqrt[M]{c^{\frac{M}{n}} : d^{\frac{M}{m}}}}, \text{ con } n\neq m,\ b\neq 0 \text{ y } M = m.c.m.(n,m).$$

Ejemplos

(*a*) $-\frac{3}{2}\sqrt{8}\cdot\left(-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\right) = \left(-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\sqrt[6]{\left(2^3\right)^{\frac{6}{2}}\cdot 3^{\frac{6}{3}}} = \left(\frac{3}{8}\right)\sqrt[6]{\left(2^3\right)^3\cdot 3^2} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{2^9\cdot 3^2} =$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[6]{2^9}\cdot\sqrt[6]{3^2} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{2^6\cdot 2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2} = \frac{3}{8}\sqrt[\cancel{6}]{2^{\cancel{6}}}\cdot\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{9} = \frac{3}{\cancel{8}_4}\cdot\cancel{2}^1\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[6]{8\cdot 9} = \boxed{\frac{3}{4}\sqrt[6]{72}}.$$

(*b*) $5\sqrt[3]{4} : 2\sqrt{2} = (5:2)\sqrt[6]{4^{\frac{6}{3}} : 2^{\frac{6}{2}}} = 2,5\sqrt[6]{4^2 : 2^3} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{\left(2^2\right)^2 : 2^3} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{2^4 : 2^3} =$

$$= \frac{5}{2}\sqrt[6]{2^1} = \boxed{\frac{5}{2}\sqrt[6]{2}}.$$

(*c*) $-12\sqrt{10} : 4\sqrt[4]{5} = (-12:4)\sqrt[4]{10^{\frac{4}{2}} : 5^{\frac{4}{4}}} = (-3)\sqrt[4]{10^2 : 5^1} = -3\sqrt[4]{100:5} = \boxed{-3\sqrt[4]{20}}.$

3.6.9.5 Racionalización de denominadores

A veces cuando se resuelven cálculos o problemas se obtienen razones o "formas fraccionarias", cuyos denominadores son radicales o bien, binomios donde al menos uno de sus términos es un radical o ambos son radicales no semejantes, y por lo tanto son denominadores irracionales.

Racionalizar un denominador significa transformar una forma fraccionaria cuyo denominador es un número irracional con radicales en otra forma fraccionaria equivalente a la dada, cuyo denominador sea racional. Con todo esto podemos decir que "racionalizar el denominador" significa *hacer desaparecer del denominador todo signo radical.*

Ejemplos Cada una de las siguientes razones tiene un denominador irracional con radicales, por lo cual será necesario realizar la racionalización del denominador.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(c) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$

(e) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

(f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

(g) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}$

(h) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{16}}$

(i) $\dfrac{\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

(j) $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{18}}$

(k) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$

(l) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$

(m) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(n) $\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

Para transformar estas razones o formas fraccionarias en otras equivalentes, pero con denominadores racionales, se usa un procedimiento llamado *racionalización de denominadores.*

El proceso consiste básicamente en multiplicar tanto el numerador como el denominador de la forma fraccionaria con denominador irracional con radicales por un *factor radical racionalizante*, que puede ser o un radical o bien, un binomio en los que uno de sus términos sea un radical o ambos sean radicales no semejantes, de manera que al multiplicar al denominador irracional con radicales de la expresión original lo racionalice. La forma fraccionaria construida con el factor racionalizante como numerador y denominador es claramente igual a 1, que al ser el neutro del producto o multiplicación de los números reales no afecta a la forma fraccionaria de partida.

Nota: En algunos casos es conveniente factorizar los radicandos que sean compuestos, para poder encontrar el factor racionalizante conveniente y facilitar los cálculos.

A modo explicativo, veamos los siguientes casos donde aplicamos el procedimiento de racionalizar el denominador irracional con radicales, tomando los ejemplos citados previamente:

Caso 1: Que el denominador sea un radical único, cuya raíz de la parte irracional tenga índice 2.

Ejemplos:

(a) $$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{1} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

En este caso, el factor racionalizante fue $\sqrt{2}$.

(b) $$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{1} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3 \cdot 2}}{\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{{}^{3}\cancel{6}\sqrt{6}}{\cancel{2}_{1}} = \boxed{3\sqrt{6}}.$$

En este caso, el factor racionalizante fue $\sqrt{2}$.

(c) $$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{1} = \frac{(3+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\left(\cancel{\sqrt{}}3\right)^{\cancel{2}}} = \frac{3\sqrt{3} + \left(\cancel{\sqrt{}}3\right)^{\cancel{2}}}{3} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3} =$$

$$= \boxed{\sqrt{3}+1}.$$

En este caso, el factor racionalizante fue $\sqrt{3}$.

(d) $$\frac{1+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{1} = \frac{(1+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{3\left(\cancel{\sqrt{}}5\right)^{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{5} + \left(\cancel{\sqrt{}}5\right)^{\cancel{2}}}{3 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}+5}{15} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{15}\sqrt{5} + \frac{1}{3}}.$$

(e) $$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}_{1} = \frac{(2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \left(\cancel{\sqrt{}}3\right)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \left(\cancel{\sqrt{}}3\right)^{\cancel{2}}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}}.$$

(f) $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2 \cdot 5}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2 \cdot 5}}{\sqrt{2 \cdot 5}}}_{1} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot 5}}{\sqrt{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{2 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2}}{|2| \cdot |5|} = \frac{|2| \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot |5|}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Nota: En el último ejemplo, note que se podría haber utilizado como factor racionalizante directamente a $\sqrt{10}$ desde el comienzo, sin necesidad de factorizar el radicando $10 = 2 \cdot 5$.

Caso 2: Que el denominador sea un radical único, cuya raíz de la parte irracional tenga índice mayor que 2.

Ejemplos:

$$(g)\quad \frac{5}{\sqrt[3]{9}} = \frac{5}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}}_{1} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 3}} = \frac{5\sqrt[3]{3}}{\sqrt[\cancel{3}]{3^{\cancel{3}}}} = \frac{5\sqrt[3]{3}}{3} = \boxed{\frac{5}{3}\sqrt[3]{3}}.$$

$$(h)\quad \frac{6}{\sqrt[3]{16}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \frac{6}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}}_{1} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}} =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}}.$$

$$(i)\quad \frac{\sqrt[5]{16} - \sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{\sqrt[5]{2^4} - \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}}_{1} = \frac{\sqrt[5]{2^4 \cdot 2^2} - \sqrt[5]{2^2 \cdot 2^2}}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^6} - \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}}} = \frac{\sqrt[5]{2^5 \cdot 2} - \sqrt[5]{16}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}} \cdot \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{16}}{2} = \frac{2\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{16}}{2} = \sqrt[5]{2} - \frac{\sqrt[5]{16}}{2} = \boxed{\sqrt[5]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{16}}.$$

$$(j)\quad \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}}}_{1} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[\cancel{3}]{3^{\cancel{3}}}}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} \cdot \sqrt[\cancel{3}]{3^{\cancel{3}}}} = \boxed{\frac{2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{4}}{6}}.$$

Caso 3: Que el denominador sea un binomio, en donde uno de sus términos sea un radical o ambos sean radicales no semejantes, cuya raíz de la parte irracional tenga índice 2.

Esto es, que en el denominador irracional tengamos binomios de la forma:

$$\boxed{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} \quad \text{o} \quad \boxed{a\sqrt{b} \pm c} \quad \text{o} \quad \boxed{a \pm b\sqrt{c}},$$

el factor racionalizante será su binomio *conjugado*, esto es, de una *suma*, la *resta* de los términos del binomio; y de una *resta*, la *suma* de los términos del binomio. Así, el conjugado del binomio $\boxed{a\sqrt{b} + c\sqrt{d}}$ es $\boxed{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}}$, y viceversa; el conjugado del binomio $\boxed{a\sqrt{b} + c}$ es $\boxed{a\sqrt{b} - c}$, y viceversa; y el conjugado del binomio $\boxed{a + b\sqrt{c}}$ es $\boxed{a - b\sqrt{c}}$, y viceversa.

Para acelerar los cálculos, se debe tener en cuenta que al multiplicar binomios conjugados de la forma:

$$a + b \qquad \text{y} \qquad a - b,$$

se obtiene lo que llamamos *diferencia de cuadrados*:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Y similarmente, por la conmutativa del producto de números reales, tenemos que

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

(k) $$\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7}{3-\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}}_{1} = \frac{7\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})} = \frac{21+7\sqrt{2}}{3^2-\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{21+7\sqrt{2}}{9-2} = \frac{21+7\sqrt{2}}{7} = \boxed{3+\sqrt{2}}.$$

(l) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}}_{1} = \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}-1^2} = \frac{\sqrt{5\cdot 2}-\sqrt{5}}{2-1} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{1} = \boxed{\sqrt{10}-\sqrt{5}}.$$

(m) $$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}_{1} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\left(\cancel{\sqrt{}}5\right)^{\cancel{2}}-\left(\cancel{\sqrt{}}3\right)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3\cdot 5}-2\cdot\left(\cancel{\sqrt{}}3\right)^{\cancel{2}}}{5-3} = \frac{2\sqrt{15}-6}{2} = \boxed{\sqrt{15}-3}.$$

(n) $$\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}}_{1} = \frac{\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}+\left(\cancel{\sqrt{}}5\right)^{\cancel{2}}+3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\cancel{\sqrt{}}5\right)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5\cdot 2}+5+6\cdot\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}+3\sqrt{2\cdot 5}}{2^2\cdot\left(\cancel{\sqrt{}}2\right)^{\cancel{2}}-5} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10}+5+\overbrace{6\cdot 2}^{12}+3\sqrt{10}}{\underbrace{4\cdot 2}_{8}-5} = \boxed{\frac{5\sqrt{10}+17}{3}}.$$

3.7 Números complejos

En el conjunto de los números reales, podemos realizar casi todas las operaciones conocidas. Si queremos calcular, por ejemplo $\sqrt{-4}$, nos encontramos con el problema de que no hay un número real que elevado al cuadrado dé -4, debido a que siempre el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual que cero. Por lo tanto, no es posible calcular $\sqrt{-4}$ en $\mathbb{R}$.

Ahondemos un poco más en esta situación y veamos dónde realmente está el inconveniente.

Sabemos que el número real $-4 = 4 \cdot (-1)$ y además, supongamos que podemos *distribuir* el signo radical respecto al producto en el radicando, esto es,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_{\textit{Aquí está el problema!}} \quad .$$

Para dar solución a este tipo de problema, se introduce los llamados *números imaginarios*[50] de la siguiente manera:

3.7.1 Unidad imaginaria

Definición Se define como *unidad imaginaria* al número no real:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}.$$

Observación De lo anterior, es fácil concluir que

$$i^2 = -1.$$

De este manera, ahora tenemos que

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i = 2\,i,$$

donde la expresión $2\,i$ es un número imaginario, más precisamente, el doble de la unidad imaginaria.

Nos preguntamos ahora: ¿Existe un conjunto, digamos $\mathbb{C}$, que verifique que:

(I) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$,

y donde

(II) $i \in \mathbb{C}$?

[50]Debido a que no son reales.

La respuesta a la cuestión anterior es afirmativa, como se va a mostrar a continuación. El conjunto $\mathbb{C}$ buscado recibe el nombre de *conjunto de los números complejos.*
El deseo de encontrar un conjunto donde $\sqrt{-4}$ tenga solución, nos condujo a generalizar la noción de número real, introduciendo al conjunto de los números complejos.

3.7.2 Construcción y forma binómica

Consideremos el número imaginario i, llamado *unidad imaginaria*, de manera que $i^2 = -1$, es decir, $i = \sqrt{-1}$ entonces los elementos de $\mathbb{C}$ están determinados por las siguientes reglas de construcción:

(I) $\boxed{\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}$, es decir, *todo número real es un número complejo.*

(II) $\boxed{i \in \mathbb{C}}$ y sin embargo $\boxed{i \notin \mathbb{R}}$, es decir, *la unidad imaginaria es un número complejo, pero no es un número real.*

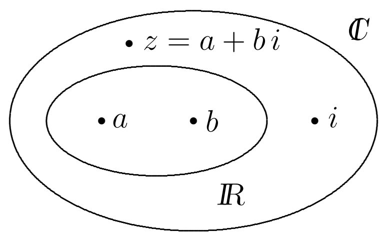
(III) Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces el binomio $a + b\,i \in \mathbb{C}$, llamado *forma binómica de un número complejo.*

Por esta regla, si $z \in \mathbb{C}$ entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{z = a + b\,i}\,.$$

(IV) Ley de cierre: Los elementos de $\mathbb{C}$ son los determinados únicamente por las reglas $(I), (II)$ y (III).

Nota Notemos que $\sqrt{-1}$ no tenía solución en los reales, en cambio, ahora si tiene solución en los complejos y es igual al número imaginario i , por lo dicho anteriormente.
Gráficamente:



Ejemplos

(a) $-\dfrac{1}{4}, \sqrt{3} \in \mathbb{C}$, pues $-\dfrac{1}{4}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ por C_1.

(b) $i \in \mathbb{C}$, por C_2.

(c) $-1 + \dfrac{3}{2}\,i \in \mathbb{C}$, porque $-1, \dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}$ por C_3.

3.7.3 Parte real y parte imaginaria

Dado un número complejo en forma binómica como sigue:

$$z = a + b\,i \in \mathbb{C},$$

decimos que los números a y b son la *parte real* y la *parte imaginaria* del número complejo z respectivamente y lo denotamos $\boxed{Re(z) = a}$ y $\boxed{Im(z) = b}$.

Luego,

$$\boxed{z = Re(z) + Im(z)\,i}.$$

Ejemplo Sean $z = -2 - 3\,i \in \mathbb{C}$ y $w = \dfrac{3}{4} + i \in \mathbb{C}$ entonces $Re(z) = -2$ y $Im(z) = -3$, $Re(w) = \dfrac{3}{4}$ y $Im(w) = 1$.

3.7.4 Reglas de operatividad

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

(B_1) $a = a + 0\,i$.

(B_2) $b\,i = 0 + b\,i$.

(B_3) $0 = 0\,i = 0 + 0\,i$.

(B_4) $i = 1\,i = 0 + 1\,i$.

(B_5) $-i = -1\,i = 0 - 1\,i$.

(B_6) $a - b\,i = a + (-b)\,i$.

(B_7) $-(a + b\,i) = -a - b\,i$.

Observación Los números complejos de la forma

$$\boxed{a = a + 0\,i}$$

son los números reales, y los de la forma

$$\boxed{b\,i = 0 + b\,i}\,,$$

con $b \neq 0$, son los números imaginarios, llamados *imaginarios puros*.

3.7.5 Representación cartesiana

Recordemos que la recta númerica quedó completa con los números reales. Ahora bien, para representar gráficamente a los números complejos, necesitamos el *plano cartesiano*[51].

Tomemos un sistema cartesiano donde el *origen de coordenadas* sea el punto $(0,0)$, que representa al número complejo en forma binómica $0+0\,i$, que es el 0 real.

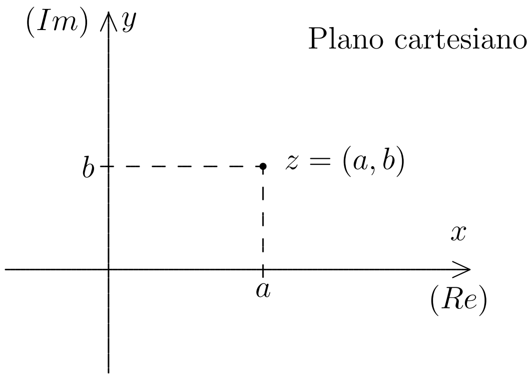
Todos los puntos sobre el eje x o eje horizontal, llamado *eje de las abscisas*, son de la forma $(a,0)$ que corresponden a los números complejos cuya forma binómica es $a+0\,i$, que son los números reales a. Por este motivo, a este eje se lo suele llamar *eje real* (Re) en el plano complejo.

Todos los puntos sobre el eje y o eje vertical, llamado *eje de las ordenadas*, son de la forma $(0,b)$ que corresponden a los números complejos cuya forma binómica es $0+b\,i$, que son los números imaginarios $b\,i$, que nombramos imaginarios puros. Por este motivo, a este eje se lo suele llamar *eje imaginario* (Im) en el plano complejo.

A cada $z=a+b\,i\in\mathbb{C}$ le asociamos el *par ordenado* de números reales (a,b), que denotamos $z=(a,b)$, llamado *par ordenado asociado al número complejo z*. Así, queda definido una correspondencia entre $\mathbb{C}$ y el *plano cartesiano* que nos permite *identificar* a cada número complejo como un par ordenado de números reales. Por lo tanto podemos pensar a los números complejos como *puntos* del plano que forman los ejes cartesianos.

Gráficamente:

$z=a+b\,i\in\mathbb{C}$



Ejemplos Representemos en el plano cartesiano a los números complejos: $z_1=-2+i$,
$z_2=\dfrac{1}{2}-3\,i$, $z_3=3+2\,i$ y $z_4=4\,i$.
Entonces

$$z_1=-2+i=-2+1\,i\longrightarrow z_1=(-2,1),$$

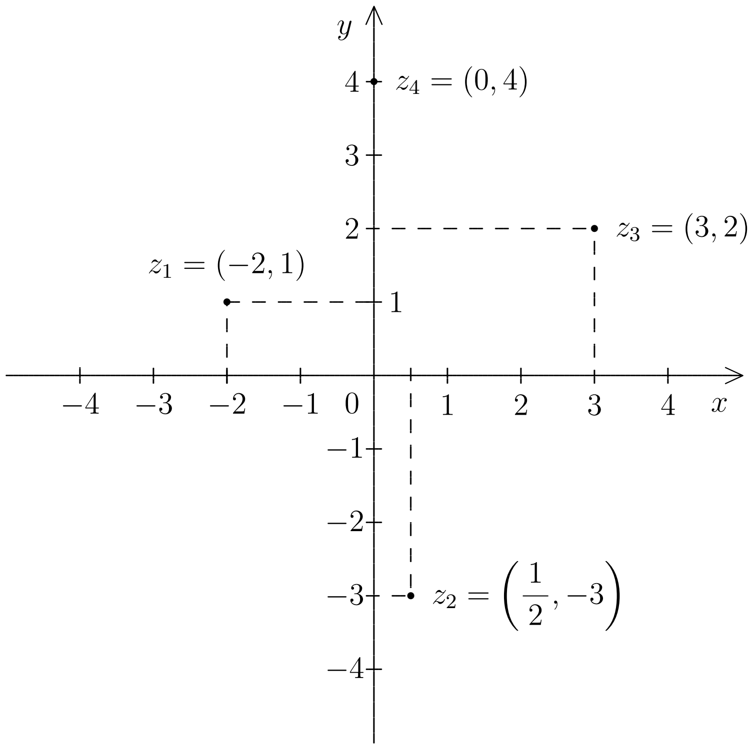
[51]En honor a su creador, el filósofo y físico-matemático René Descartes [1596-1650], también llamado Renatus Cartesius.

$$z_2 = \frac{1}{2} - 3\,i \longrightarrow z_2 = \left(\frac{1}{2}, -3\right),$$

$$z_3 = 3 + 2\,i \longrightarrow z_3 = (3, 2) \text{ y}$$

$$z_4 = 4\,i = 0 + 4\,i \longrightarrow z_4 = (0, 4).$$

Gráficamente:



3.7.6 Igualdad

Dados dos números complejos en forma binómica

$$z = a + b\,i \text{ y } w = c + d\,i,$$

decimos que $a + b\,i = c + d\,i$ si, y sólo si, se verifica que $a = c$ y $b = d$. En símbolos,

$$\boxed{z = w \Longleftrightarrow Re(z) = Re(w) \text{ y } Im(z) = Im(w)}\,.$$

Dados dos números complejos como pares ordenados,

$$z = (a, b) \text{ y } w = (c, d),$$

decimos que

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d}.$$

Esto es, *dos números complejos son iguales si, y sólo si, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también.*

Ejemplo Hallemos el valor de x e y que verifican la siguiente igualdad:

$$(2\,x, y + 2) = (4, -1)$$

Por lo dicho anteriormente, tenemos que

$$2\,x = 4 \quad \text{e} \quad y + 2 = -1\,.$$

Luego,

$$x = \frac{4}{2} \quad \text{e} \quad y = -1 - 2\,.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x = 2} \quad \text{e} \quad \boxed{y = -3}.$$

3.7.7 Opuesto de un número complejo

Definición Sea $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, definimos el *opuesto del número complejo* z que simbolizamos $-z$, como el número complejo

$$\boxed{-z = -(a + b\,i) = -a - b\,i}.$$

Observación $Re(-z) = -Re(z)$ y $Im(-z) = -Im(z)$.

Nota $-Re(z)$ y $-Im(z)$ representan al opuesto de la parte real y de la parte imaginaria de z respectivamente.

Ejemplo Sea $z = -3 + 2\,i$ entonces el opuesto de z es $-z = 3 - 2\,i$.

3.7.8 Conjugado de un número complejo

Definición Sea $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, definimos el *conjugado del número complejo* z que simbolizamos $\overline{z}$, como el número complejo

$$\boxed{\overline{z} = a - b\,i}.$$

Observación $Re(\overline{z}) = Re(z)$ y $Im(\overline{z}) = -Im(z)$.

Ejemplo Sea $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3}\,i$ entonces el conjugado de z es $\overline{z} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}\,i$.

3.7.9 Módulo de un número complejo

Definición Sea $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, definimos el *módulo del número complejo* z que simbolizamos $\|z\|$, como el número real no negativo

$$\boxed{\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}}\,.$$

Si pasamos la raíz cuadrada como un exponente cuadrado al primer miembro de la igualdad de arriba, resulta que:

$$\boxed{\|z\|^2 = a^2 + b^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}\,,$$

llamado *módulo al cuadrado del número complejo* z.

Observación Qué el módulo del número complejo z sea *no negativo* significa que $\|z\| \geqslant 0$ siempre.

Ejemplos Sean $z = -1 + i$ y $w = 3 - 4\,i$ entonces

$$\|z\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,, \qquad \|z\|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

y

$$\|w\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\,, \qquad \|w\|^2 = 3^2 + (-4) = 9 + 16 = 25\,.$$

3.7.10 Inverso de un número complejo

Definición Sea $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, definimos el *inverso del número complejo* z que simbolizamos $\dfrac{1}{z}$, como el número complejo

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2} = \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i.$$

donde $Re\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{a}{a^2+b^2} = \dfrac{Re(z)}{\|z\|^2}$ y $Im\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{b}{a^2+b^2} = -\dfrac{Im(z)}{\|z\|^2}$.

Esto es, el inverso de un número complejo z se calcula mediante la fórmula

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}}\,.$$

Observaciones

(1) Si $z \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{z} \neq 0$.

(2) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1 \cdot (-i)}{\|i\|^2} = \dfrac{-i}{1+0} = -i$, es decir, el inverso de i es $-i$.

Ejemplo Sea $z = 1 - 2\,i$ entonces el inverso de z es

$$\frac{1}{z} = \frac{1 + 2\,i}{1^2 + (-2)^2} = \frac{1 + 2\,i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,i\,.$$

3.7.11 Suma de números complejos

Definición Dados dos números complejos $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$, definimos la *suma* $z + w$, como sigue:

$$\boxed{z + w = (a + c) + (b + d)\,i}\,.$$

O bien:

$$\begin{array}{rcccccc} & z & = & a & + & b\,i \\ + & w & = & c & + & d\,i \\ \hline & z + w & = & (a + c) & + & (b + d)\,i \end{array}$$

Observación

(1) Si $z = a + 0\,i = a$ y $w = b + 0\,i = b$ entonces $z + w = a + b$, esto es, $z + w$ es lo mismo que la suma de los números reales a y b.

(2) Si $z = a + 0\,i = a$ y $w = b + c\,i$ entonces $z + w = a + (b + c\,i) = (a + b) + c\,i$.

(3) Si $z = a + 0\,i = a$ y $w = 0 + b\,i = b\,i$ entonces $z + w = a + b\,i$.

(4) Si $z = 0 + a\,i = a\,i$ y $w = 0 + b\,i = b\,i$ entonces $z + w = a\,i + b\,i = (a + b)\,i$.

(5) Si $z = a + b\,i$ y $w = 0 + c\,i = c\,i$ entonces

$$z + w = (a + b\,i) + (c\,i) = a + (b\,i + c\,i) = a + (b + c)\,i.$$

Ejemplo Sean $z = 2 + \frac{1}{3}\,i$ y $w = -3 + \frac{1}{2}\,i$. Calculemos $z + w$.

$$z + w = \left(2 + \frac{1}{3}\,i\right) + \left(-3 + \frac{1}{2}\,i\right) = \big(2 + (-3)\big) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\,i =$$

$$= (2 - 3) + \left(\frac{2 + 3}{6}\right)\,i = -1 + \frac{5}{6}\,i.$$

O también:

$$\begin{array}{rcccccc} & z & = & 2 & + & \frac{1}{3}\,i \\ + & w & = & -3 & + & \frac{1}{2}\,i \\ \hline & z + w & = & -1 & + & \frac{5}{6}\,i \end{array}$$

Observación El opuesto de un número complejo z, que denotamos $-z$, es aquel que verifica que

$$\boxed{z + (-z) = 0}.$$

3.7.12 Producto de números complejos

Definición Dados dos números complejos $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$, definimos el producto $z \cdot w$, como sigue:

$$\boxed{z \cdot w = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\, i}.$$

O bien, aplicando la propiedad distributiva, recordando que $i^2 = -1$ y agrupando reales con reales e imaginarios puros con imaginarios puros tenemos que:

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = \\
&= a \cdot c + a \cdot d\,i + c \cdot b\,i + b \cdot d\,i^2 = \\
&= a \cdot c + (a \cdot d + c \cdot b)\,i + b \cdot d\,(-1) = \\
&= a \cdot c + (a \cdot d + c \cdot b)\,i - b \cdot d = \\
&= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + c \cdot b)\,i\,.
\end{aligned}$$

Observación

(1) Si $z = a + 0\,i = a$ y $w = b + 0\,i = b$ entonces $z \cdot w = a \cdot b$, esto es, $z \cdot w$ es lo mismo que el producto de los números reales a y b.

(2) Si $z = a + 0\,i = a$ y $w = b + c\,i$ entonces $z \cdot w = a \cdot (b + c\,i) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\,i$.

(3) Si $z = a + 0\,i = a$ y $w = 0 + b\,i = b\,i$ entonces $z \cdot w = a \cdot b\,i = (a \cdot b)\,i$.

(4) Si $z = 0 + a\,i = a\,i$ y $w = 0 + b\,i$ entonces

$$z \cdot w = (a \cdot i) \cdot (b\,i) = (a \cdot b) \cdot i^2 = (a \cdot b) \cdot (-1) = -a \cdot b\,.$$

(5) Si $z = a + b\,i$ y $w = 0 + c\,i = c\,i$ entonces

$$z \cdot w = (a + b\,i) \cdot (c\,i) = (a \cdot c\,i) + (b\,i \cdot c\,i) = a \cdot (c\,i) + (b \cdot c\,i^2) =$$

$$= (a \cdot c)\,i + (b \cdot c \cdot (-1)) = (a \cdot c)\,i + (-b \cdot c) = (-b \cdot c) + (a \cdot c)\,i.$$

Ejemplo Sean $z = 3 + \dfrac{1}{2}\,i$ y $w = -1 + 2\,i$. Calculemos $z \cdot w$.

$$z \cdot w = \left(3 + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot (-1 + 2\,i) = \left(3 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 2\right) + \left(3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)\right)\, i =$$

$$= (-3 - 1) + \left(6 - \frac{1}{2}\right)\, i = -4 + \frac{11}{2}\, i.$$

Otra forma de calcular $z \cdot w$ es usando la propiedad distributiva doble, sabiendo que $i^2 = -1$ y agrupando reales con reales e imaginarios puros con imaginarios puros:

$$z \cdot w = \left(3 + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot (-1 + 2\,i) = 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 2\,i + \frac{1}{2}\,i \cdot (-1) + \frac{1}{2}\,i \cdot 2\,i =$$

$$= -3 + 6\,i - \frac{1}{2}\,i + 1\,i^2 = -3 + \left(6 - \frac{1}{2}\right)\, i + 1.(-1) = -3 + \frac{11}{2}\,i - 1 = -4 + \frac{11}{2}\,i.$$

Observación El inverso de un número complejo z distinto de cero, que denotamos $\dfrac{1}{z}$, es aquel que verifica que

$$\boxed{z \cdot \frac{1}{z} = 1}\,.$$

3.7.13 Resta de números complejos

Definición Dados dos números complejos $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$, definimos la resta $z - w$, como sigue:

$$z - w = (a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i.$$

O bien:

$$\begin{array}{rcccccc} & z & = & a & + & b\,i \\ - & w & = & c & + & d\,i \\ \hline & z - w & = & (a-c) & + & (b-d)\,i \end{array}$$

Observación La resta de números complejos también puede definirse como *la suma del minuendo más opuesto del sustraendo*, esto es,

$$\boxed{z - w = z + (-w)}\,.$$

Ejemplo Sean $z = -3 + 2\,i$ y $w = -2 + \dfrac{1}{2}\,i$. Calculemos $z - w$:

$$\begin{array}{rcccccc} & z & = & -3 & + & 2\,i \\ - & w & = & -2 & + & \frac{1}{2}\,i \\ \hline & z - w & = & -1 & + & \frac{3}{2}\,i \end{array}$$

Otra forma de calcular $z-w$ es sumando a $z=-3+2\,i$ el opuesto de w que es $-w=2-\dfrac{1}{2}\,i$. Luego,

$$\begin{array}{rrcrcl} & z & = & -3 & + & 2\,i \\ + & -w & = & 2 & - & \dfrac{1}{2}\,i \\ \hline & z-w & = & -1 & + & \dfrac{3}{2}\,i \end{array}$$

3.7.14 Cociente de números complejos

Definición Dados dos números complejos $z=a+b\,i$ y $w=c+d\,i$, con $w\neq 0$, definimos el cociente $z:w$, como sigue:

$$z:w=\frac{z}{w}=z\cdot\frac{1}{w}=z\cdot\frac{\overline{w}}{\|w\|^2}=\frac{z\cdot\overline{w}}{\|w\|^2}=\frac{(a+b\,i)\cdot(c-d\,i)}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+(b\cdot c-a\cdot d)\,i}{c^2+d^2}=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\,i\,.$$

Esto es, el cociente de números complejo se calcula mediante la fórmula

$$\boxed{\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{\|w\|^2}}.$$

Ejemplo Sean $z=4-i$ y $w=-2-i$. Calculemos $z:w$.

$$z:w=\frac{z}{w}=\frac{4-i}{-2-i}=\frac{(4-i)\cdot(-2+i)}{(-2)^2+(-1)^2}=\frac{(4\cdot(-2)-(-1)\cdot 1)+(4.1+(-1)\cdot(-2))\,i}{4+1}=$$

$$=\frac{(-8+1)+(4+2)\,i}{5}=-\frac{7}{5}+\frac{6}{5}\,i.$$

Observación Otra forma para calcular $z:w$, con $w\neq 0$, es

$$\boxed{\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}}.$$

Es decir, para dividir complejos hay que *multiplicar por el conjugado del denominador tanto los complejos del numerador y del denominador, y luego resolver ambos productos.*

Resumiendo:

$$z:w=\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{\|w\|^2}=\frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}\,.$$

debido a que: $\boxed{\|w\|^2=w\cdot\overline{w}}$ (Comprobarlo).

3.7.15 Potenciación

3.7.15.1 Potencias de exponente natural o cero

Definición Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}_0$ [52], definimos las potencias de z de exponente natural o cero, por medio de las siguientes dos reglas:

(X_1) $\boxed{z^0 = 1}$.

(X_2) $\boxed{z^{n+1} = z^n \cdot z}$.

De este modo, aplicando estas dos reglas obtenemos que

(X_3) $z^1 = z^{0+1} = z^0 \cdot z = 1 \cdot z = z.$ [Por (X_2) y (X_1)]

(X_4) $z^2 = z^{1+1} = z^1 \cdot z = z \cdot z.$ [Por (X_2) y (X_3)]

(X_5) $z^3 = z^{2+1} = z^2 \cdot z = (z \cdot z) \cdot z = z \cdot z \cdot z.$ [Por (X_2) y (X_4)]

Y así siguiendo, encontramos que el caso general es

(X_6) $\boxed{z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-veces}}$.

3.7.15.2 Propiedades

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, entonces se verifica que:

(X_7) $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n.$ [Distributiva del exponente respecto al producto en la base]

(X_8) $(z : w)^n = z^n : w^n$, con $w \neq 0$. [Distributiva del exponente respecto al cociente en la base]

O bien, expresando el cociente a través de su forma fraccionaria $\left(\dfrac{z}{w}\right)^n = \dfrac{z^n}{w^n}$, con $w \neq 0$.

(X_9) $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$. [Producto de potencias de igual base]

(X_{10}) Si $n \geqslant m$ entonces $z^n : z^m = z^{n-m}$, con $z \neq 0$. [Cociente de potencias de igual base]

O bien, expresando el cociente a través de su forma fraccionaria:

Si $n \geqslant m$ entonces $\dfrac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$, con $z \neq 0$.

(X_{11}) $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$. [Potencia de potencia]

[52] El número n es un entero no negativo, es decir, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geqslant 0$.

3.7.15.3 Potencias de la unidad imaginaria

(X_{12}) $i^0 = 1.$ [Por (X_1)]

(X_{13}) $i^1 = i.$ [Por (X_3)]

(X_{14}) $i^2 = -1.$ [Ya sabido]

(X_{15}) $i^3 = i^{2+1} = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i.$ [Por (X_2) y (X_{14})]

(X_{16}) $i^k = i^{\,r}$, donde $k \geqslant 4$ y r es el resto de la *división entera* de $\begin{array}{l|l} k & 4 \\ \hline \boxed{r} & c \end{array}$. $c \rightarrow$ cociente

Observación Los restos posibles de la división entera de k en 4 son: $0, 1, 2$ o 3, es decir, $r = 0$ o $r = 1$ o $r = 2$ o $r = 3$, que son los exponentes de las propiedades (X_{12}) a (X_{15}).

Ejemplos Usando (X_{16}) tenemos que:

(*a*) $i^4 = i^0 = 1$, pues $\begin{array}{l|l} 4 & 4 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array}$ y por (X_{12}).

(*b*) $i^9 = i^1 = i$, pues $\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline \boxed{1} & 2 \end{array}$ y por (X_{13}).

(*c*) $i^{22} = i^2 = -1$, pues $\begin{array}{l|l} 22 & 4 \\ \hline \boxed{2} & 5 \end{array}$ y por (X_{14}).

(*d*) $i^{35} = i^3 = -i$, pues $\begin{array}{l|l} 35 & 4 \\ \hline \boxed{3} & 8 \end{array}$ y por (X_{15}).

3.7.15.4 Potencias de exponente entero negativo

Definición Sean $z, w \in \mathbb{C}$, ambos distintos de 0, y sea $-n \in \mathbb{Z}^-$, o sea que $n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, definimos las *potencias de exponente entero negativo* de la siguiente manera:

(X_{17}) $z^{-n} = \left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \dfrac{1}{z^n}\,.$

(X_{18}) $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{-n} = \left(\dfrac{w}{z}\right)^n.$

(X_{18}) $i^{-n} = \dfrac{1}{i^n}\,.$

Observación En general, para $-n \in \mathbb{Z}^-$, tenemos que $n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ y que

$$i^{-n} = \begin{cases} i^n & \text{cuando} \quad n \text{ es par} \\ -\, i^n & \text{cuando} \quad n \text{ es impar} \end{cases} .$$

Ejemplos

(*a*) $i^{-26} = i^{26} = i^2 = -1$, por la observación anterior, puesto que $n = 26$ es par y además $\begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \cline{2-2} \boxed{2} & 6 \end{array}$ por (X_{16}) e (X_{14}).

(*b*) $i^{-37} = -i^{37} = -i^1 = -i$, por la observación anterior, puesto que $n = 37$ es impar y además $\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ \cline{2-2} \boxed{1} & 9 \end{array}$ por (X_{16}) e (X_{13}).